METODY NUMERYCZNE

Wykład 2.

Analiza błędów w metodach numerycznych

Po co wprowadzamy liczby w formacie zmiennoprzecinkowym (floating point)?

- Przykład 1. W jaki sposób można zapisać liczbę 256.78 na 5-ciu miejscach?

2	5	6	.	7	8

Jak można zapisać najmniejszą liczbę w tym formacie?

0	0	0	.	0	0

Jak można zapisać największą liczbę w tym formacie?

9	9	9	.	9	9

Po co wprowadzamy liczby w formacie zmiennoprzecinkowym (floating point)?

- Przykład 2. W jaki sposób można zapisać liczbę 256.786 na 5-ciu miejscach?

zaokrąglenie (rounded off)

2	5	6	.	7	9

urwanie (chopped)

2	5	6	.	7	8

Wniosek: Błąd jest mniejszy niż 0.01

Jaki błąd popełniamy?

Błąd bezwzględny $|x - x_o|$

wielkość dokładna lub rzeczywista x_o

Błąd względny $\dfrac{|x - x_o|}{x_o}$

Obliczenia:

$$\varepsilon_t = \frac{|x - x_o|}{x_o} \times 100\% = \frac{|256.79 - 256.786|}{256.786} \times 100\% = 0.001558\%$$

Jaki błąd popełniamy?

Względne błędy wielkości małych są duże.

Porównajmy:

$$\varepsilon_t = \frac{|x - x_o|}{x_o} \times 100\% = \frac{|256.79 - 256.786|}{256.786} \times 100\% = 0.001558\%$$

$$\varepsilon_t = \frac{|x - x_o|}{x_o} \times 100\% = \frac{|3.55 - 3.546|}{3.546} \times 100\% = 0.11280\%$$

Błędy bezwzględne są jednakowe:

$$|x - x_o| = |256.786 - 256.79| = |3.546 - 3.55| = 0.004$$

Jak utrzymać błędy względne na podobnym poziomie?

Można przedstawić liczbę w postaci:

$$znak \times mantysa \times 10^{wykł}$$

lub

$$znak \times mantysa \times 2^{wykł}$$

czyli

$$256.78 \text{ zapisujemy jako } +2.5678 \times 10^{2}$$
$$0.003678 \text{ zapisujemy jako} +3.678 \times 10^{-3}$$
$$-256.78 \text{ zapisujemy jako } -2.5678 \times 10^{2}$$

Co zyskujemy stosując zapis zmiennoprzecinkowy?

Zwiększa się zakres liczb, które możemy zapisać

Jeżeli użyjemy tylko 5 miejsc do zapisu liczby (dodatniej o dodatnim wykładniku) to najmniejsza liczba zapisana to 1 a największa $9.999 \cdot 10^9$.

$$\underbrace{\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}}_{\text{mantysa}}\underbrace{\boxed{9}}_{\text{wykładnik}}$$

Zakres możliwych do zapisania liczb zwiększył się od 999.99 do $9.999 \cdot 10^9$.

Co tracimy stosując zapis zmiennoprzecinkowy?

Dokładność (precyzję).

Dlaczego?

Liczba 256.78 będzie przedstawiona jako $2.5678 \cdot 10^2$ i na pięciu miejscach:

$$\underbrace{\boxed{2}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{8}}_{\text{mantysa}}\underbrace{\boxed{2}}_{\text{wykładnik}}$$

Wystąpi błąd zaokrąglenia.

Przykład do samodzielnego rozwiązania

1. Proszę przedstawić liczbę 576329.78 na pięciu miejscach w podobny sposób jak w poprzednim przykładzie:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{mantysa}}\underbrace{\boxed{}}_{\text{wykładnik}}$$

2. Proszę oszacować błąd bezwzględny i względny zaokrąglenia

3. Porównać z przykładem poprzednim (256.78) i wyciągnąć wnioski

Rozwiązanie przykładu do samodzielnego rozwiązania

1. Liczba 576329.78 zapisana na pięciu miejscach:

$$\underbrace{\boxed{5}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{3}}_{\text{mantysa}}\underbrace{\boxed{5}}_{\text{wykładnik}}$$

2. Błąd bezwzględny przybliżenia wynosi 29.78 a względny 0.0051672%

3. Dla liczby 256.78 te błędy wynoszą odpowiednio: 0.02 (mniejszy) i 0.0077888% (porównywalny)

Arytmetyka zmiennoprzecinkowa- system dziesiętny

Postać liczby

$$\sigma \times m \times 10^{e}$$

wykładnik będący liczbą całkowitą

znak liczby (-1 lub +1)

mantysa $(1)_{10} \le m < (10)_{10}$

Przykład

$$-2.5678 \times 10^{2}$$

$$\sigma = -1$$
$$m = 2.5678$$
$$e = 2$$

Arytmetyka zmiennoprzecinkowa- system dwójkowy

Postać liczby

$$\sigma \times m \times 2^{e}$$

wykładnik będący liczbą całkowitą

znak liczby (0 dla dodatniej lub 1 dla ujemnej liczby)

mantysa $(1)_{2} \le m < (2)_{2}$

Przykład

$$(1.1011011)_2 \times 2^{(101)_2}$$

1 nie jest zapisywane

$$\sigma = 0$$
$$m = 1011011$$
$$e = 101$$

Przykład do samodzielnego rozwiązania

Mamy słowo 9-bitowe
- pierwszy bit odpowiada znakowi liczby,
- drugi bit – znakowi wykładnika,
- następne cztery bity kodują mantysę,
- ostatnie trzy bity zapisują wykładnik

znak liczby	znak wykładnika	mantysa				wykładnik		
0	0	1	0	1	1	1	0	1

Znajdź liczbę (w postaci dziesiętnej), która jest przedstawiona w podany sposób.

Odpowiedź

$$(54.75)_{10} = (110110.11)_2 = (1.1011011)_2 \times 2^5$$
$$\cong (1.1011)_2 \times (101)_2$$

0	0	1	0	1	1	1	0	1

nie jest zapisywane

$$(54)_{10}$$

Co to jest ε maszyny cyfrowej?

Dla każdej maszyny cyfrowej definiuje się parametr epsilon ε określający dokładność obliczeń:

$$\varepsilon = N^{-t}$$

gdzie: N=2 (w zapisie dwójkowym), N=10 (w zapisie dziesiętnym), t jest liczbą bitów w mantysie liczby

ε jest tym mniejsze im więcej bitów przeznaczono na reprezentowanie mantysy M

Epsilon ε można traktować jako parametr charakteryzujący dokładność obliczeniową maszyny (im mniejsze ε tym większa dokładność).

Podwójna precyzja (Fortran) $\varepsilon_{DP} = \varepsilon^2$

Co to jest ε maszyny cyfrowej?

Epsilon ε jest to najmniejsza liczba, która po dodaniu do 1.000 produkuje liczbę, którą można przedstawić jako różną od 1.000.

Przykład: słowo dziesięciobitowe

$$x = M \times N^{w}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$= (1)_{10}$

znak liczby, znak wykładnika, wykładnik, mantysa

następna liczba

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$= (1.0001)_2 = (1.0625)_{10}$

$$\in_{mach} = 1.0625 - 1 = 2^{-4}$$

Pojedyncza precyzja w formacie IEEE-754 (Institute of Electrical and Electronics Engineers)

32 bity dla pojedynczej precyzji

0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

znak (s), wykładnik (e'), mantysa (m)

$$Liczba = (-1)^{s} \times (1 \bullet m)_2 \times 2^{e'-127}$$

Przykład

1 | 1 0 1 0 0 0 1 0 | 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Sign (s), Biased Exponent (e'), Mantissa (m)

$$\begin{aligned}
\text{Value} &= (-1)^{s} \times (1.m)_2 \times 2^{e'-127} \\
&= (-1)^{1} \times (1.10100000)_2 \times 2^{(10100010)_2 - 127} \\
&= (-1) \times (1.625) \times 2^{162-127} \\
&= (-1) \times (1.625) \times 2^{35} = -5.5834 \times 10^{10}
\end{aligned}$$

Wykładnik dla 32-bitowego standardu IEEE-754

8 bitów wykładnika oznacza $0 \le e' \le 255$

Ustalone przesunięcie wykładnika wynosi 127 a zatem $-127 \le e \le 128$

W istocie $1 \le e' \le 254$

Liczby $e' = 0$ i $e' = 255$ są zarezerwowane dla przypadków specjalnych

Zakres wykładnika $-126 \le e \le 127$

Reprezentacja liczb specjalnych

$e' = 0$ — same zera

$e' = 255$ — same jedynki

s	e'	m	Reprezentuje
0	same zera	same zera	0
1	same zera	same zera	-0
0	same jedynki	same zera	∞
1	same jedynki	same zera	$-\infty$
0 lub 1	same jedynki	różne od zera	NaN

Format IEEE-754

Największa liczba

$$(1.1........1)_2 \times 2^{127} = 3.40 \times 10^{38}$$

Najmniejsza liczba

$$(1.00......0)_2 \times 2^{-126} = 2.18 \times 10^{-38}$$

Epsilon maszyny cyfrowej

$$\varepsilon_{mach} = 2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$$

Analiza błędów

Jeżeli nie znamy wielkości dokładnej x_o możemy obliczać błąd bezwzględny przybliżenia (ang. approximate error) jako różnicę wartości uzyskanych w kolejnych przybliżeniach :

$$x_n - x_{n-1}$$

Błąd względny ε_a :

$$\varepsilon_a = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}$$

Przykład

Dla $f(x) = 7e^{0.5x}$ w $x = 2$ znajdź

a) $f'(2)$ dla $h = 0.3$

b) $f'(2)$ dla $h = 0.15$

c) błąd przybliżenia

Rozwiązanie

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a) $h = 0.3$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0{,}3) - f(2)}{0{,}3} = \frac{7e^{0{,}5(2{,}3)} - 7e^{0{,}5(2)}}{0{,}3} = 10{,}265$$

Przykład (cd)

b) $h = 0.15$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0{,}15) - f(2)}{0{,}15} = \frac{7e^{0{,}5(2{,}15)} - 7e^{0{,}5(2)}}{0{,}15} = 9{,}880$$

c) $\varepsilon_a = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}$

$$\varepsilon_a = \frac{9{,}880 - 10{,}265}{9{,}8800} \approx -0{,}0389$$

Błąd procentowy 3,89%

Błąd względny jako kryterium zakończenia procedury iteracyjnej

Jeżeli błąd względny jest mniejszy lub równy od pewnej określonej wcześniej liczby to dalsze iteracje nie są konieczne

$$|\varepsilon_a| \le \varepsilon_s$$

Jeżeli wymagamy przynajmniej m cyfr znaczących w wyniku to

$$|\varepsilon_a| \le 0.5 \times 10^{2-m}$$

Podsumowanie przykładu

$$|\varepsilon_a| \le 0.5 \times 10^{2-m}$$

h	$f'(2)$	$\lvert\varepsilon_a\rvert$	m
0.3	10.265	N/A	0
0.15	9.8800	0.03894	1
0.10	9.7559	0.01271	1
0.01	9.5378	0.02286	1
0.001	9.5164	0.00225	2

Wartość dokładna 9.514

Źródła błędów w obliczeniach numerycznych

1. Błędy wejściowe (błędy danych wejściowych)
2. Błędy obcięcia (ang. truncation error)
3. Błędy zaokrągleń (ang. round off error)

Błędy wejściowe występują wówczas gdy dane wejściowe wprowadzone do pamięci komputera odbiegają od dokładnych wartości tych danych.

Błędy obcięcia są to błędy wynikające z procedur numerycznych przy zmniejszaniu liczby działań.

Błędy zaokrągleń są to błędy, których na ogół nie da się uniknąć. Powstają w trakcie obliczeń i można je zmniejszać ustalając umiejętnie sposób i kolejność wykonywania zadań.

Błędy wejściowe

Źródła błędów wejściowych:

- dane wejściowe są wynikiem pomiarów wielkości fizycznych
- skończona długość słów binarnych i konieczność wstępnego zaokrąglania
- wstępne zaokrąglanie liczb niewymiernych

Przybliżanie liczb, których nie można wyrazić dokładnie dokonuje się poprzez:

- urywanie (ang. chopping)
- zaokrąglanie (ang. rounding)

Przykład:

$$\pi \approx 3{,}14159265359$$

$\pi \approx 3{,}1415$

urywanie

$\pi \approx 3{,}1416$

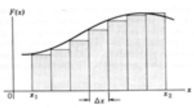
zaokrąglanie

Zaokrąglanie prowadzi do mniejszego błędu niż urywanie.

Błąd obcięcia

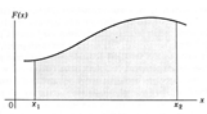
Spowodowany jest użyciem przybliżonej formuły zamiast pełnej operacji matematycznej:

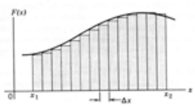
- przy obliczaniu sum nieskończonych szeregów
- przy obliczaniu wielkości będących granicami (całka, pochodna)



$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

praca





Szereg Taylora

Jeżeli funkcja jest ciągła i wszystkie pochodne f', f'',...fⁿ istnieją w przedziale [x, x+h] to wartość funkcji w punkcie x+h można obliczyć jako:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots$$

Szereg Maclaurina jest to rozwinięcie wokół x=0

$$f(0+h)=f(0)+f'(0)h+f''(0)\frac{h^2}{2!}+f'''(0)\frac{h^3}{3!}+\cdots+$$

Przykłady

Typowe rozwinięcia w szereg wokół zera

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Błąd obcięcia w szeregu Taylora

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_n(x)$$

reszta

$$R_n(x)=\frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$x<c<x+h$$

Przykład

Rozwinięcie w szereg e^x wokół x=0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Im większa ilość wyrazów jest uwzględniana w rozwinięciu, tym błąd obcięcia jest mniejszy i możemy znaleźć tym dokładniejszą wartość wyrażenia

Pytanie: Ile należy uwzględnić wyrazów aby otrzymać przybliżoną wartość liczby e z błędem mniejszym niż 10^{-6}?

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \cdots$$

$$\approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

Rozwiązanie

$x = 0, h = 1, f(x) = e^x$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$R_n(0) = \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{(1)^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

ale $x < c < x + h$

$0 < c < 0 + 1$

$0 < c < 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} < |R_n(0)| < \frac{e}{(n+1)!}$$

Rozwiązanie

$$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-6}$$ założony poziom błędu

$$(n+1)! > 10^6 e$$

$$(n+1)! > 10^6 \times 3$$

$$n \geq 9$$

Co najmniej 9 wyrazów musimy zastosować aby otrzymać wartość błędu na poziomie 10^{-6}

Przykład tragicznego błędu zaokrąglenia

25 lutego 1991 w Dhahran, Arabia Saudyjska, zginęło 28 amerykańskich żołnierzy w wyniku ataku irackiej rakiety Scud. System obrony Patriot nie wykrył zagrożenia. Dlaczego?

System oblicza powierzchnię, którą powinien skanować na podstawie prędkości obiektu i czasu ostatniej detekcji. Zegar wewnętrzny był ustawiony na pomiar co 1/10 sekundy. Długość słowa 24 bity. Z powodu zaokrągleń błąd bezwzględny wyniósł $9.5\ 10^{-8}$ s a po 100 godzinach:

$$9.5 \cdot 10^{-8} \times 10 \times 60 \times 60 \times 100 = 0.34 \text{ sec}$$

Przesunięcie obliczone na tej podstawie 687 m. Obiekt jest uznany poza zakresem gdy przesunięcie wynosi 137 m

Działania arytmetyczne

1. Dodawanie i odejmowanie

Aby dodać lub odjąć dwie znormalizowane liczby w zapisie zmiennoprzecinkowym, wykładniki w powinny być zrównane poprzez odpowiednie przesunięcie mantysy.

Przykład: Dodać $0,4546 \cdot 10^5$ do $0,5433 \cdot 10^7$

przesuwamy

$$0,0045 \cdot 10^7 + 0,5433 \cdot 10^7 = 0,5478 \cdot 10^7$$

Wniosek: Tracimy pewne cyfry znaczące

Działania arytmetyczne

2. Mnożenie

Przykład: Pomnożyć $0,5543 \cdot 10^{12}$ przez $0,4111 \cdot 10^{-15}$

Mnożymy mantysy i wykładniki w dodajemy.

$$0,5543 \cdot 10^{12} \cdot 0,4111 \cdot 10^{-15} = 0,2278273 \cdot 10^{-3} = 0,2278 \cdot 10^{-3}$$

3. Dzielenie

Przykład: Podzielić $0,1000 \cdot 10^5$ przez $0,9999 \cdot 10^3$

$$0,1000 \cdot 10^5 / 0,9999 \cdot 10^3 = 0,1000 \cdot 10^2$$

Za każdym razem tracimy pewne cyfry znaczące co jest źródłem błędu

Kolejność działań

(a+b)-c≠(a-c)+b brak przemienności, łączności

a(b-c) ≠(ab-ac) brak rozdzielności mnożenia względem dodawania

Przykład: a= $0{,}5665\cdot10^{1}$, b=$0{,}5556\cdot10^{-1}$, c=$0{,}5644\cdot10^{1}$

$(a+b)=0{,}5665\cdot10^{1}+0{,}5556\cdot10^{-1}$

$=0{,}5665\cdot10^{1}+0{,}0055\cdot10^{1}=0{,}5720\cdot10^{1}$

$(a+b)-c=0{,}5720\cdot10^{1}-0{,}5644\cdot10^{1}=0{,}7600\cdot10^{-1}$

$(a-c)=0{,}5665\cdot10^{1}-0{,}5644\cdot10^{1}=0{,}0021\cdot10^{1}=0{,}2100\cdot10^{-1}$

$(a-c)+b=0{,}2100\cdot10^{-1}+0{,}5556\cdot10^{-1}=0{,}7656\cdot10^{-1}$

Wnioski z dotychczasowych rozważań

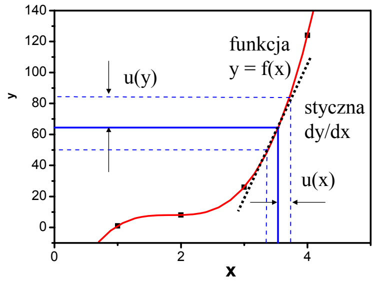
- W wielu przypadkach można uniknąć błędów wejściowych i błędów obcięcia.
- W trakcie obliczeń pojawiają się nowe błędy (błędy zaokrągleń), których nie da się uniknąć.
- Błędy zaokrągleń można zmniejszyć ustalając umiejętnie sposób i kolejność wykonywania działań.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

1. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} 4^n$
   stanowi rozwinięcie Maclaurina funkcji:
   (A) cos(x); B) cos (2x); C) sin (x); D) sin (2x)

2. Liczba 1/10 jest zapisywana na 6 bitach w formacie stałoprzecinkowym (wszystkie bity są używane do zapisu części ułamkowej liczby. Różnica akumuluje się co 1/10 sekundy przez dobę. Jaka jest jej wartość?

Propagacja błędów



$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x)$$

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej $y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ gdy niepewności maksymalne Δx_1, Δx_2, … Δx_n są małe w porównaniu z wartościami zmiennych $x_1,x_2,$ … x_n niepewność maksymalną wielkości y wyliczamy z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\left|\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\left|\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\left|\Delta x_n\right|$$

Przykład

Oszacować błąd pomiaru gęstości ρ kuli o masie m i promieniu R

$$\rho(m,R) = \frac{m}{(4/3)\pi R^3}$$

błąd bezwzględny $$\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\left|\Delta m\right| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial R}\right|\left|\Delta R\right|$$

ale $$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{(4/3)\pi R^3} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial R} = \frac{-3}{(4/3)\pi R^4}$$

błąd względny $$\varepsilon_\rho = \varepsilon_m + 3\varepsilon_R$$

Błędy działań arytmetycznych

Błąd sumy

$$A = a \pm \Delta a \qquad B = b \pm \Delta b$$

błędy bezwzględne składników sumy

$$A + B = a + b \pm \Delta a \pm \Delta b = a + b \pm \Delta(a+b)$$

błąd bezwzględny sumy

Zatem błąd bezwzględny sumy (różnicy) jest równy sumie błędów składników.

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$

Błędy działań arytmetycznych

Błąd względny sumy $\varepsilon_{a+b} = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a+b}$

Błąd względny różnicy $\varepsilon_{a-b} = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$

Błąd względny różnicy może być duży nawet gdy błędy względne odjemnej i odjemnika są małe. Należy unikać odejmowania prawie równych liczb przybliżonych!

Zjawisko zwane **redukcją** cyfr znaczących

Szczególnie istotne przy obliczeniach ilorazów różnicowych przybliżających pochodne funkcji, pierwiastków równania kwadratowego przy dominującym współczynniku przy pierwszej potędze, itp.

Koncepcja zera

Tracimy dokładny sens liczby 0 jeśli dokonujemy obliczeń numerycznych

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

pierwiastkami są $-1 \pm \sqrt{3}$

w przybliżeniu
$0{,}7320 \cdot 10^0$
$-0.2732 \cdot 10^1$

Sprawdzić, że po podstawieniu rozwiązań przybliżonych nie otrzymujemy dokładnie liczby zero

Powinno się zatem unikać odejmowania bliskich sobie liczb i warunek w pętli nie powinien być ustawiany „do zera”,

if a-b<ε

Wnioski praktyczne

Przy obliczeniach numerycznych korzystne jest:

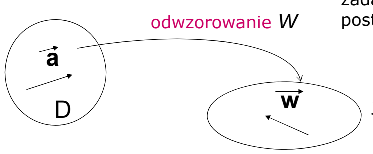
- ponowne rozwiązanie tego samego zagadnienia inną metodą lub taką samą metodą, ale z inną kolejnością operacji
- ponowne rozwiązanie zagadnienia przy nieznacznej zmianie danych wejściowych

Zadania i algorytmy numeryczne

- **Zadanie numeryczne** wymaga jasnego i niedwuznacznego opisu powiązania funkcjonalnego między *danymi wejściowymi* czyli „zmiennymi niezależnymi" zadania i *danymi wyjściowymi*, tj. szukanymi wynikami.
- Zadanie numeryczne jest problemem polegającym na wyznaczeniu wektora wyników $\vec{\mathbf{w}}$ na podstawie wektora danych $\vec{\mathbf{a}}$

zadanie dobrze postawione

$$\vec{\mathbf{w}} = W(\vec{\mathbf{a}})$$



jednoznaczne przyporządkowanie

Zadania i algorytmy numeryczne

- **Algorytm numeryczny** jest pełnym opisem poprawnie określonych *operacji* przekształcających wektor dopuszczalnych danych wejściowych (zbiór DN) na wektor danych wyjściowych.
- Algorytm jest poprawnie sformułowany gdy liczba niezbędnych działań będzie skończona

$$DN \cap D \neq \varnothing \qquad \overline{\mathbf{w}} = WN(\mathbf{a}, \varepsilon)$$

wektor wyniku zależy od dokładności obliczeniowej ε maszyny cyfrowej

Przykłady algorytmów

Dana jest liczba zespolona a=x+iy. Obliczyć 1/a²

Algorytm I:

1. $t = y/x$ (tangens fazy liczby a)
2. $|a|^2 = x^2 + y^2$ (kwadrat modułu liczby a)
3. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{|a|^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{|a|^2}\frac{-2t}{1+t^2}$

Zadanie jest dobrze postawione, jeżeli: $x^2 + y^2 \neq 0$

czyli: $D = R^2 - \{(0,0)\}$

Algorytm jest poprawnie sformułowany (11 niezbędnych działań)

Przykłady algorytmów

Nie dla każdej pary danych (x,y)≠0 można znaleźć rozwiązanie zadania stosując algorytm I.

1. Wystąpi nadmiar liczb zmiennopozycyjnych (dla x=0 ale także z powodu zaokrąglenia do zera)

2. Nadmiar może nastąpić może już w pierwszym kroku gdy $x=10^{-25}$ i $y=10^{25}$ z powodu dzielenia y/x

3. Dla x=0, istniejącego dla y≠0 rozwiązania nie można wyznaczyć stosując ten algorytm. Wzrost dokładności obliczeń nie zmieni tego faktu.

Algorytm I nie jest numerycznie stabilny

Przykłady algorytmów

Dana jest liczba zespolona a=x+iy. Obliczyć 1/a²

Algorytm II:

1. $r = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
2. $u = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$

Algorytm II jest poprawnie sformułowany (9 niezbędnych działań)

Algorytm II jest numerycznie stabilny co wynika z ciągłości wzorów dla $x^2 + y^2 \neq 0$

Schemat Hornera

Przykład **wzoru rekurencyjnego**

Aby obliczyć wartość wielomianu:

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x \ + a_n$$

w danym punkcie z, korzystamy ze schematu:

$$p_1 = z + a_1$$
$$p_2 = zp_1 + a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = zp_{n-1} + a_n$$
$$p(z) = p_n$$

co odpowiada obliczaniu wartości wyrażenia:

$$z\{z[z\ldots(z + a_1) + a_2] + \ldots + a_{n-1}\} + a_n$$

Schemat Hornera

Schemat Hornera umożliwia znaczne zmniejszenie liczby działań arytmetycznych.

W schemacie Hornera wykonujemy n-1 mnożeń i n dodawań.

Obliczając bezpośrednio:

$$\underbrace{zz\ldots z}_{\text{n razy}} + a_1\underbrace{z\ldots z}_{\text{n-1 razy}} + \ldots + a_{n-1}z \ + a_o$$

wykonujemy (n-1)(n+2)/2 mnożeń i n dodawań.

Oszacowanie wielkości błędów zaokrągleń jest identyczne dla obu metod

Schemat Hornera

Przykład: oblicz $p(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$

w schemacie Hornera $p(z) = ((a_0 z + a_1)z + a_2)z + a_3$

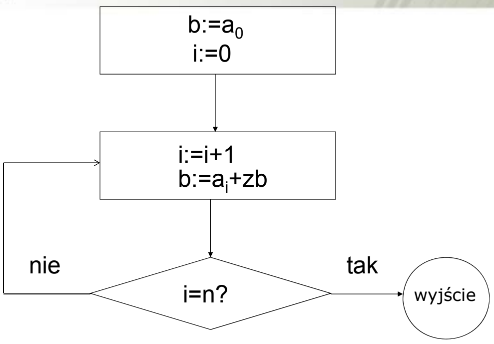
dla obliczeń ręcznych:

a_0	a_1	a_2	a_3	
	zb_0	zb_1	zb_2	
b_0	b_1	b_2	b_3	$p(z)=b_3$

Zadanie: Oblicz p(8) dla $p(x)=2x^3+x+7$

2	0	1	7	
	16	128	1032	
2	16	129	1039	p(8)=1039

Schemat blokowy



Uwarunkowanie zadania i stabilność algorytmów

Algorytm obliczeniowy jest numerycznie stabilny, jeżeli dla dowolnie wybranych danych

$$\boldsymbol{a_0} \in \boldsymbol{D}$$

istnieje taka dokładność obliczeń ε_0, że dla $\varepsilon<\varepsilon_0$ mamy

$$\boldsymbol{a_0} \in \boldsymbol{DN(\varepsilon)}$$

oraz $$\lim_{\varepsilon\to 0} WN(\boldsymbol{a}_0,\varepsilon) = W(\boldsymbol{a}_0)$$

Algorytm obliczeniowy jest numerycznie stabilny wtedy, gdy zwiększając dokładność obliczeń można wyznaczyć (z dowolną dokładnością) dowolne istniejące rozwiązanie zadania.

Uwarunkowanie zadania i stabilność algorytmów

Uwarunkowaniem zadania nazywamy cechę, która mówi jak bardzo wynik dla zaburzonego wektora danych różni się od wyniku dla dokładnego wektora danych czyli:

$$\boldsymbol{W(a+\delta a)} \qquad \boldsymbol{W(a)}$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania B(**a**) jest to liczba, dla której jest spełniony warunek:

$$\frac{\|\delta w\|}{\|w\|} \le B(a)\frac{\|\delta \boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

$$\delta w = WN(a,\varepsilon) - W(a)$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania

- Przyjmijmy względny błąd wielkości x

$$\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}$$

- Względny błąd wielkości f(x)

$$\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \approx \frac{f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

- Wskaźnik uwarunkowania:

$$\frac{\tilde{x}f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

Wskaźnik uwarunkowania zadania

- Przykład

$$f(x)=\sqrt{x}$$

- Wskaźnik uwarunkowania:

$$\frac{\tilde{x}f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}=\frac{x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

zadanie dobrze uwarunkowane

Wskaźnik uwarunkowania zadania

- Przykład

$$f(x)=\frac{10}{1-x^2}$$

- Wskaźnik uwarunkowania:

$$\frac{\tilde{x}f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}=\frac{2x^2}{\left|1-x^2\right|}$$

zadanie źle uwarunkowane w pobliżu x=1 i x=-1