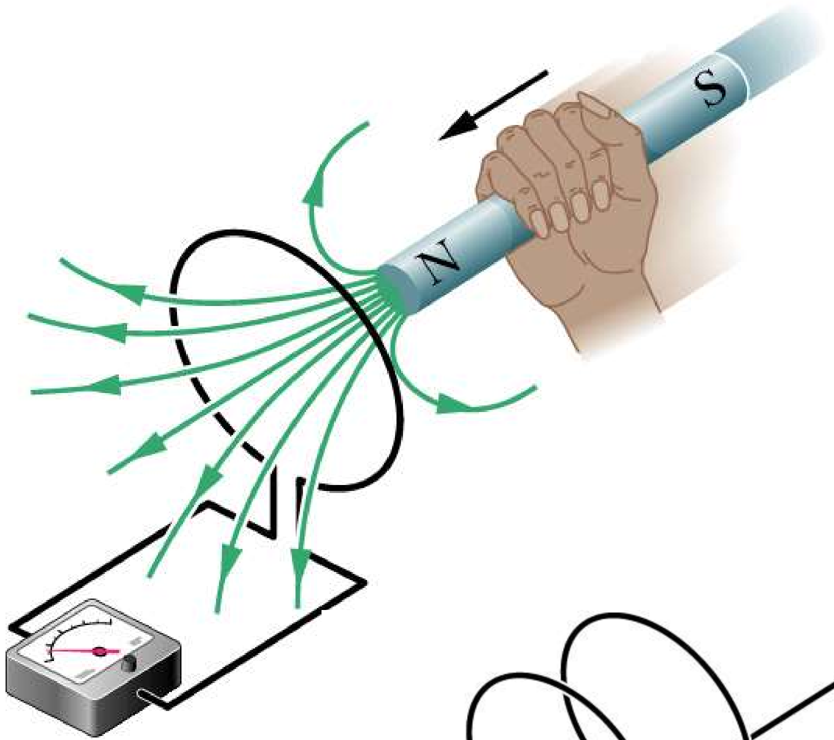
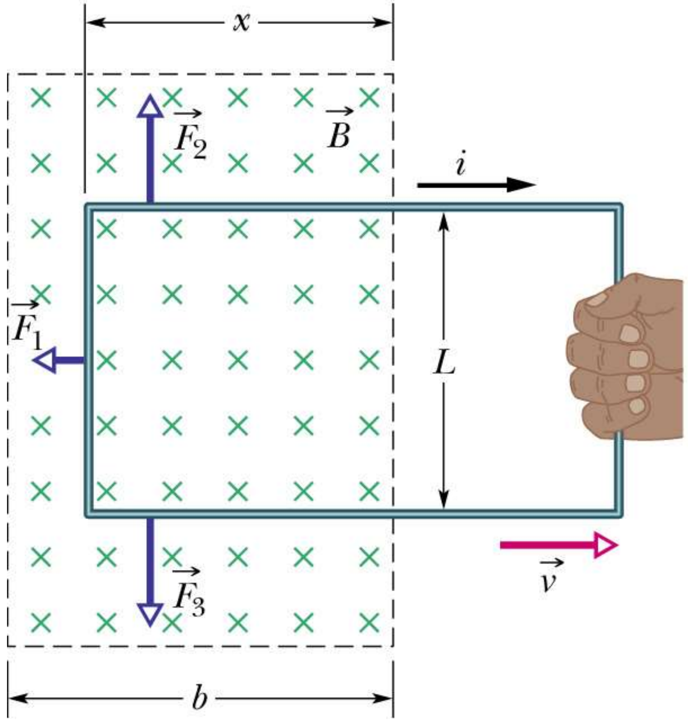
RÓWNANIA MAXWELLA

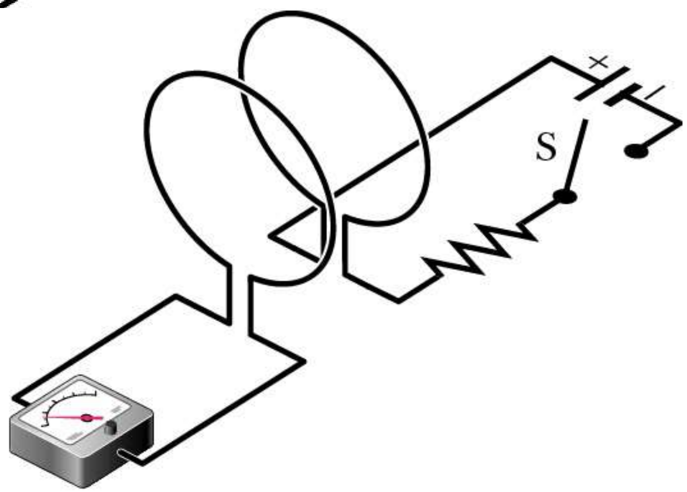
Czy pole magnetyczne może stać się źródłem pola elektrycznego?

Czy pole elektryczne może stać się źródłem pola magnetycznego?

Doświadczenia







PRAWO FARADAY'A

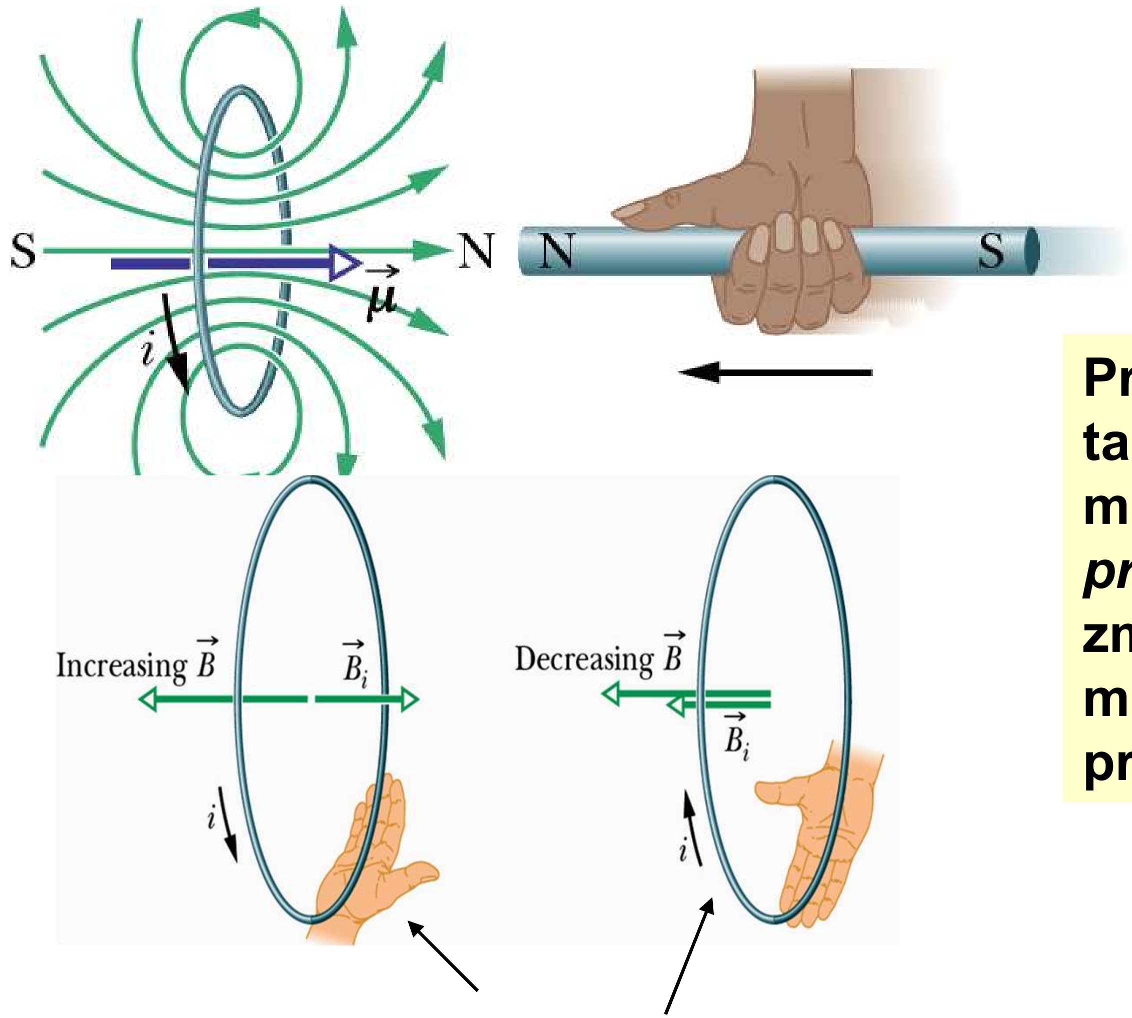
Zmienny w czasie strumień indukcji pola magnetycznego Φ_B indukuje siłę elektromotoryczną ε

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Im większa szybkość zmian strumienia pola magnetycznego tym większa siła elektromotoryczna.

Znak „-" pokazuje, że powstały efekt przeciwdziała zmianom, które były jego przyczyną (reguła przekory, reguła Lenza).

REGUŁA LENZA



Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone *przez ten prąd* przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje

B_i związane z indukowanym prądem i

Przypomnienie:

Strumień indukcji pola magnetycznego jest zdefiniowany jako całka po powierzchni S:

$$\Phi_B = \int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}}$$

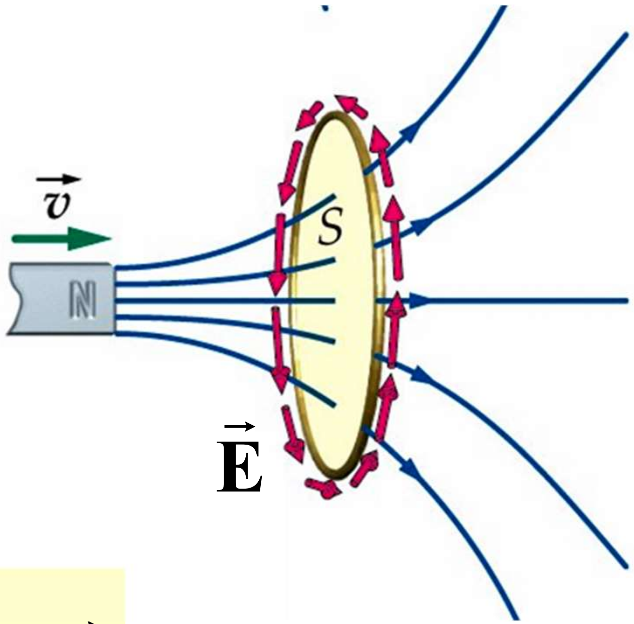
a zatem istnieją trzy zasadnicze sposoby uzyskania indukowanej siły elektromotorycznej:

- zmiana indukcji pola B,
- zmiana powierzchni S,
- zmiana kąta pomiędzy B i wektorem powierzchni (obrót ramki w polu magnetycznym – prądnica)

Przypomnienie: siła elektromotoryczna jest pracą przypadającą na jednostkowy ładunek wykonaną przez pole elektryczne (pole magnetyczne nie wykonuje pracy)

$$\varepsilon = \oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}}$$

Indukowana siła elektromotoryczna jest związana z pracą indukowanego pola elektrycznego a zatem



$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

oraz

$$\boxed{\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}}}$$

Taka postać prawa Faraday'a stanowi kolejne z równań Maxwella w postaci całkowej

Własności indukowanej siły elektromotorycznej

- Indukowana SEM nie jest zlokalizowana, (pomiędzy biegunami źródła napięcia), lecz jest rozłożona w całym obwodzie.
- Można ją przedstawić jako całkę krzywoliniową po zamkniętym konturze z indukowanego pola elektrycznego.
- Całka ta jest różna od zera, więc indukowane pole elektryczne nie jest zachowawcze.
- Pole to nie ma potencjału ani powierzchni ekwipotencjalnych.
- Jeżeli w obszarze indukowanego pola elektrycznego umieścimy przewodnik i obwód zamkniemy, to zaobserwujemy indukowany prąd elektryczny. W przeciwnym przypadku można mówić tylko o sile elektromotorycznej.
- Dyssypacja energii zachodzi, gdy obecne są ładunki.

Postać różniczkowa prawa Faraday'a

z twierdzenia Stokes'a

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = \int_S (\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{E}}) \circ d\vec{\mathbf{A}}$$

z prawa Faraday'a w postaci całkowej

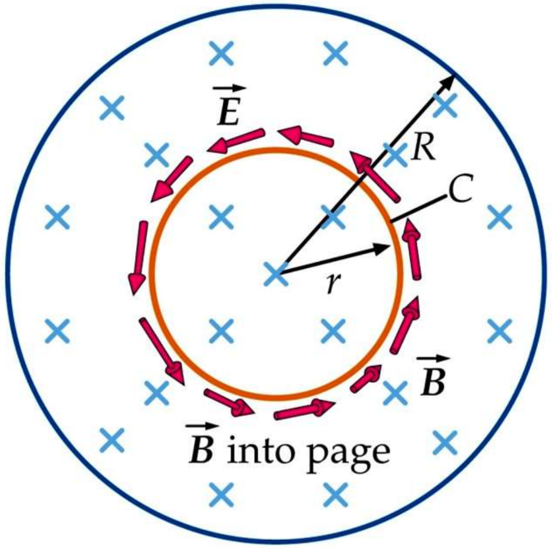
$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

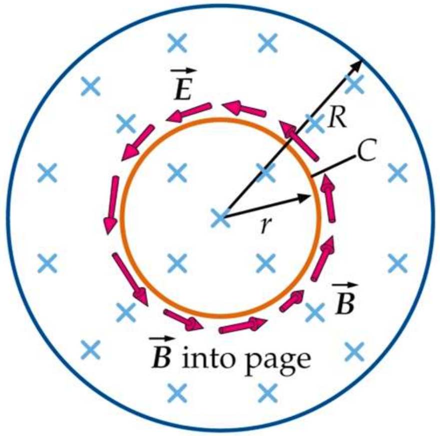
Zmienne w czasie pole magnetyczne indukuje pole elektryczne (wirowe, zmienne w czasie, nie zachowawcze)

Przykład 2.1

W pewnym kołowym obszarze o promieniu R istnieje jednorodne pole magnetyczne, którego wektor indukcji jest prostopadły do płaszczyzny rysunku. Wartość indukcji pola magnetycznego zmienia się w czasie z szybkością dB/dt. Jaka jest wartość i kierunek wektora pola elektrycznego indukowanego na płaszczyźnie tego obszaru kołowego w odległości r od jego środka? Rozważyć przypadki $r<R$ i $r>R$.



Rozwiązanie:



z prawa Faraday'a

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}}$$

obliczamy krążenie pola elektrycznego

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = E\, 2\pi r$$

dla $r > R$ **strumień pola magnetycznego**

$$\int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = B\pi R^2$$

a zatem

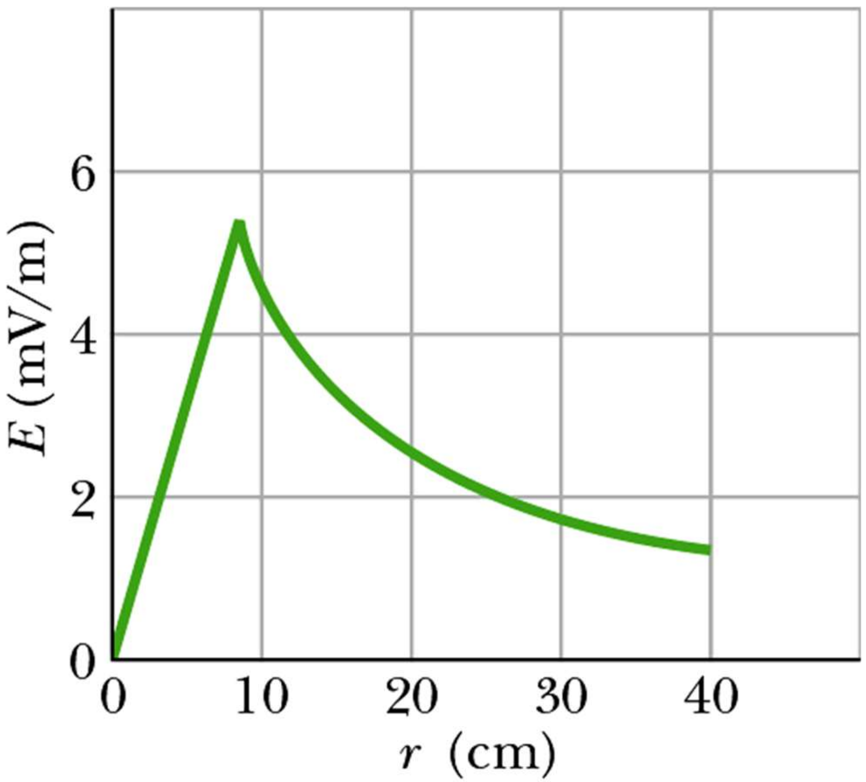
$$E\, 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

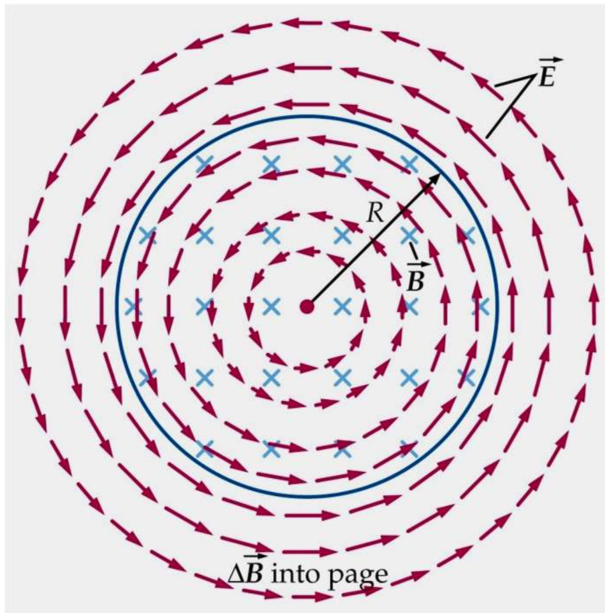
$$\boxed{E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}}$$

dla $r < R$ **strumień pola magnetycznego** $\int_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = B\,\pi\,r^2$

a zatem $E\,2\pi\,r = -\pi\,r^2 \dfrac{dB}{dt}$

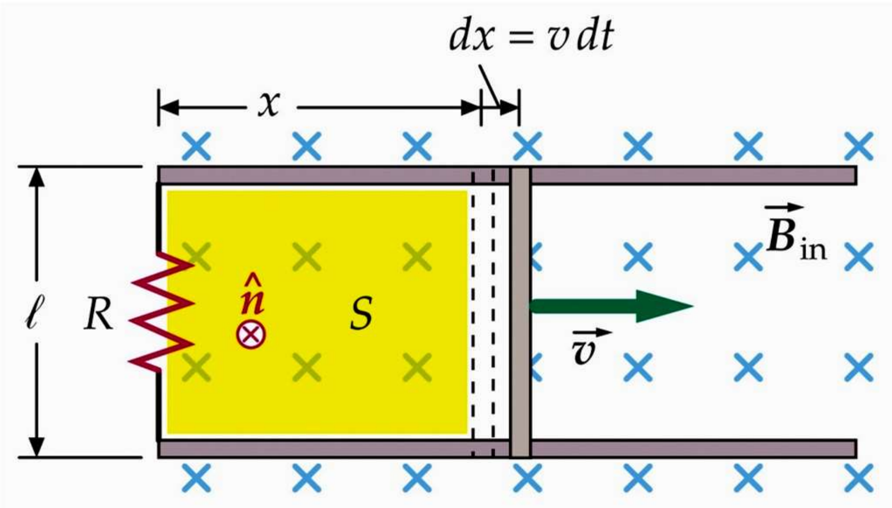
$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$





Zadanie domowe 2.1

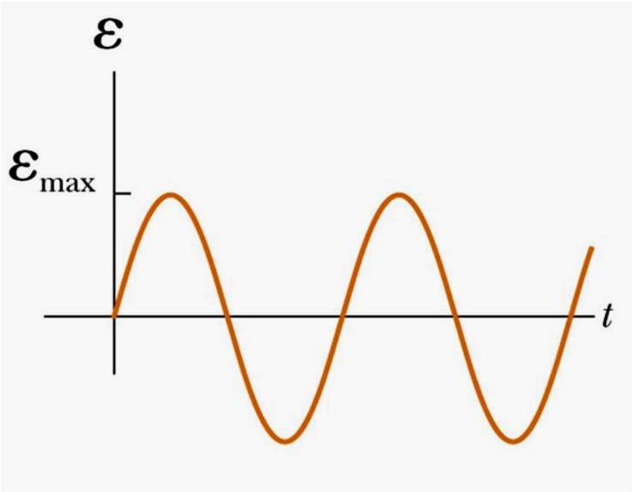
- Znaleźć wartość siły elektromotorycznej indukowanej w obwodzie przedstawionym na rysunku. Pręt przesuwany jest w jednorodnym, stałym w czasie polu magnetycznym ze stałą prędkością v. Jaka jest wartość prądu w obwodzie? Jaka moc wydziela się na rezystancji R?

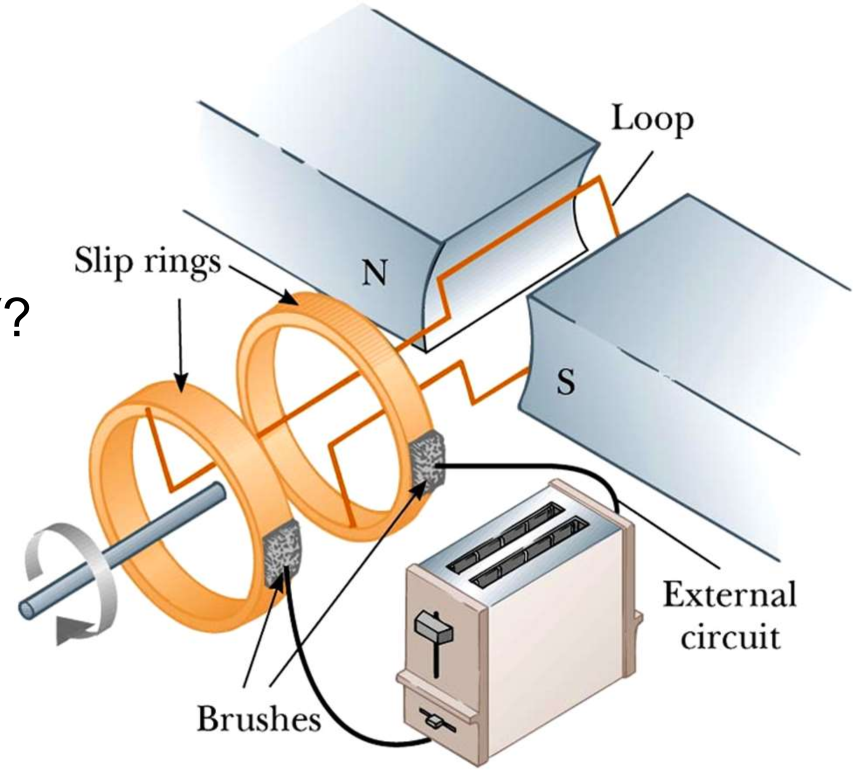


Zadanie domowe 2.2

- Generator prądu AC (prądnica)

Cewka kołowa o promieniu R=20 cm zawiera N=20 zwojów. Jak szybko cewka musi obracać się w polu magnetycznym o indukcji B=0.2 Wb/m^2 aby maksymalna (szczytowa) wartość siły elektromotorycznej wynosiła 160 V?





SAMOINDUKCJA

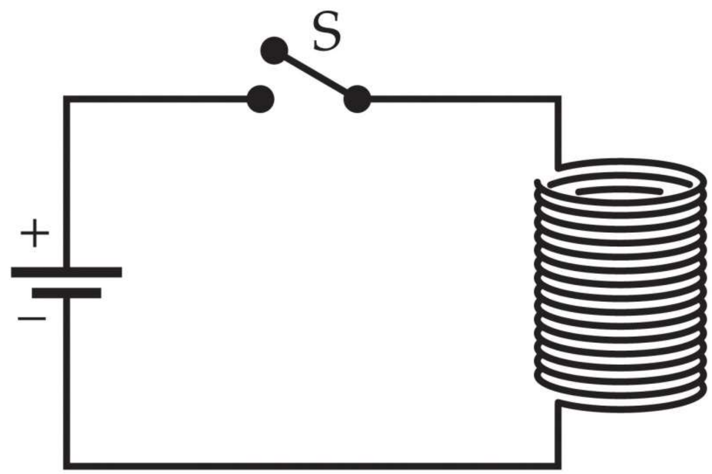
Jeżeli prąd w obwodzie zmienia się w czasie, strumień pola magnetycznego w cewce też jest zmienny i indukowana siła elektromotoryczna przeciwdziała zmianom prądu.

wewnątrz idealnego solenoidu o N zwojach i długości l

$$B = \mu_o \frac{N}{l} i$$

strumień pola magnetycznego przez powierzchnię NS (S-powierzchnia jednego zwoju)

$$\Phi_B = \mu_o \frac{N^2}{l} iS$$



$$\Phi_B = Li$$

indukcyjność

Jednostka: 1H (henr) = 1Wb/A

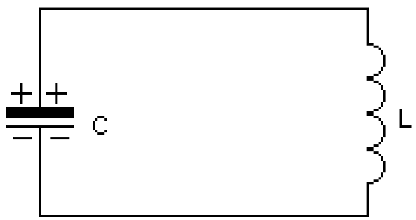
Siła elektromotoryczna samoindukcji

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_o \frac{N^2}{l} S \frac{di}{dt} = -\mu_o n^2 l S \frac{di}{dt}$$

n- liczba zwojów na jednostkę długości, l – długość solenoidu, S – pole powierzchni przekroju

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}}$$

W obwodzie LC można zastosować prawo Kirchhoffa:



$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

INDUKCYJNOŚĆ

Definicja: $$L = -\frac{\varepsilon_L}{\frac{di}{dt}}$$

Przypomnienie: pojemność C $$C = \frac{Q}{U}$$

dla idealnego solenoidu

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} S$$

dla kondensatora płaskiego

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

Indukcyjność podobnie jak pojemność zależy wyłącznie od parametrów geometrycznych cewki. Można ją zwiększyć przez wprowadzenie rdzenia ferromagnetycznego o przenikalności magnetycznej μ.

$$L = \mu_o \mu \frac{N^2}{l} S = \mu_o \mu\, n^2 l S$$

Zadanie domowe 2.3

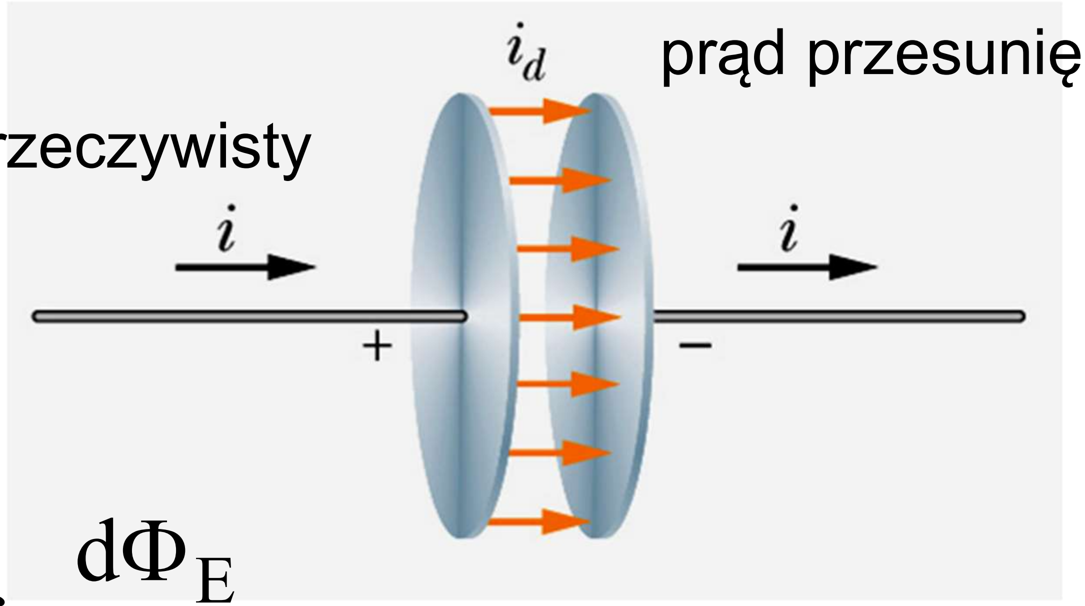
- Opracować temat: energia zmagazynowana w polu magnetycznym i gęstość energii pola magnetycznego (HRW, t.3, 31.10,31.11).
- Przemyśleć analogie do pola elektrycznego w kondensatorze.

PRAWO AMPERE'A-MAXWELLA

- Maxwell rozszerzył prawo Ampere'a
- Źródłem pola magnetycznego jest nie tylko rzeczywisty prąd w obwodzie lecz również zmienny w czasie strumień pola elektrycznego

$$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o \Big(i + \underbrace{\varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{prąd przesunięcia } i_d}\Big)$$

- Wprowadzenie pojęcia prądu przesunięcia pozwala zachować ciągłość prądu w obwodzie nawet gdy obecny jest kondensator



$$i_d = \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}$$

RÓWNANIA MAXWELLA

Prawo:	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Gaussa dla elektrostatyki	$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$
Gaussa dla magnetyzmu	$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{A}} = 0$	$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$
Ampere'a-Maxwella	$\oint_C \vec{\mathbf{B}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = \mu_o (i + \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt})$	$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} = \mu_o (\vec{\mathbf{j}} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t})$
Faraday'a	$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \circ d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$

FALA ELEKTROMAGNETYCZNA
w próżni

- Zakładamy, że j=0, ρ=0
- Równania Maxwella mają postać:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0 \Longrightarrow \nabla \circ \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0 \Longrightarrow \nabla \circ \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Wyprowadzenie równania fali EB

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathbf{B}}$$

ale $\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ **czyli:**

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathbf{E}}) = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Korzystając z tożsamości: $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \underbrace{(\nabla \circ \vec{E})}_{0}\nabla - \nabla^2 \vec{E} \qquad (2)$$

Łącząc (1) i (2) otrzymujemy:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

Ogólne równanie fali:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

PRĘDKOŚĆ ROZCHODZENIA SIĘ FALI EB W PRÓŻNI

Podobnie dla pola magnetycznego $$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}$$

razem z $$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$ stanowią równania fali elektromagnetycznej

Zaburzeniem ψ jest wektor natężenia pola elektrycznego **E** lub indukcji pola magnetycznego **B** a prędkość fali v jest określona wyłącznie przez stałe uniwersalne:

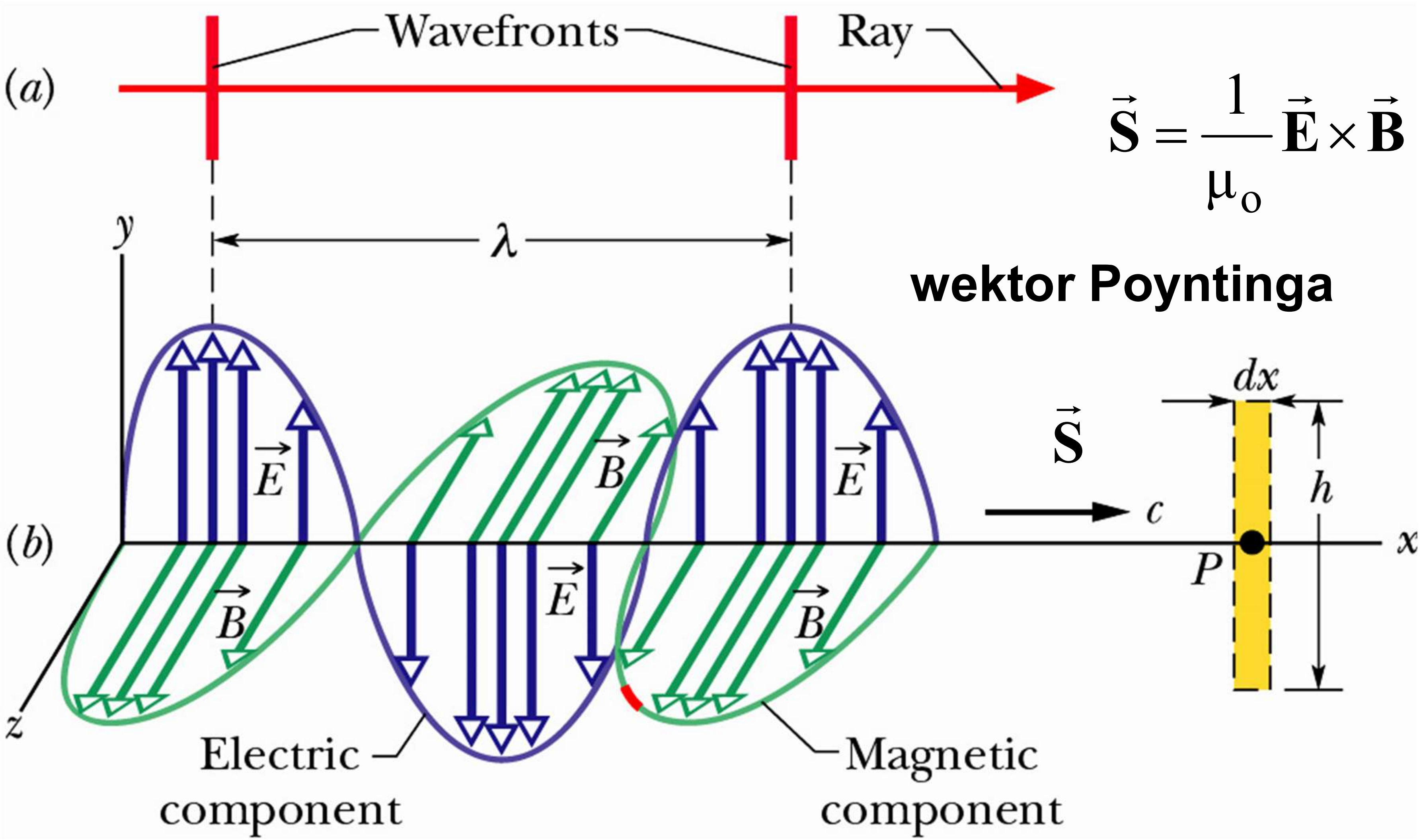
$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = c}$$

prędkość fali EB (prędkość światła) w próżni można obliczyć teoretycznie $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s

Zadanie domowe 2.4

- Opracować temat: „Metody eksperymentalne wyznaczania prędkości światła”

Propagacja fali elektromagnetycznej



$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_o}\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}$$

wektor Poyntinga

Podsumowanie

- Zmienne w czasie pole magnetyczne jest źródłem pola elektrycznego (prawo Faraday'a)
- Indukowane pole elektryczne nie jest zachowawcze, jest polem wirowym o niezerowej rotacji
- Zmienne w czasie pole elektryczne jest źródłem pola magnetycznego (poprawka Maxwella do prawa Ampère'a)
- Równania Maxwella w próżni mają charakter symetryczny dla obu pól
- Równania Maxwella przewidują istnienie fali elektromagnetycznej, która rozchodzi się w próżni z prędkością c