METODY NUMERYCZNE

Wykład 1.

Wprowadzenie do metod numerycznych

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH,

Katedra Elektroniki, AGH

e-mail: zak@agh.edu.pl

http://home.agh.edu.pl/~zak

Wprowadzenie do metod numerycznych

Metody numeryczne są działem matematyki stosowanej zajmującym się opracowywaniem metod przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych, których albo nie można rozwiązać metodami dokładnymi albo metody dokładne posiadają tak dużą złożoność obliczeniową, że są praktycznie nieużyteczne

Metody numeryczne zajmują się konstruowaniem algorytmów, których obiektami, tj. danymi, wynikami pośrednimi i wynikami ostatecznymi są **liczby**

Cechy charakterystyczne metod numeryczne:

- obliczenia wykonywane są na liczbach przybliżonych
- rozwiązania zagadnień też są wyrażone liczbami przybliżonymi
- wielkość błędu w procesie obliczeń numerycznych jest zawsze kontrolowana

Literatura:

- Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne, Podręczniki Akademickie EIT, WNT Warszawa,1982, 2005
- L.O. Chua, P-M. Lin, Komputerowa analiza układów elektronicznych-algorytmy i metody obliczeniowe, WNT, Warszawa, 1981
- G.Dahlquist, A.Björck, Metody matematyczne, PWn Warszawa, 1983
- Autar Kaw, Luke Snyder

  http://numericalmethods.eng.usf.edu

Literatura dodatkowa:

- M.Wciślik, Wprowadzenie do systemu Matlab, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2000
- S. Osowski, A. Cichocki, K.Siwek, Matlab w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006
- W.H. Press, et al., Numerical recipes, Cambridge University Press, 1986

Plan

- Rozwiązywanie problemów inżynierskich
- Przegląd typowych procedur matematycznych
- Stało i zmiennoprzecinkowa reprezentacja liczb

Jak rozwiązuje się problem inżynierski?

Opis problemu

↓

Model matematyczny

↓

Rozwiązanie modelu

↓

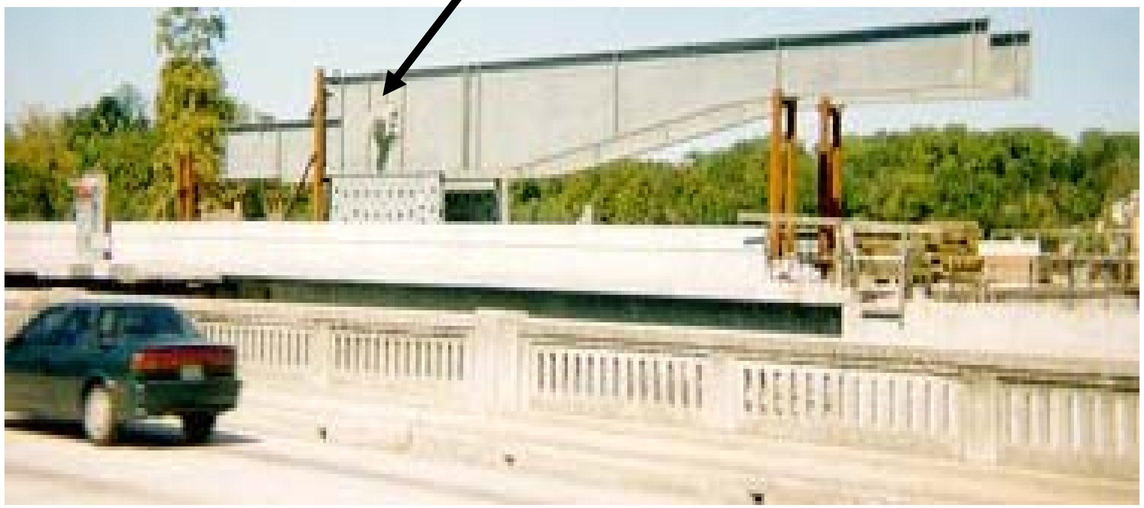
Zastosowanie rozwiązania

Przykład rozwiązania problemu inżynierskiego

Wg Autar Kaw
http://numericalmethods.eng.usf.edu

Mechanizm otwarcia mostu zwodzonego

the Bridge of Lions in St. Augustine, Florida



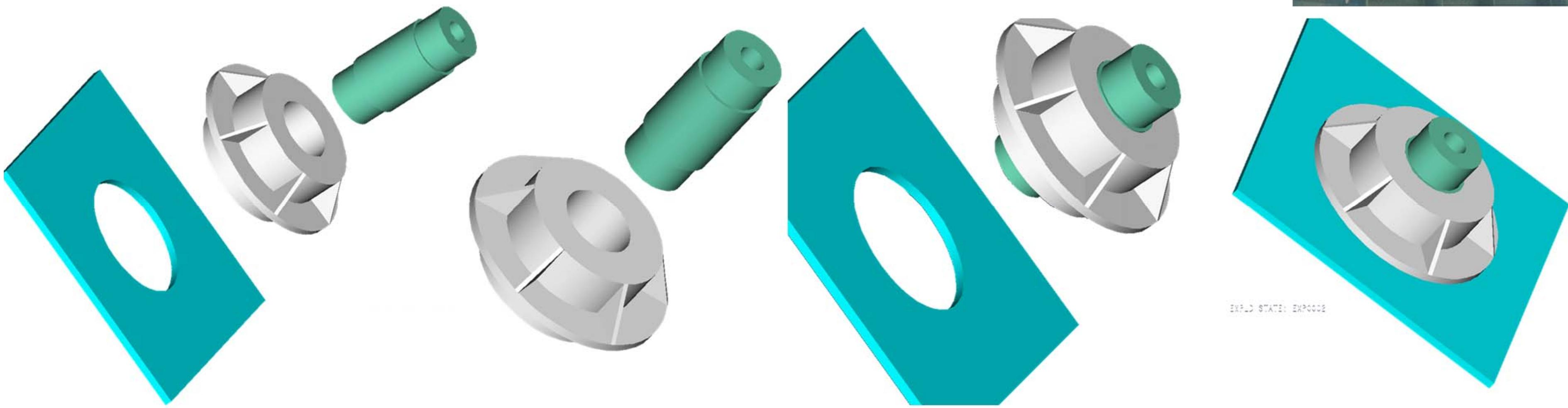
Mechanizm THG

piasta (ang. hub)

czop zawieszenia
obrotowego
(ang. trunnion)

dźwigar mostu
(ang. girder)

Montaż THG



Etap 1. Czop jest zanurzany w mieszaninie suchy lód/alkohol (108 F, około -80 C)

Etap 2. Czop rozszerza się w piaście

Etap 3. Czop-piasta zanurzone w mieszaninie suchy lód/alkohol

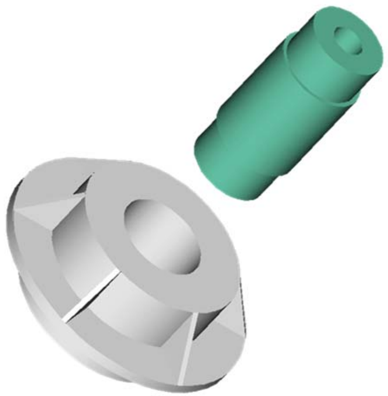
Etap 4. Po umieszczeniu w dźwigarze czop-piasta rozszerza się

Pojawił się problem!

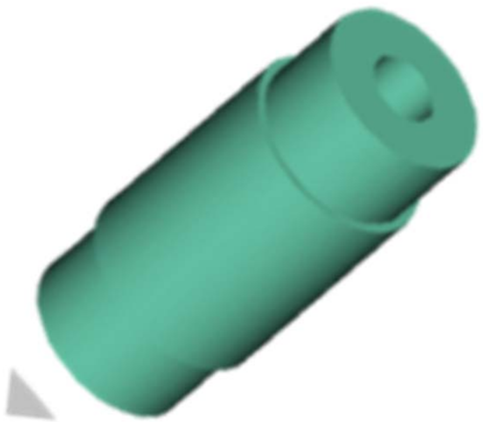
Po schłodzeniu, czop „zaciął się” w piaście

Dlaczego?

Wymagana jest kontrakcja elementu 0.015” lub więcej. Czy czop uległ wystarczającemu zwężeniu?



Obliczenia



$$\boxed{\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T}$$

$$D = 12.363''$$

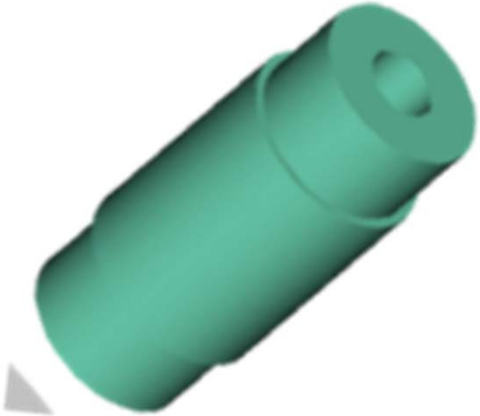
$$\alpha = 6.47 \times 10^{-6}\, in / in /^{o} F$$

$$\Delta T = -108 - 80 = -188^{o} F$$

$$\Delta D = (12.363)(6.47 \times 10^{-6})(-188)$$

$$= -0.01504''$$

Jednostki



$$\boldsymbol{1\ in = 2.54\ cm}$$

$$D = 12.363'' \approx 31{,}4cm$$

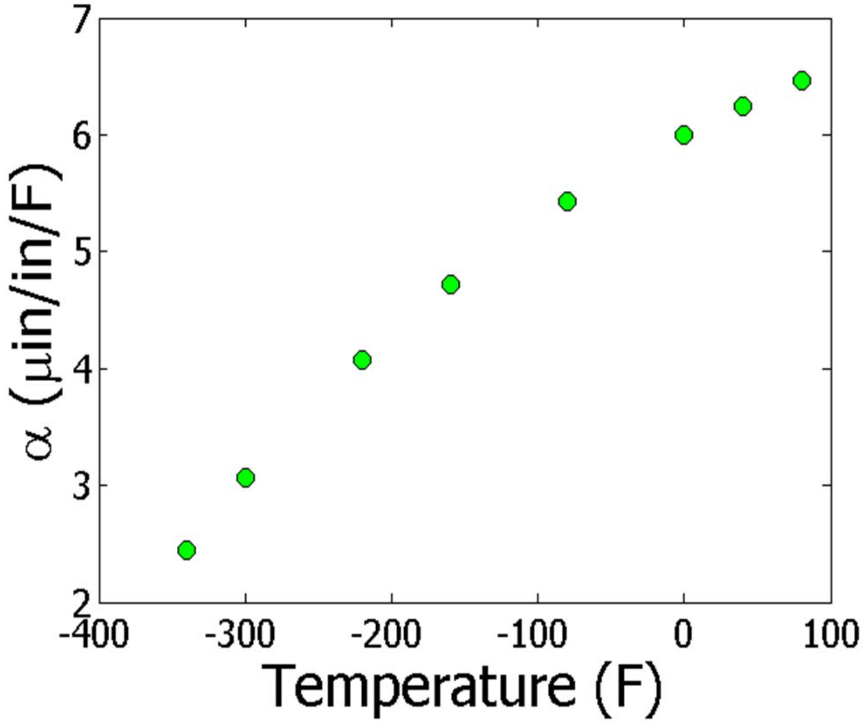
$$\boldsymbol{T}_F = \left(\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{5}} T_C + 32\right)^0 F$$

$$T = 80^o F \approx 26{,}7^0 C$$

$$\Delta D = 0.01504\ in = 0.03820\ cm$$

Czy użyty wzór jest prawidłowy?

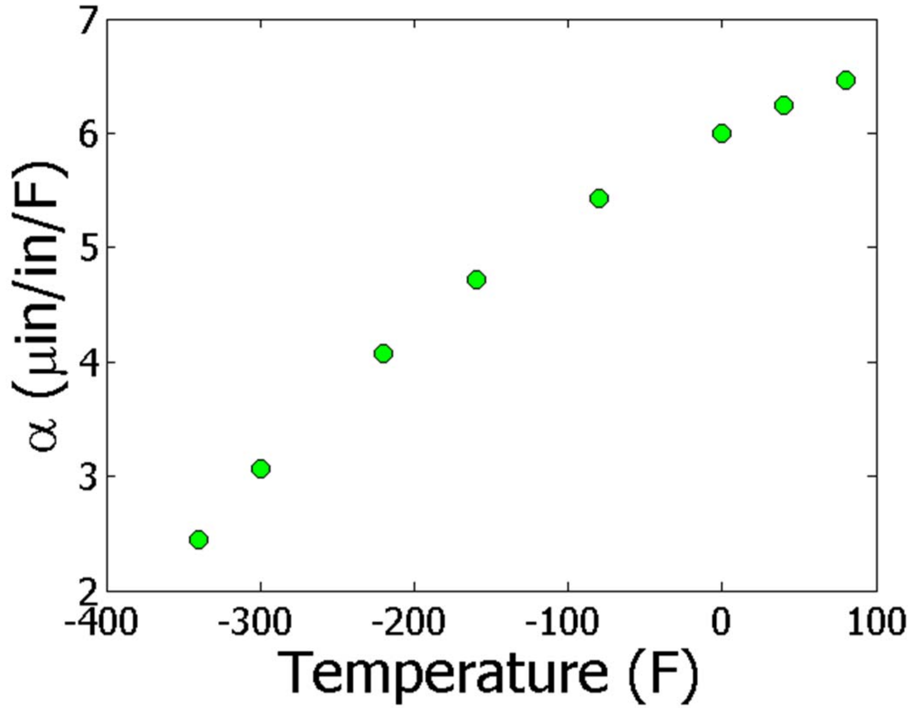
$$\Delta D = D \times \alpha \times \Delta T$$



T(°F)	α (μin/in/°F)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

Rozwiązanie problemu

Prawidłowy model powinien brać pod uwagę zmieniający się współczynnik rozszerzalności termicznej

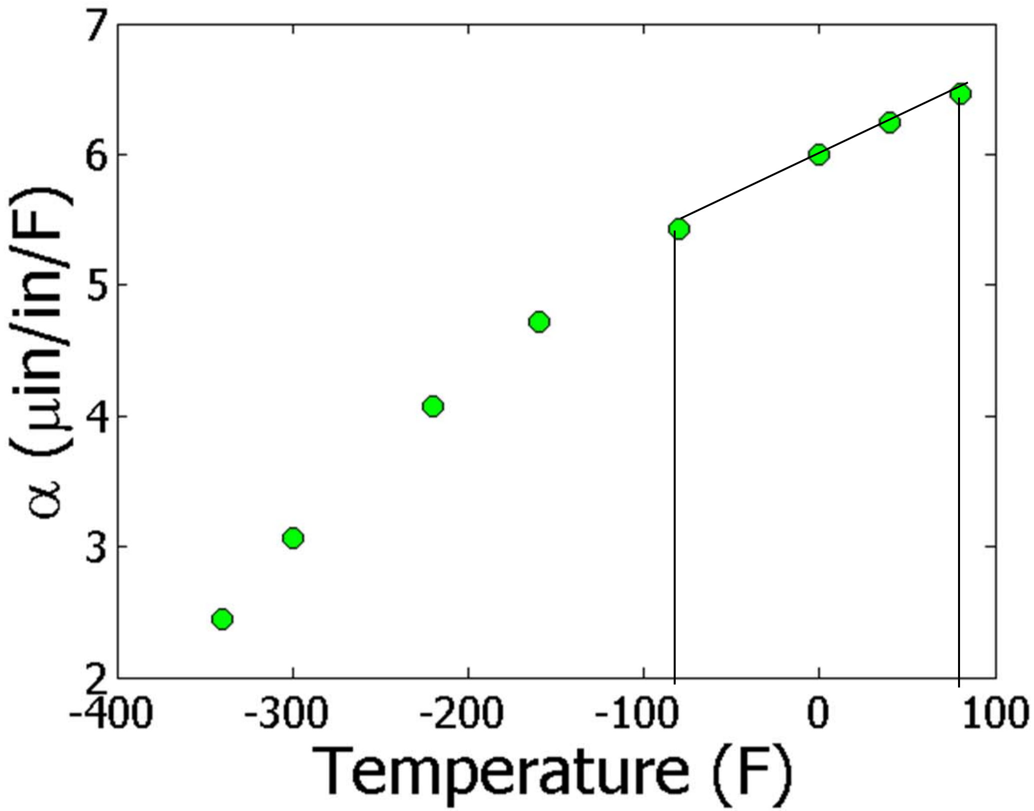


$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

Czy można oszacować kontrakcję?

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

T_a=80^{o}F; T_c=-108^{o}F; D=12.363″



Dokładne określenie kontrakcji

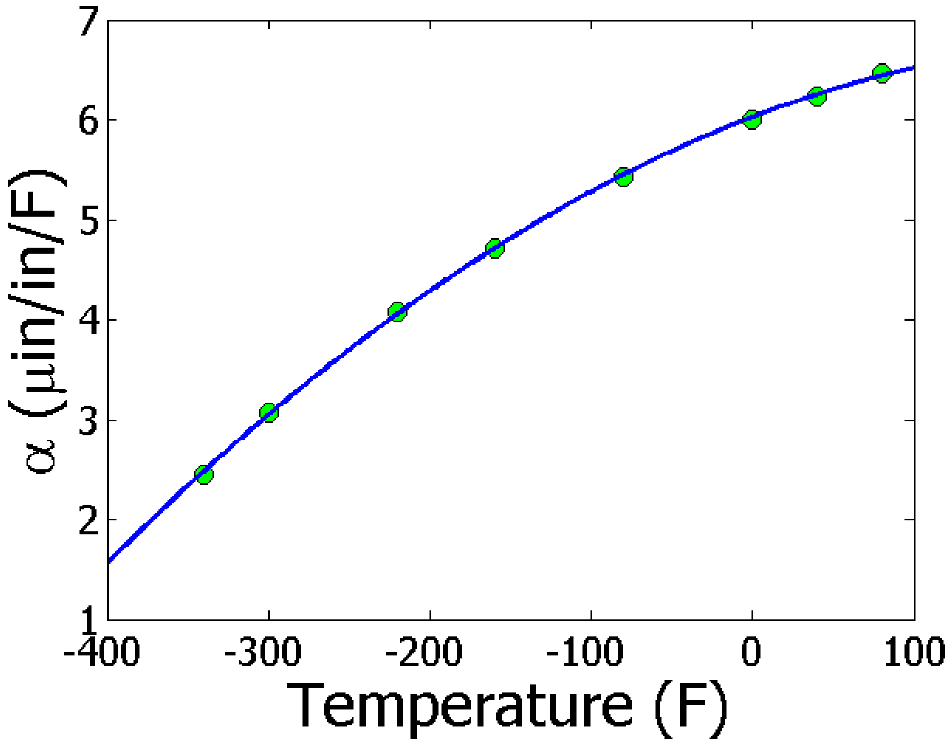
Zmiana średnicy (ΔD) przez oziębianie w mieszaninie lód/alkohol jest dana

$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)dT$$

$T_a = 80^o$F

$T_c = -108^o$F

$D = 12.363''$



$$\alpha = -1.2278\times 10^{-5} T^2 + 6.1946\times 10^{-3} T + 6.0150$$

$$\Delta D = -0.0137''$$ za mało!!!

Zastosowanie rozwiązania problemu – wskazówki praktyczne

Jedną z możliwych wskazówek jest aby czop schładzać w ciekłym azocie, który wrze w temperaturze -321^{o}F dużo niższej niż -108^{o}F dla mieszaniny suchy lód/alkohol

$$\Delta D = -0.0244'$$

Podsumowując:

1) Stwierdzenie problemu: czop nie obraca się swobodnie

2) Modelowanie: stworzenie nowego modelu

$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\, dT$$

3) Rozwiązanie: a) użyć metody graficznej b) użyć metod regresji i przeprowadzić całkowanie

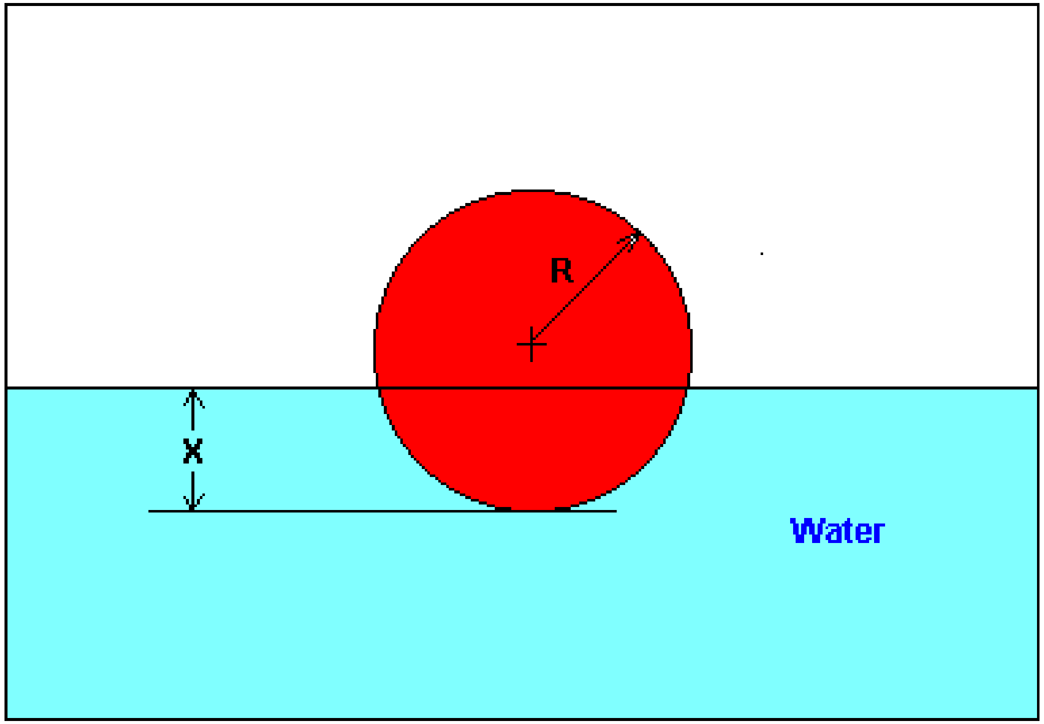
4) Implementacja: schładzać czop w temperaturze ciekłego azotu.

Procedury matematyczne

- Równania nieliniowe
- Różniczkowanie
- Układ równań liniowych
- Dopasowanie krzywych
  - Interpolacja
  - Regresja
- Całkowanie
- Zwyczajne równania różniczkowe
- Inne zaawansowane procedury:
  - Cząstkowe równania różniczkowe
  - Optymalizacja
  - Szybka transformata Fouriera

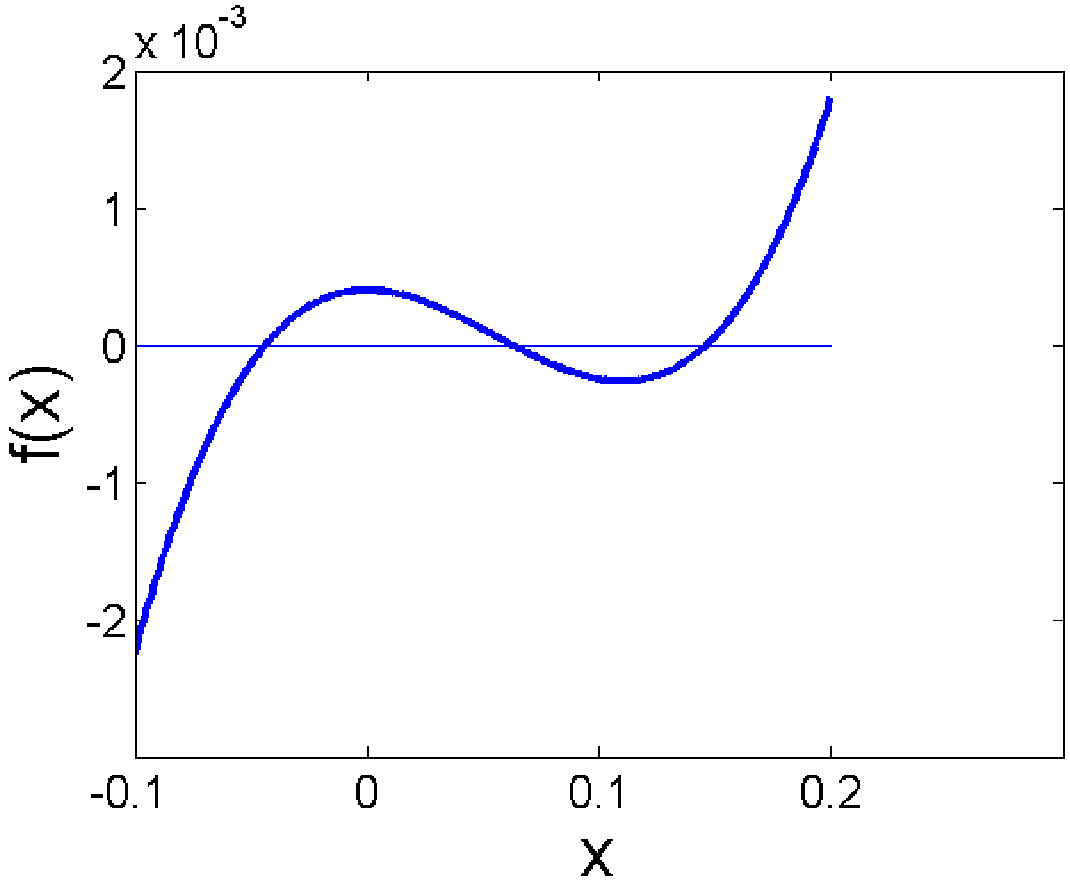
Równania nieliniowe

Jak głęboko kula jest zanurzona w wodzie?

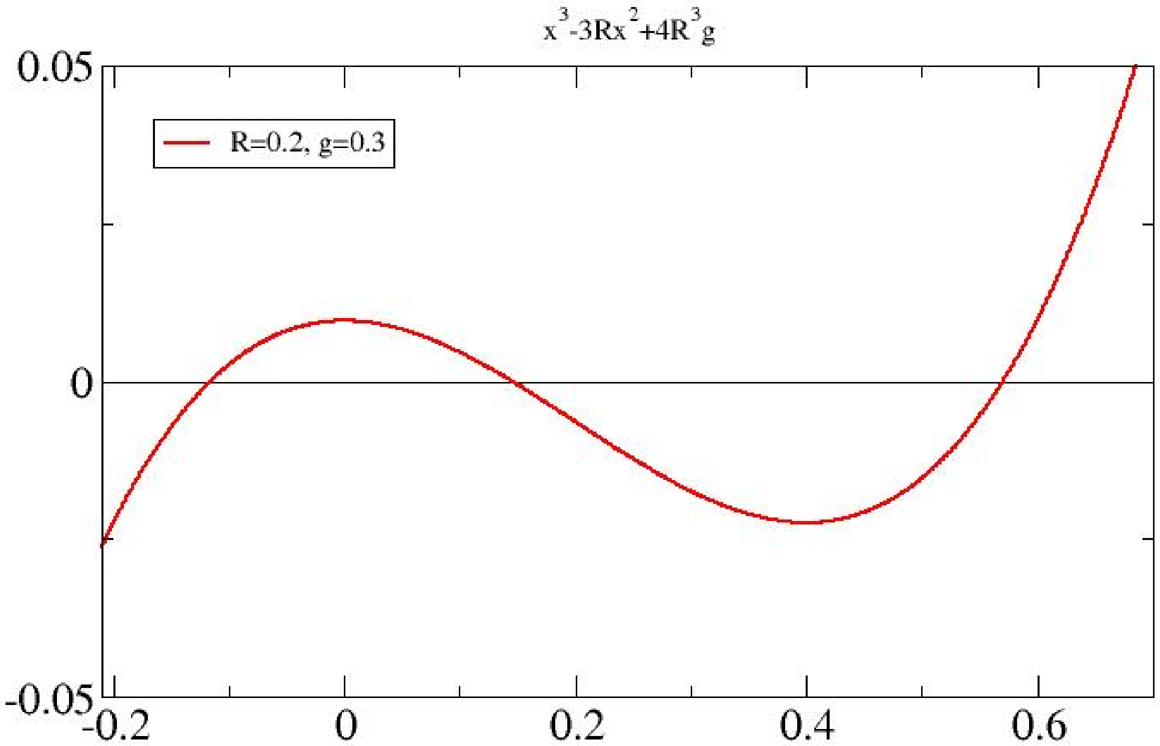


2R=0.11m

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$



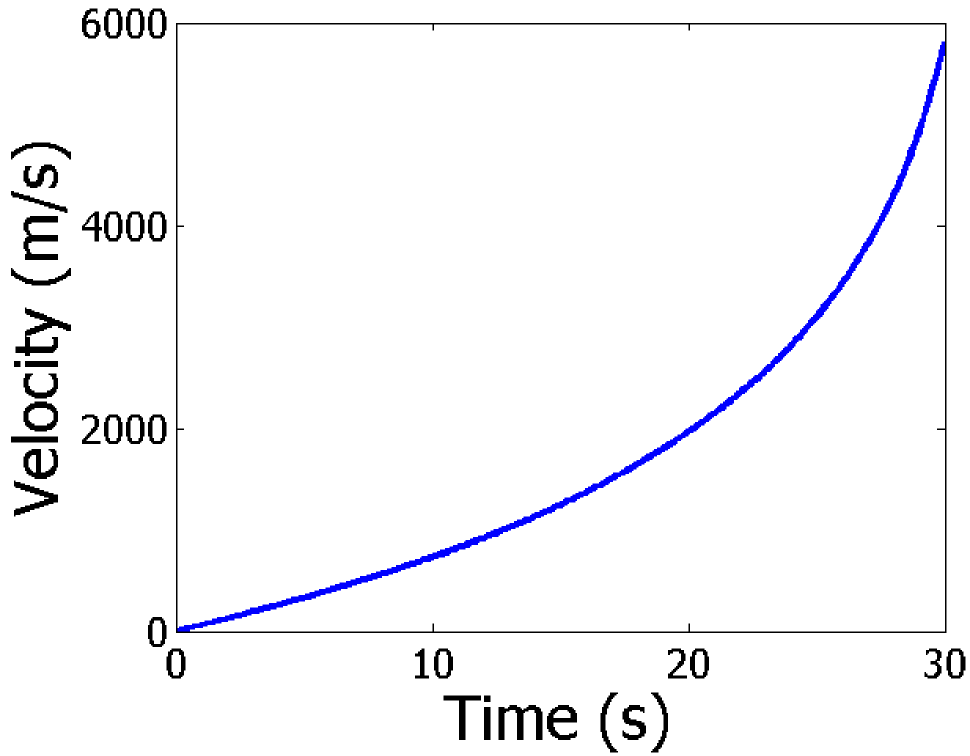
$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$



x^3-3Rx^2+4R^3g
0.05
0
-0.05
R=0.2, g=0.3
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

Różniczkowanie

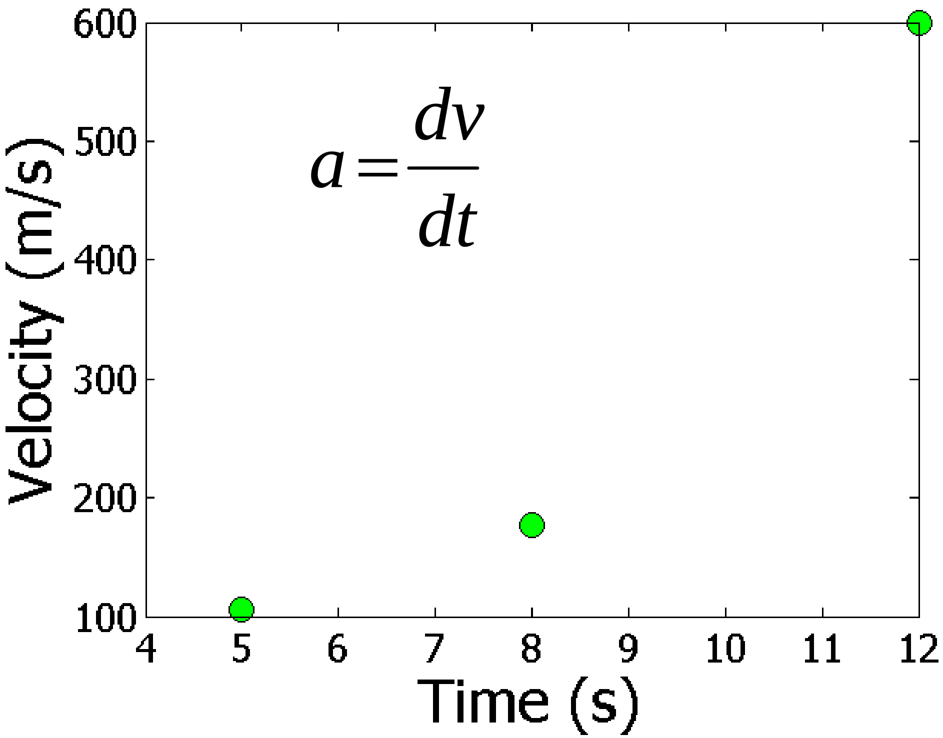
Jakie jest przyspieszenie w t=7 s?



$$v(t) = 2200 \ \ln\left(\frac{16\times10^4}{16\times10^4 - 5000t}\right) - 9.8t$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Czas (s)	5	8	12
V(m/s)	106	177	600



$$a = \frac{dv}{dt}$$

Układ równań liniowych

Znaleźć profil prędkości, przy założeniu:

Czas (s)	5	8	12
V (m/s)	106	177	600

$$v(t) = at^2 + bt + c, \qquad 5 \le t \le 12$$

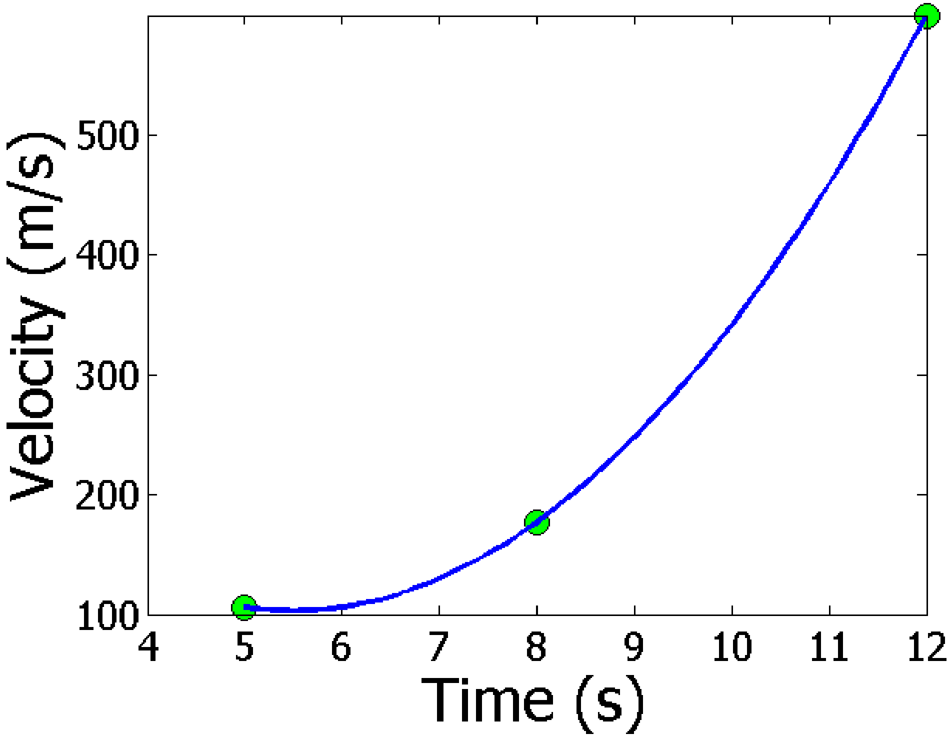
Układ trzech równań liniowych

$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 106 \\ 64a + 8b + c = 177 \\ 144a + 12b + c = 600 \end{cases}$$

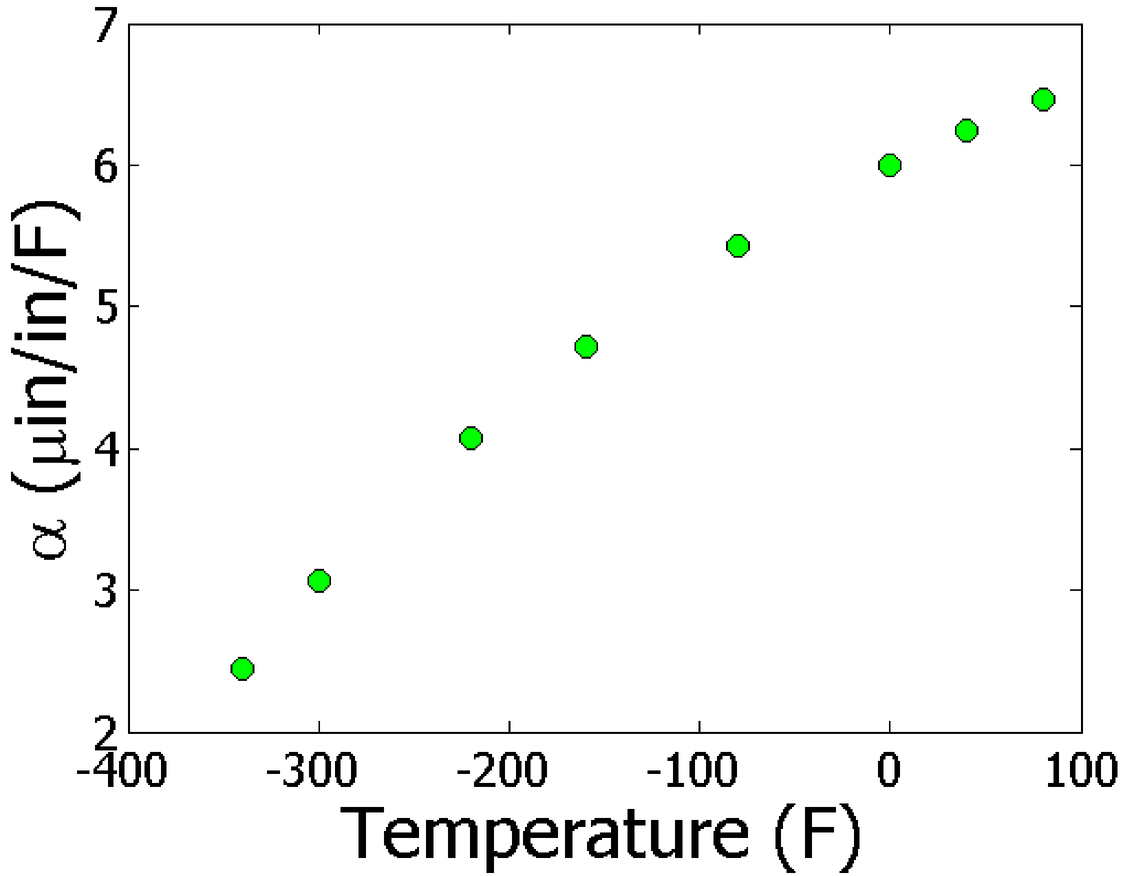
Interpolacja

Jaka jest prędkość rakiety w t=7 s?

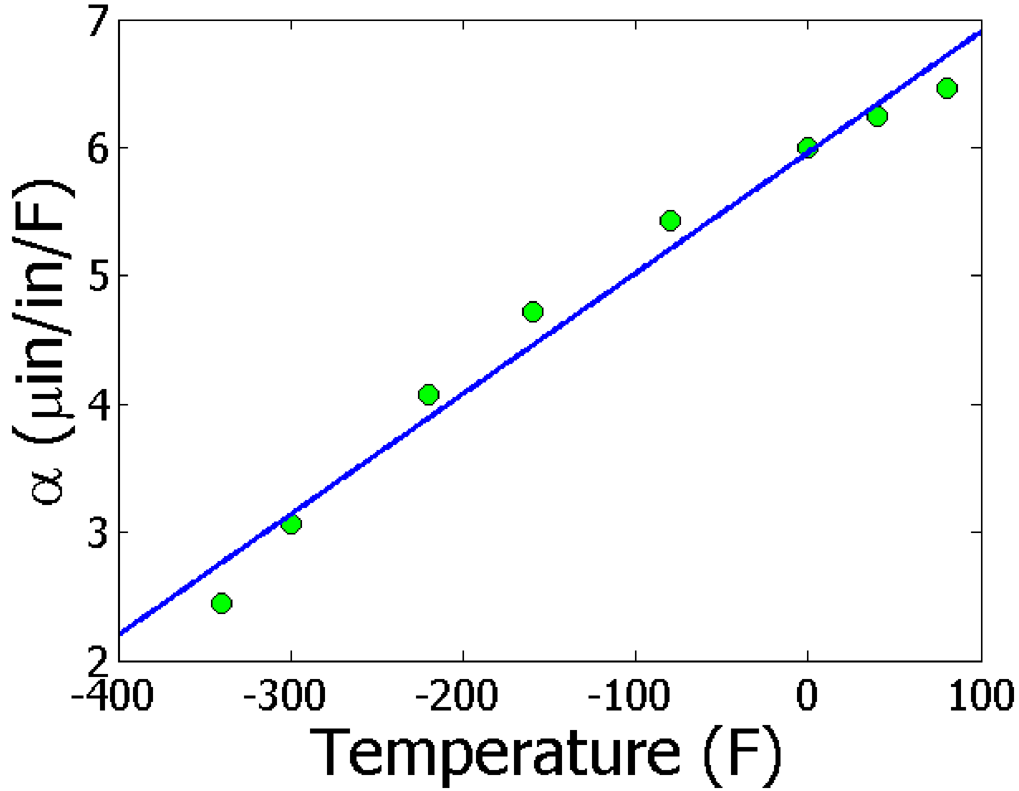
Czas (s)	5	8	12
V (m/s)	106	177	600



Współczynnik rozszerzalności termicznej stali

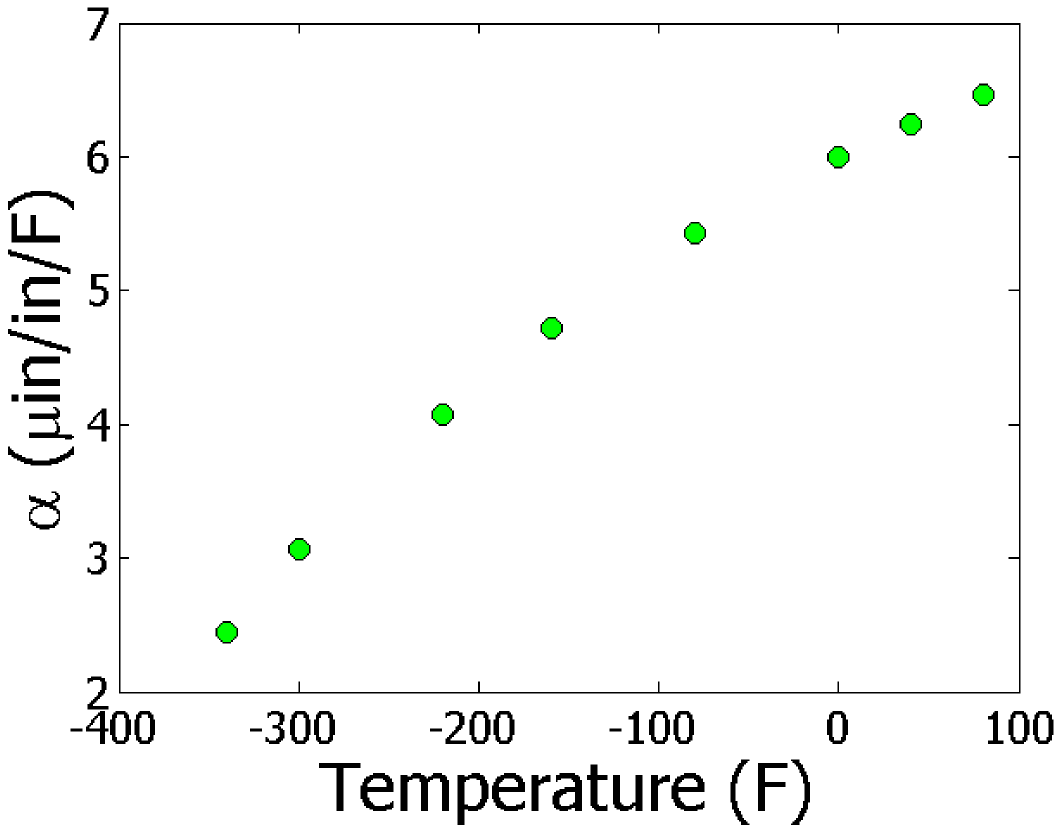


Regresja



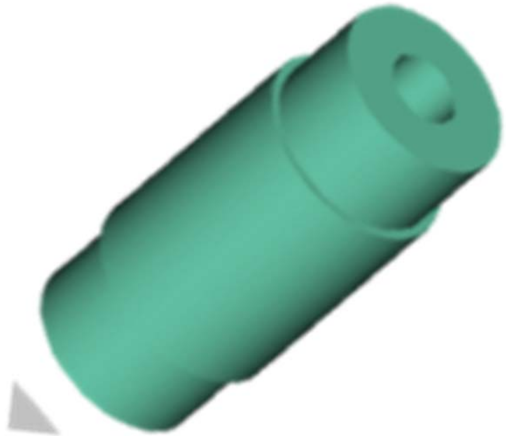
Całkowanie

$$\Delta D = D \int_{T_{room}}^{T_{fluid}} \alpha \, dT$$



Zwyczajne równania różniczkowe

Jak długo trzeba chłodzić ciało?



$$mc\frac{d\theta}{dt} = -hA(\theta - \theta_a), \quad \theta(0) = \theta_{room}$$

Co trzeba wiedzieć układając własne algorytmy obliczeniowe?

- wielkość pamięci operacyjnej komputera
- szybkość wykonywania operacji arytmetycznych i logicznych
- zakres liczb dopuszczalnych podczas obliczeń
- dokładność wykonywania podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych

Sposób przedstawiania liczb w pamięci komputera

Liczby są zapamiętywane jako

- stałoprzecinkowe (liczby stałopozycyjne, ang. fixed-point numbers)
- zmiennoprzecinkowe (liczby zmiennopozycyjne, ang. floating-point numbers, fl)

Komputer pracuje wewnętrznie w układzie dwójkowym, a komunikuje się ze światem zewnętrznym w układzie dziesiętnym, stąd procedury konwersji.

Jest to źródłem błędów.

Reprezentacja liczby dziesiętnej

$$257.76 = 2\times10^{2} + 5\times10^{1} + 7\times10^{0} + 7\times10^{-1} + 6\times10^{-2}$$

System dwójkowy (binarny)

$$(1011.0011)_2 = \begin{pmatrix} (1\times2^{3} + 0\times2^{2} + 1\times2^{1} + 1\times2^{0}) \\ +(0\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4}) \end{pmatrix}_{10}$$

$$= 11.1875$$

W układzie dwójkowym stosujemy dwie cyfry: 0 i 1, nazywane **bitami**

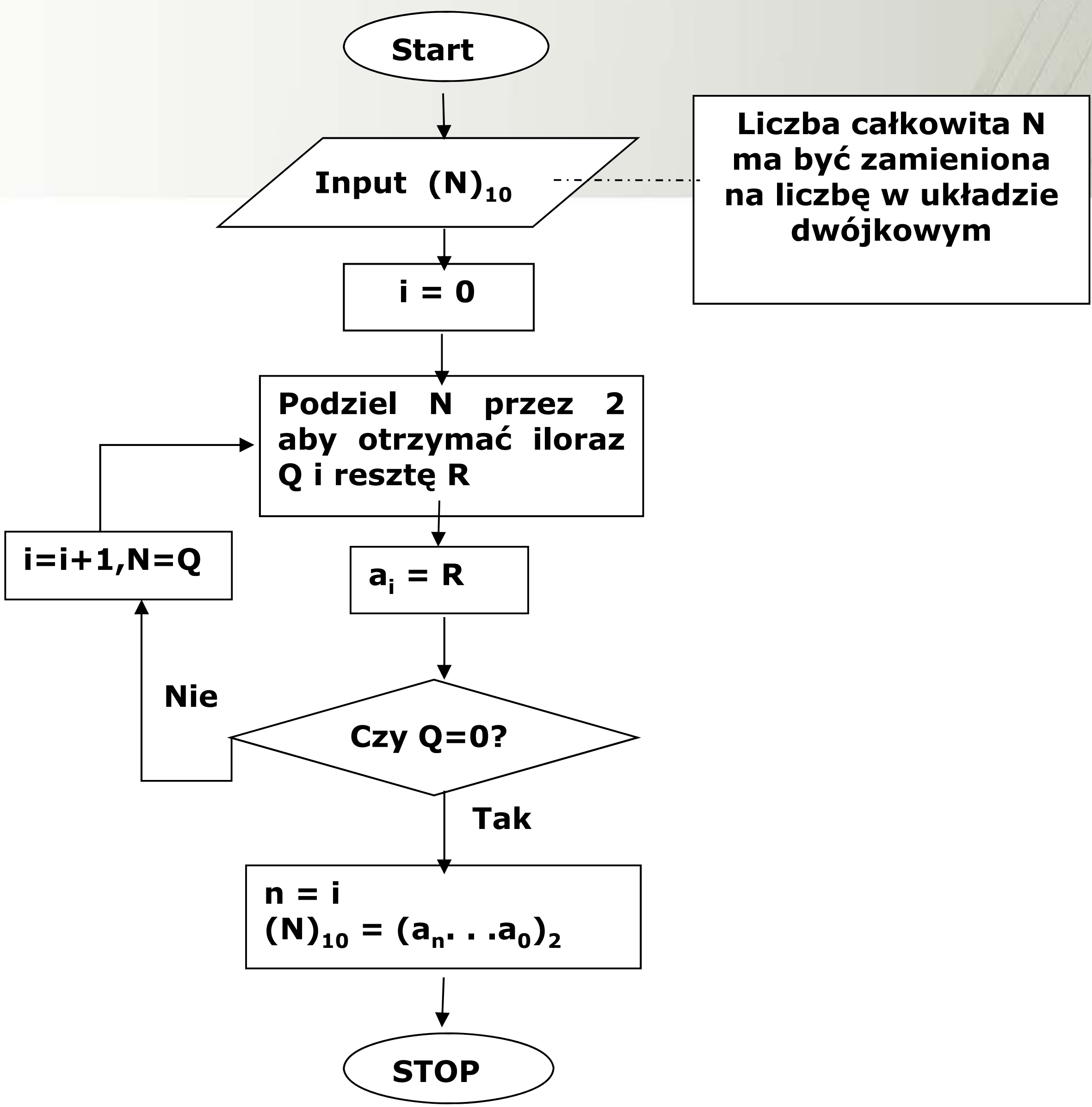
Zamiana liczby całkowitej w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

	Iloraz	Reszta
11/2	5	$1 = a_0$
5/2	2	$1 = a_1$
2/2	1	$0 = a_2$
1/2	0	$1 = a_3$

stąd

$$(11)_{10} = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2$$

$$= (1011)_2$$



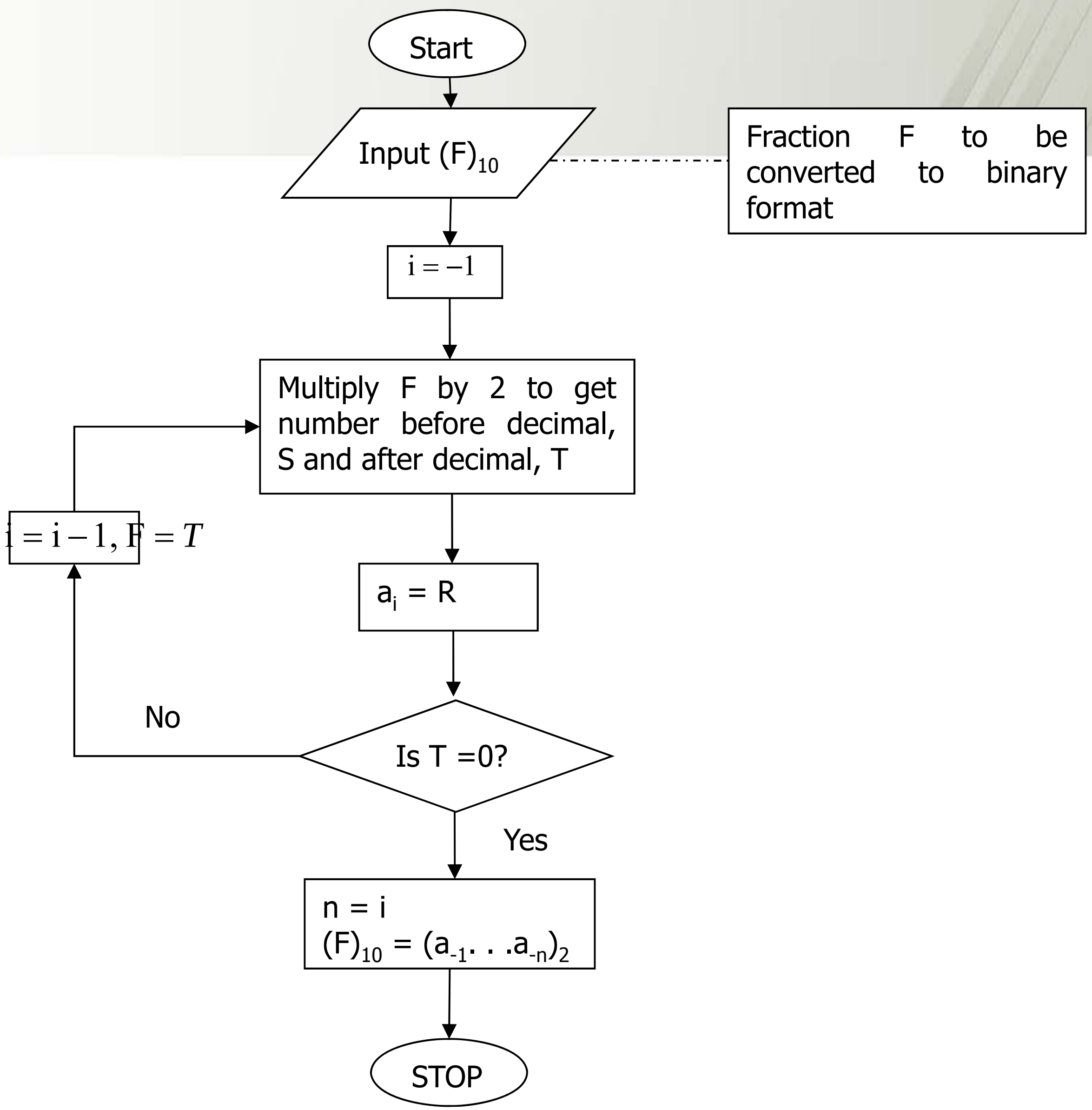
http://numericalmethods.eng.usf.edu

Zamiana liczby ułamkowej w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

	Wynik mnożenia	Po przecinku	Liczba przed przecinkiem
0.1875×2	0.375	0.375	$0 = a_{-1}$
0.375×2	0.75	0.75	$0 = a_{-2}$
0.75×2	1.5	0.5	$1 = a_{-3}$
0.5×2	1.0	0.0	$1 = a_{-4}$

stąd

$$(0.1875)_{10} = (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2$$
$$= (0.0011)_2$$


Start
Input (F)10
Fraction F to be converted to binary format
i = −1
Multiply F by 2 to get number before decimal, S and after decimal, T
i = i − 1, F = T
a_i = R
No
Is T =0?
Yes
n = i
(F)10 = (a-1. . .a-n)2
STOP

Zamiana dowolnej liczby w zapisie dziesiętnym na liczbę w zapisie dwójkowym

$$(11.1875)_{10} = (\ \ ?.?\ \ )_2$$

skoro

$$(11)_{10} = (1011)_2$$

i

$$(0.1875)_{10} = (0.0011)_2$$

otrzymujemy

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Inne podejście

$$\left(11.1875\right)_{10}$$

$$\begin{aligned}
\left(11\right)_{10} &= 2^{3} + 3 \\
&= 2^{3} + 2^{1} + 1 \\
&= 2^{3} + 2^{1} + 2^{0} \\
&= 1\times 2^{3} + 0\times 2^{2} + 1\times 2^{1} + 1\times 2^{0} \\
&= \left(1011\right)_{2}
\end{aligned}$$

Inne podejście

$$
\begin{aligned}
(0.1875)_{10} &= 2^{-3} + 0.0625 \\
&= 2^{-3} + 2^{-4} \\
&= 0\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} \\
&= (.0011)_2
\end{aligned}
$$

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2$$

Problem dokładności

Przykład: Nie wszystkie liczby ułamkowe mogą być przedstawione dokładnie w systemie dwójkowym

	Wynik	Po przecinku	Przed przecinkiem
0.3×2	0.6	0.6	$0=a_{-1}$
0.6×2	1.2	0.2	$1=a_{-2}$
0.2×2	0.4	0.4	$0=a_{-3}$
0.4×2	0.8	0.8	$0=a_{-4}$
0.8×2	1.6	0.6	$1=a_{-5}$

$$(0.3)_{10} \approx (a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5})_2 = (0.01001)_2 = 0.28125$$

Dokładność z jaką można przedstawiać liczby zależy od długości słów w komputerze. Zaokrąglanie i obcinanie prowadzi do błędów.

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^{w}$$

M-mantysa liczby x

W-wykładnik części potęgowej,

N=2, 10

W zapisie zmiennoprzecinkowym liczba rzeczywista jest przedstawiana za pomocą dwóch grup bitów:

I – tworzy mantysę M, część ułamkowa $\frac{1}{2}<M<1$

II - tworzy W , liczba całkowita, zakres W decyduje o zakresie liczb dopuszczalnych w komputerze

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^{w}$$

Przykład:

Jeżeli w zapisie dwójkowym M określa 5 bitów a W trzy bity, przy czym pierwszy bit określa znak („-” to jeden), to:

$$x = (1)1101 \quad (0)10$$

M W

oznacza liczbę $x = -0{,}1101 \times 2^{+10}$

czyli: $$x = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16}\right) \times 2^{+(1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)}$$

w zapisie dziesiętnym -3,25

Struktura liczby zmiennoprzecinkowej

$$x = M \times N^{w}$$

W tym zapisie można utworzyć tylko niektóre liczby dodatnie w zakresie od 0,0625 do 7,5; liczbę 0 oraz liczby ujemne od -0,0625 do -7,5.

Są pewne liczby, których nie można w tym zapisie przedstawić

Liczba x=0.2 (w zapisie dziesiętnym) ma w zapisie dwójkowym nieskończone rozwinięcie równe:

$$x = 0{,}0011(0011)$$

Najbliższa jej liczba (dla M=5 i W=3) to $x = 0{,}001100$

czyli 0,1875

Jest to źródłem błędów wejściowych

Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:		2^n	...	2^2	2^1	2^0
Bity:	s	b_n	...	b_2	b_1	b_0
	znak liczby	*wartość bezwzględna liczby*				

Jeżeli na reprezentację liczby stałoprzecinkowej przeznacza się n+2 bity (1 bit na znak i n+1 bitów na wartość bezwzględną liczby) to struktura ma postać:

$$liczba = s \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k 2^k$$

gdzie:

s=1 lub s=-1 (znak liczby)

b_k przyjmuje wartość 0 lub 1 (wartość bezwzględna liczby)

Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:		2^n	...	2^2	2^1	2^0
Bity:	s	b_n	...	b_2	b_1	b_0
	znak liczby	*wartość bezwzględna liczby*				

Na n+2 bitach można zapisywać liczby całkowite z przedziału:

$$[-2^{n+1}+1;2^{n+1}-1]$$

Liczby stałoprzecinkowe są podzbiorem liczb całkowitych. Podzbiór ten jest tym większy im większe jest n.

Co to jest nadmiar stałoprzecinkowy?

Struktura liczby stałoprzecinkowej

Wagi:		2^n	...	2^2	2^1	2^0
Bity:	s	b_n	...	b_2	b_1	b_0
	znak liczby	*wartość bezwzględna liczby*				

Języki programowania wysokiego poziomu oferują kilka typów liczb stałoprzecinkowych:

Integer - 16 bitów

LongInt – 32 bity

ShortInt – 8 bitów