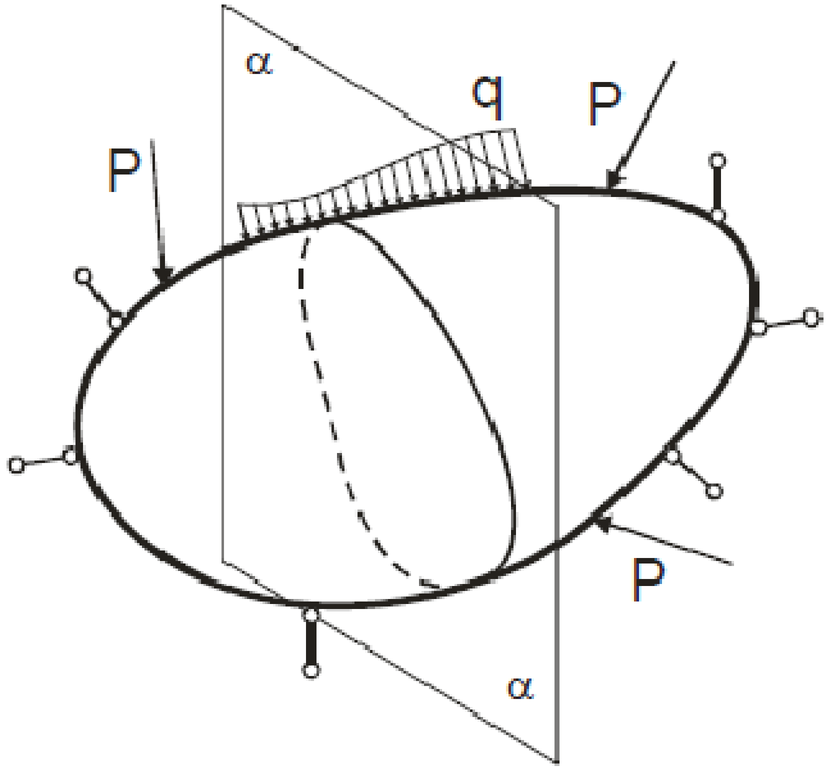
Mechanika ogólna

Wykład nr 5

Siły wewnętrzne.

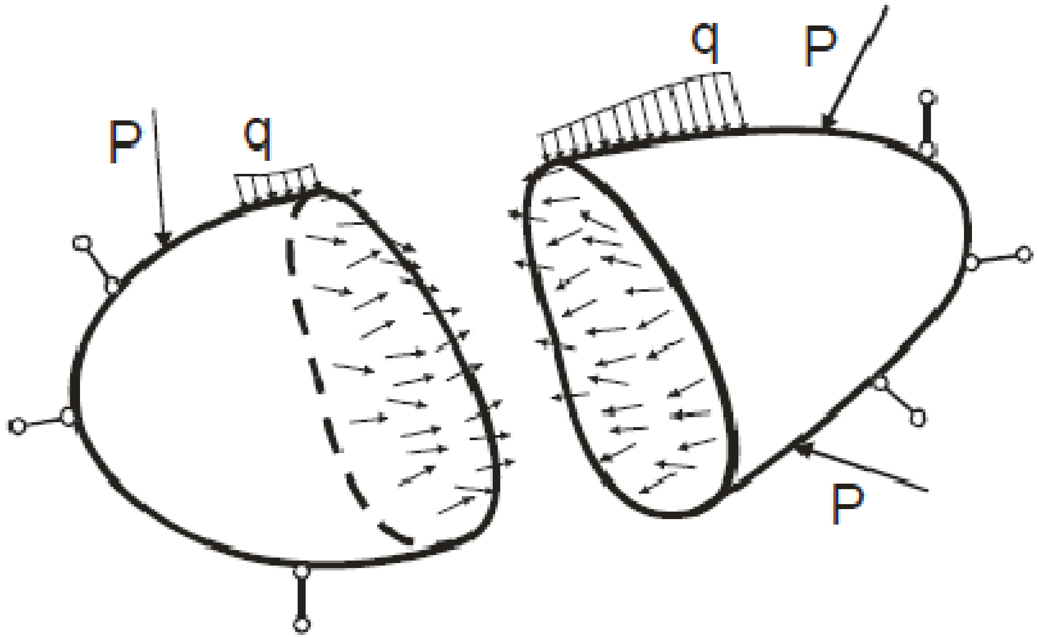
Siły wewnętrzne (1)

- **Mamy bryłę materialną obciążoną układem sił (siły zewnętrzne, reakcje), będących w równowadze. Rozetniemy myślowo tę bryłę na dwie części przekrojem** a - a **.**



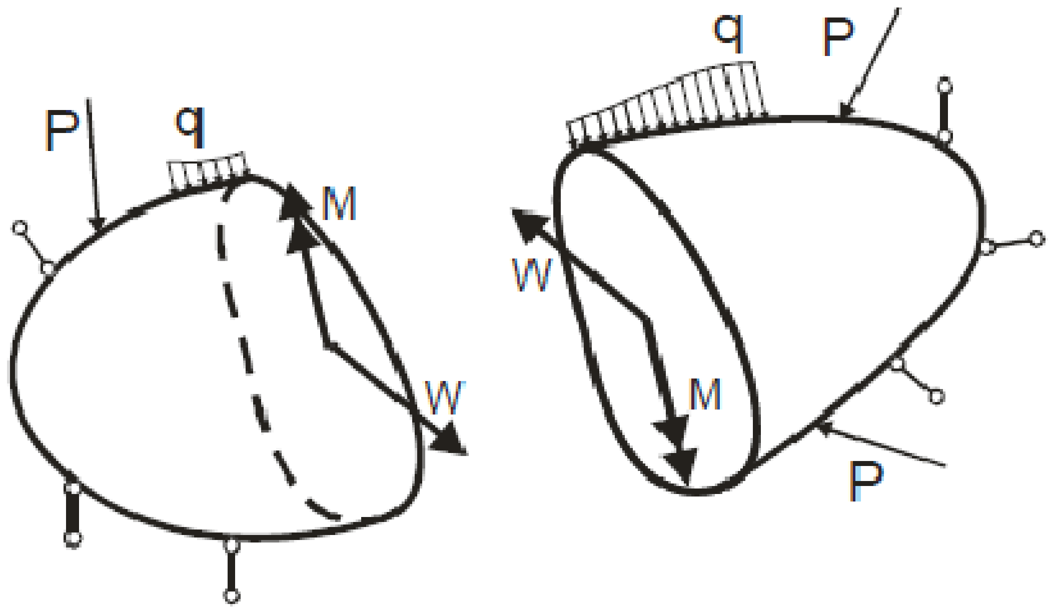
Siły wewnętrzne (2)

- **Aby fragment bryły był w równowadze musimy zastąpić wzajemne oddziaływanie fragmentów brył przez przyłożenie w sposób ciągły do płaszczyzny** a - a **układu sił.**



Siły wewnętrzne (3)

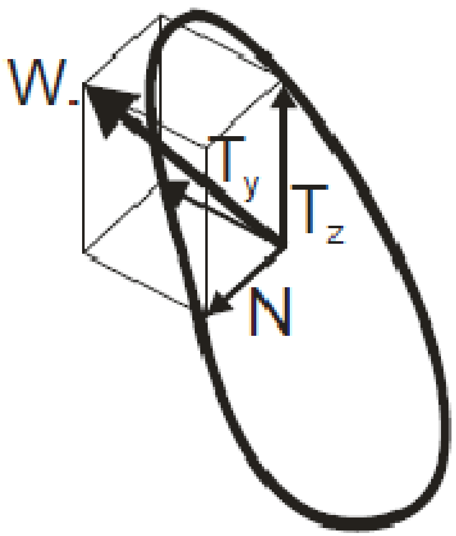
- **Siły te można zastąpić przez ich wypadkowe *W* i *M*, przyłożone w dowolnym punkcie przekroju a - a. W przypadku naszych rozważań punktem tym będzie środek przekroju.**

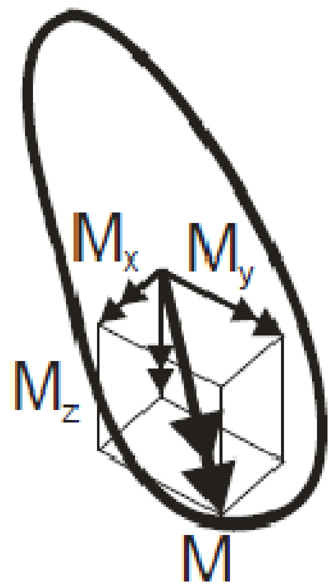


Siły przekrojowe

- **Wypadkową siłę *W* i moment *M* można wyrazić przez ich składowe:**

$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{N}} + \overline{\mathbf{T}_y} + \overline{\mathbf{T}_z} \qquad \overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}_x} + \overline{\mathbf{M}_y} + \overline{\mathbf{M}_z}$$

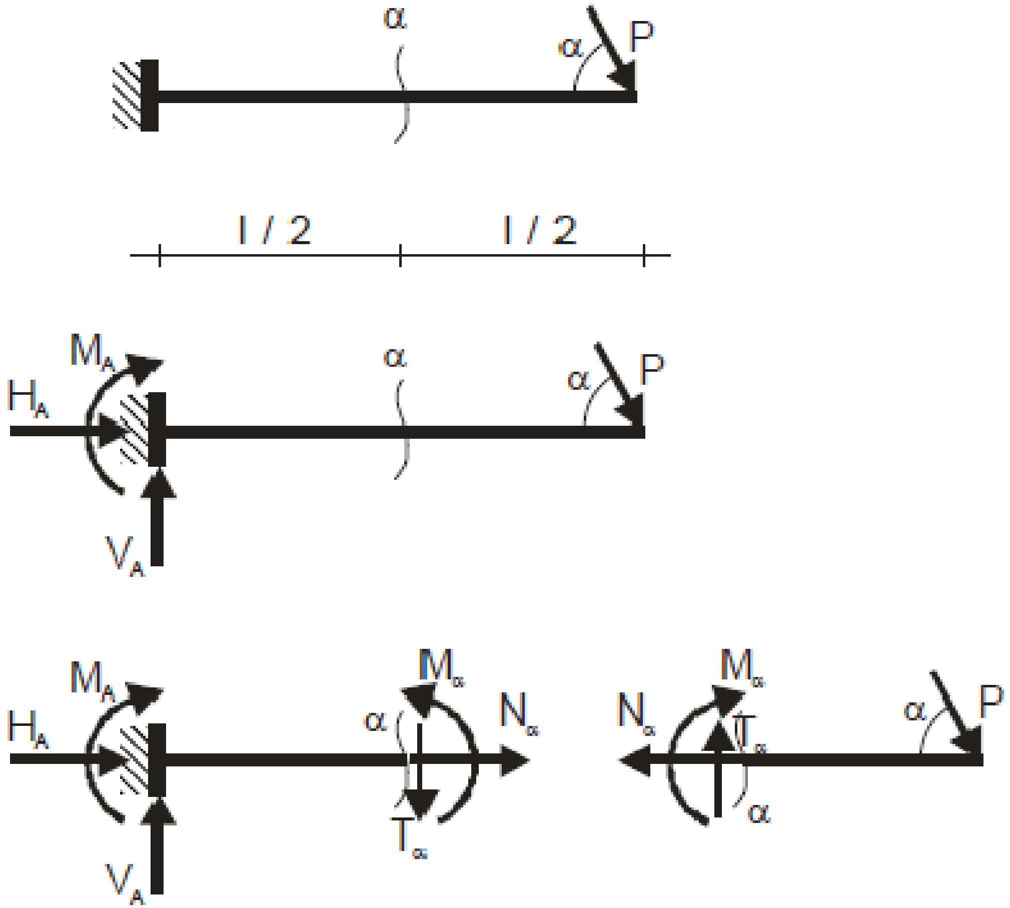




Nazwy sił przekrojowych

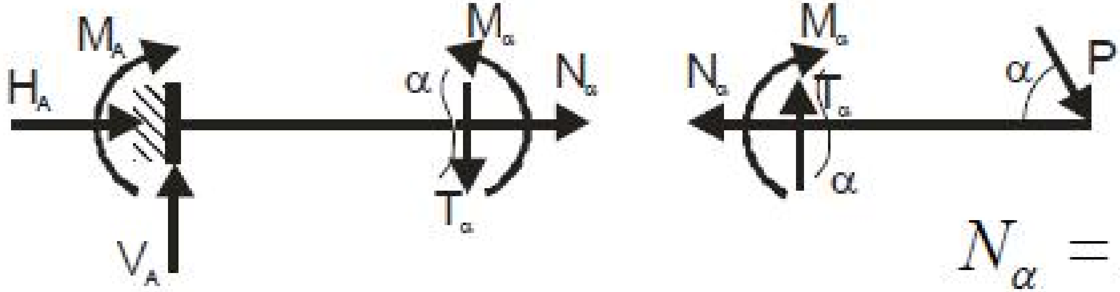
- **Wielkości te nazwano:**
  - N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
  - T_y , T_z, (lub Q_y , Q_z)– siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
  - M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
  - M_y , M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

Przykład



Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (1)

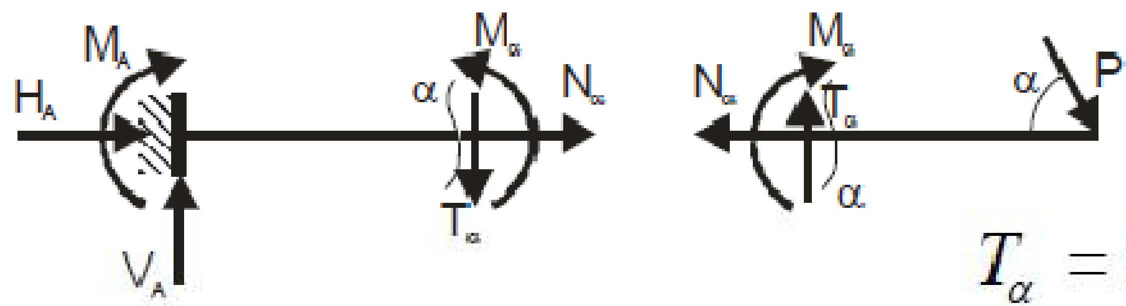
- **Siła normalna (osiowa, podłużna) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się wzdłuż osi pręta w rozważanym punkcie.**



$$N_\alpha = P\cos\alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (2)

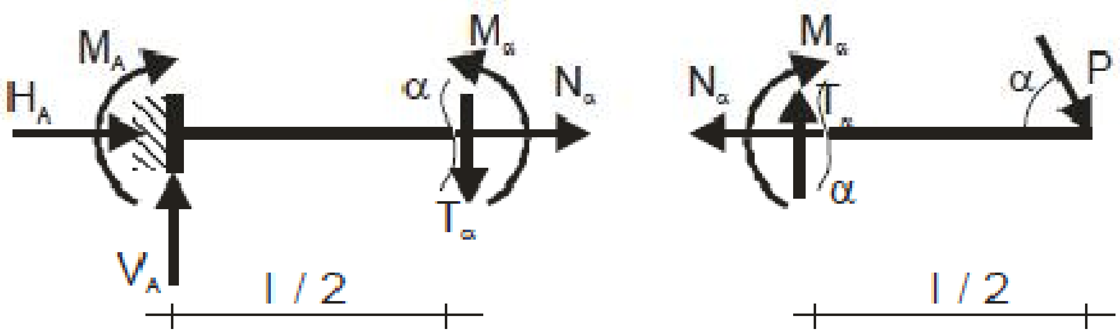
- **Siła poprzeczna (tnąca) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się poprzecznie do osi pręta w rozważanym punkcie.**



$$T_\alpha = P\sin\alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (3)

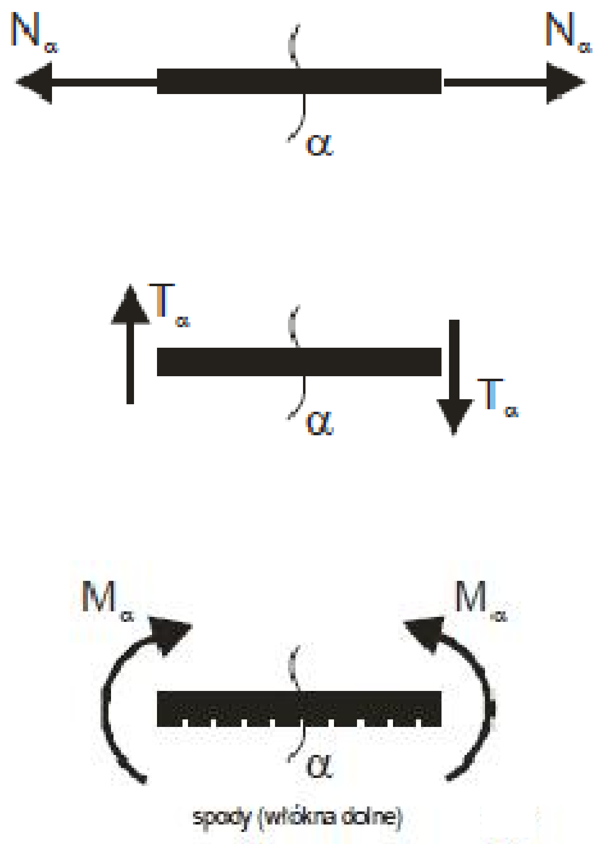
- **Moment zginający – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich wzajemnemu obrotowi w rozważanym punkcie.**



$$M_\alpha = -P\frac{l}{2}\sin\alpha$$

Siły wewnętrzne – konwencja znaków

- Siła normalna rozciągająca pręt jest dodatnia.
- Siła poprzeczna powodowana przez obciążenie działające po lewej stronie przekroju do góry lub po prawej stronie do dołu jest dodatnia.
- Moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



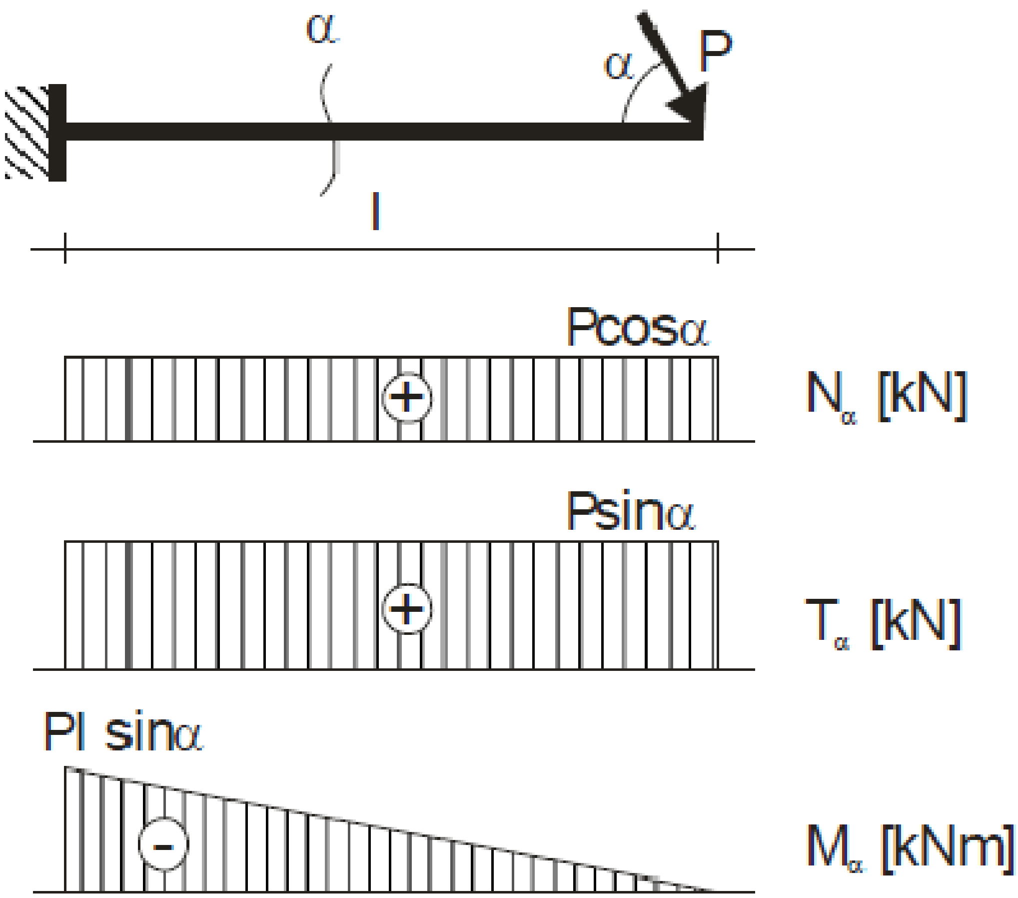
Siły wewnętrzne – wykresy (1)

- Kreskowanie (rzędne wykresu) należy zaznaczać prostopadle do osi pręta.
- Rzędne dodatnie wykresów sił normalnych i tnących odkłada się zazwyczaj u góry.
- Wykresy sił podłużnych i poprzecznych rysujemy ze znakiem.

Siły wewnętrzne – wykresy (2)

- Wykresy momentów nie muszą być znakowane, ale należy zwracać uwagę, aby rzędne momentu odkładać po stronie włókien rozciąganych.
- Rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odkłada się u dołu (moment dodatni, gdy rozciągane są włókna dolne).
- Wykres momentu wskazuje jak odkształci się pręt i gdzie, w poszczególnych elementach, włókna są rozciągane.

Wykresy sił wewnętrznych



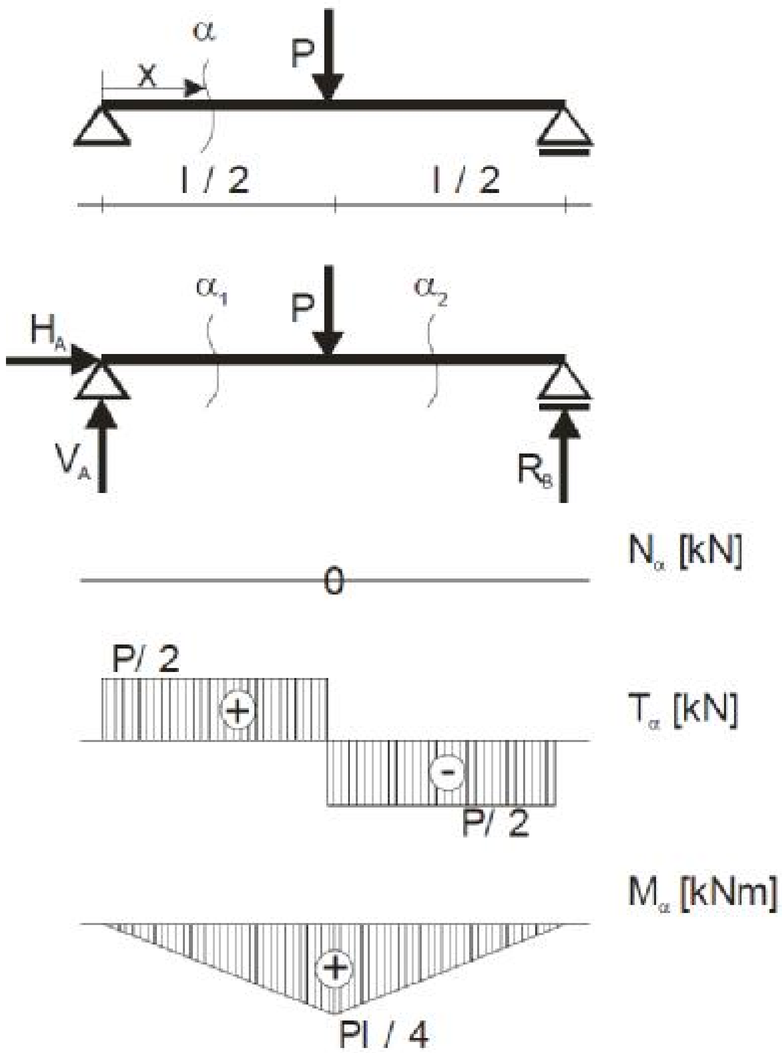
Punkty charakterystyczne, przekroje

- **Ze względu na konieczność modyfikacji równań sił wewnętrznych:**
  - **w belkach i ramach – końce prętów, punkty przyłożenia sił:**
    - **czynnych: siła skupiona, moment skupiony, początek lub koniec obciążenia ciągłego;**
    - **biernych: punkty podporowe;**
  - **w ramach – dodatkowo węzły (połączenia prętów o różnej krzywiźnie).**

Przegub

- **Przegub jest jedynie punktem kontrolnym (moment równy jest 0).**
  Nie powoduje on konieczności wprowadzenia dodatkowego przekroju.

Siła skupiona



$$V \qquad R \qquad P \qquad H \qquad 0$$

$$N_{\alpha 1} = 0 \qquad N_{\alpha 2} = 0$$

$$T_{\alpha 1} = V_A = \frac{P}{2} \qquad T_{\alpha 2} = V_A - P = -\frac{P}{2}$$

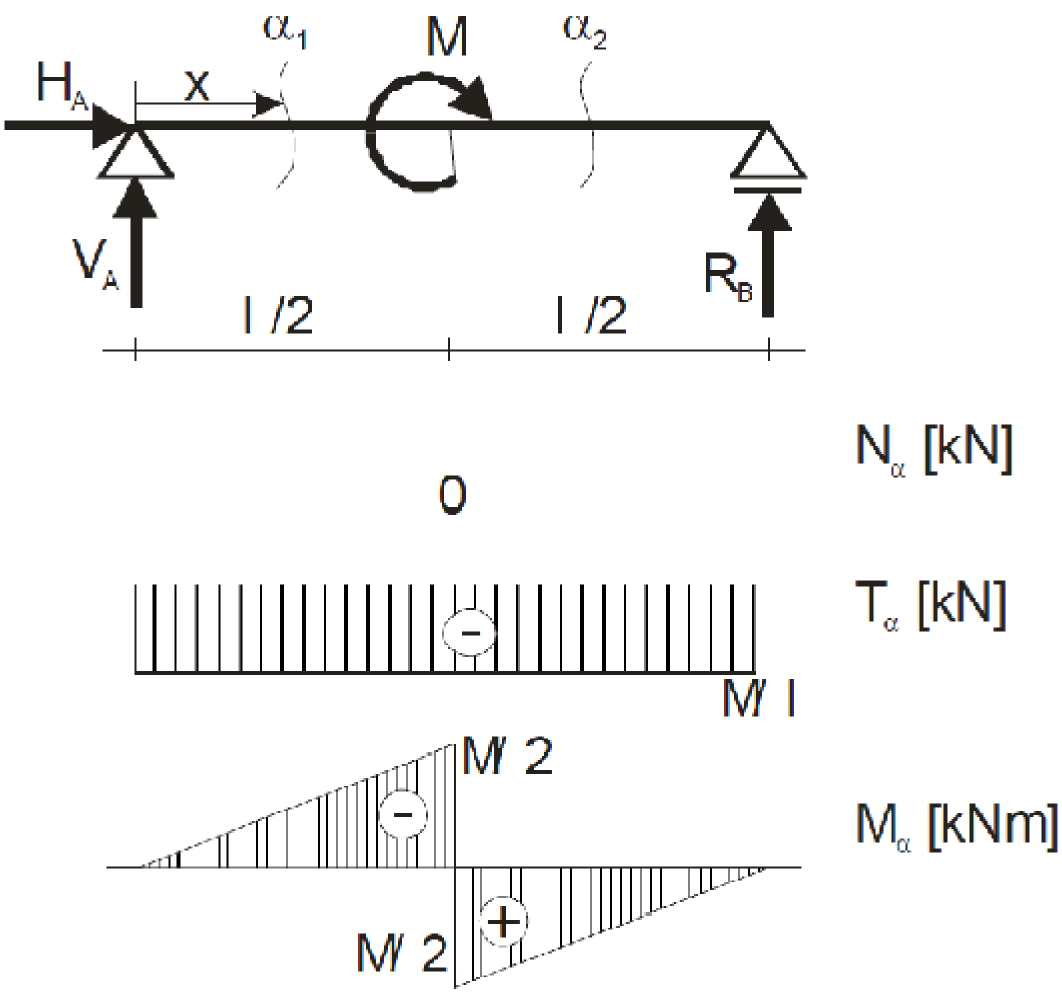
$$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x \qquad \left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_{\alpha 1} = 0 \\ x = \dfrac{l}{2} & M_{\alpha 1} = \dfrac{Pl}{4} \end{array} \right.$$

$$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x \quad P\left(x \quad \frac{l}{2}\right) =$$

$$= \frac{P}{2} \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = P\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = \dfrac{l}{2} & M_{\alpha 2} = \dfrac{Pl}{4} \\ x = l & M_{\alpha 2} = 0; \end{array} \right.$$

Moment skupiony



$$V_A = -\frac{M}{l} \quad R_B = \frac{M}{l} \quad H_A = 0$$

$$N_{\alpha 1} = 0 \quad N_{\alpha 2} = 0$$

$$T_{\alpha 1} = V_A = -\frac{M}{l} \quad T_{\alpha 2} = -\frac{M}{l}$$

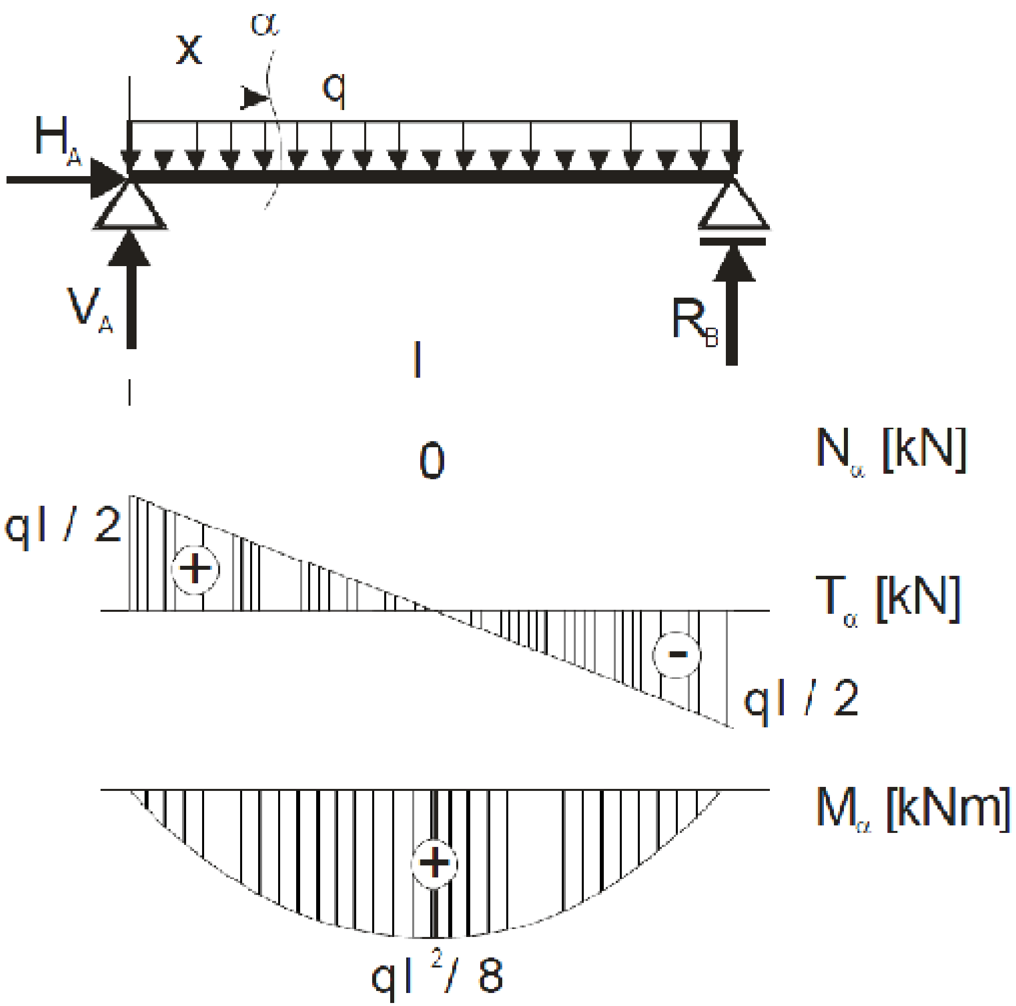
$$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = -\frac{M}{l} \cdot x$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_{\alpha 1} = 0 \\ x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 1} = -\frac{M}{2} \end{array} \right.$$

$$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x + M = M \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 2} = \frac{M}{2} \\ x = l & M_{\alpha 2} = 0 \end{array} \right.$$

Obciążenie ciągłe równomierne



$$V_A = R_B = \frac{ql}{2} \qquad H_A = 0$$

$$N_\alpha = 0$$

$$T_\alpha = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{2}$$

$$x = \frac{l}{2} \quad T_\alpha = 0$$

$$x = l \quad T_\alpha = -\frac{ql}{2}$$

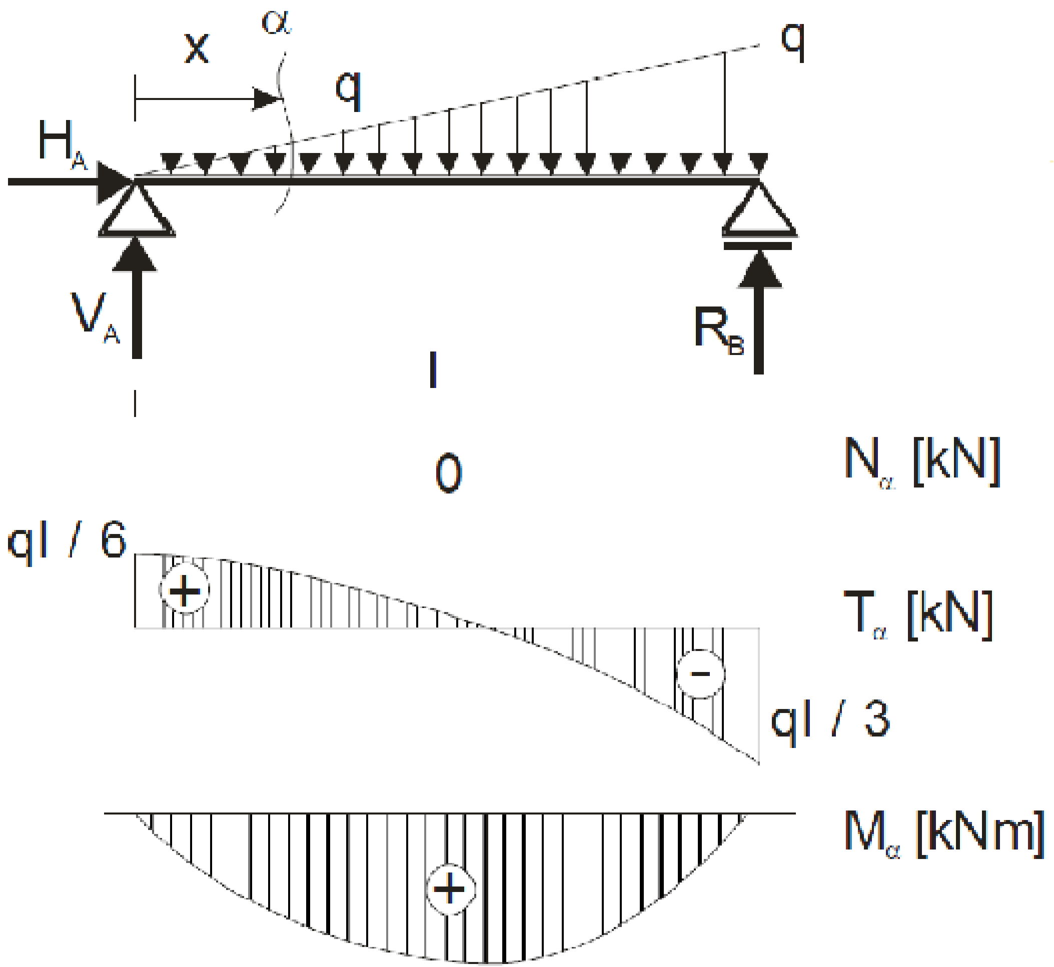
$$M_\alpha = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \cdot \left(\frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$x = 0 \quad M_\alpha = 0$$

$$x = \frac{l}{2} \quad M_\alpha = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$x = l \quad M_\alpha = 0$$

Obciążenie ciągłe liniowo zmienne



$$V_A = \frac{ql}{6} \quad R_B = \frac{ql}{3} \quad H_A = 0$$

$$N_\alpha = 0$$

$$q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$$

$$T_\alpha = V_A - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}$$

$$x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{6}$$

$$x = l \quad T_\alpha = \frac{ql}{3}$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{qx}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{6}\frac{q}{l} x^3$$

$$x = 0 \quad M_\alpha = 0$$

$$x = l \quad M_\alpha = 0$$

Warunki różniczkowe

Zależności różniczkowe między M_α , T_α i $p_z(x)$

$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}M_\alpha}{\mathrm{d}x} = T_\alpha$$