METODY NUMERYCZNE

Wykład 4.

Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH

Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Należy znaleźć pierwiastek równania nieliniowego czyli rozwiązać równanie

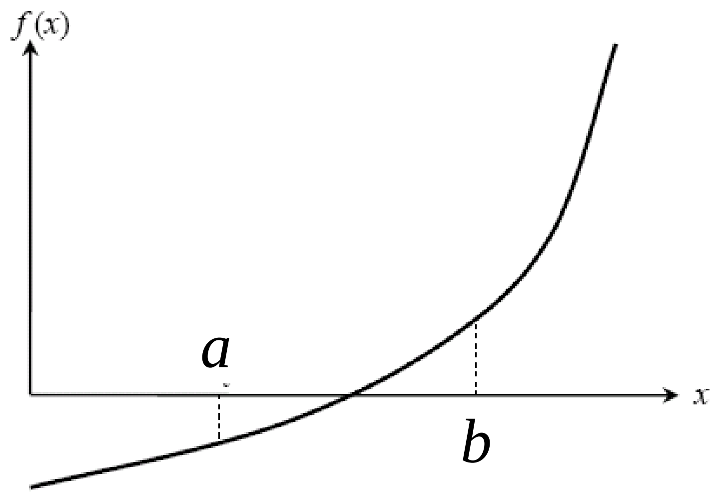
$$f(x) = 0$$

Twierdzenie:

Jeżeli funkcja f(x) jest określona i ciągła w danym przedziale <a,b> i funkcja zmienia znak na końcach przedziału

$$f(a)\,f(b) \leq 0$$

to w przedziale <a,b> znajduje się przynajmniej jeden pojedynczy pierwiastek.

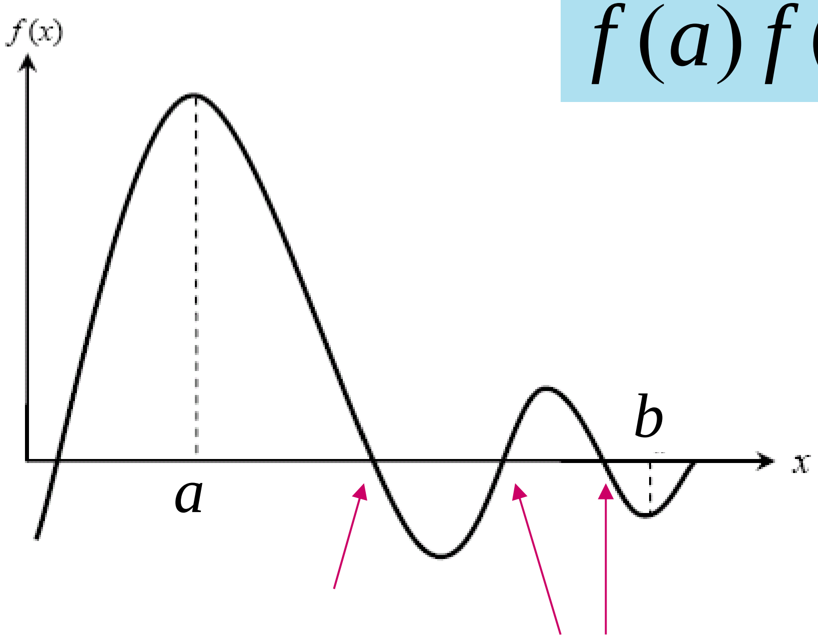


Przedział <a,b>, w którym znajduje się pojedynczy pierwiastek równania nosi nazwę przedziału izolacji pierwiastka.

Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Jeżeli funkcja zmienia znak na granicach przedziału, to w tym przedziale może istnieć więcej pierwiastków

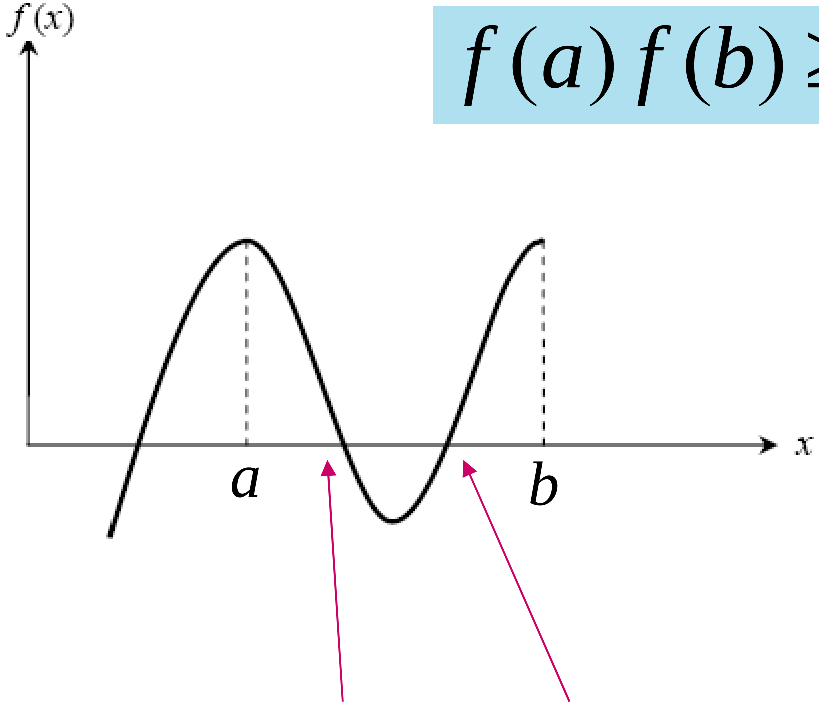
$$f(a)\,f(b) \le 0$$

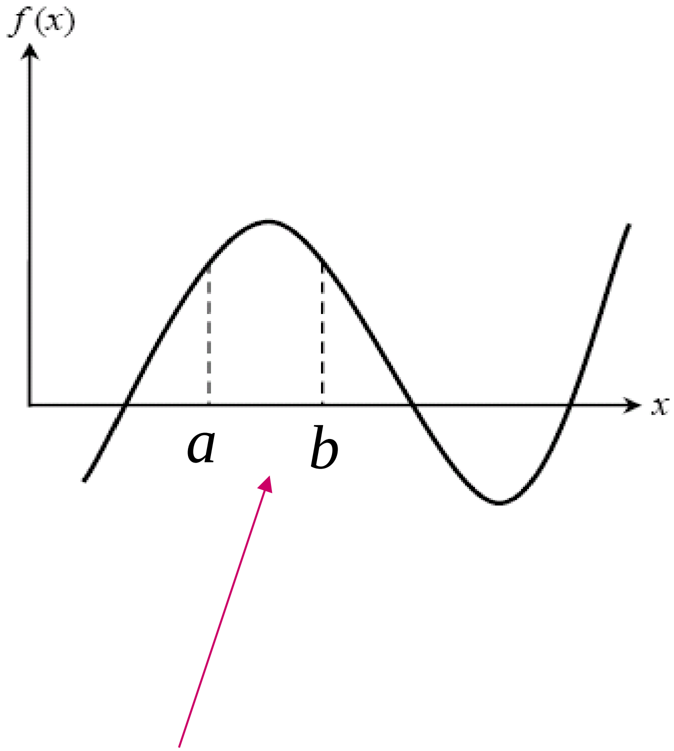


$$f(x) = 0$$

Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

$$f(a)\,f(b) \geq 0$$





Jeżeli funkcja nie zmienia znaku na granicach przedziału, to w tym przedziale może istnieć pierwiastek lub nie

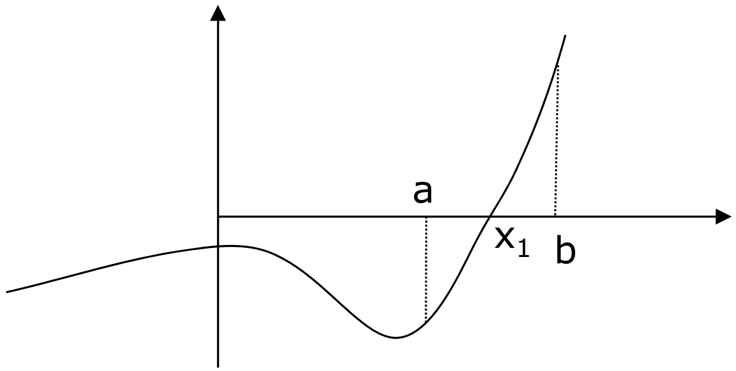
Metody numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Metody:

- połowienia (równego podziału lub bisekcji)
- stycznych (Newtona)
- regula-falsi (fałszywej liniowości)
- metoda siecznych

Metoda bisekcji

Przedział <a,b> dzielimy na połowy punktem: $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$



Jeżeli $f(x_1)=0$, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem równania. Jeżeli $f(x_1)\neq 0$ to z dwóch przedziałów $<a,x_1>$ i $<x_1,b>$ wybieramy ten, na końcach którego funkcja f(x) ma różne znaki, tzn. spełniony jest jeden z warunków:

$$f(a)\cdot f(x_1) < 0 \;\; \text{lub} \;\; f(x_1)\cdot f(b) < 0$$

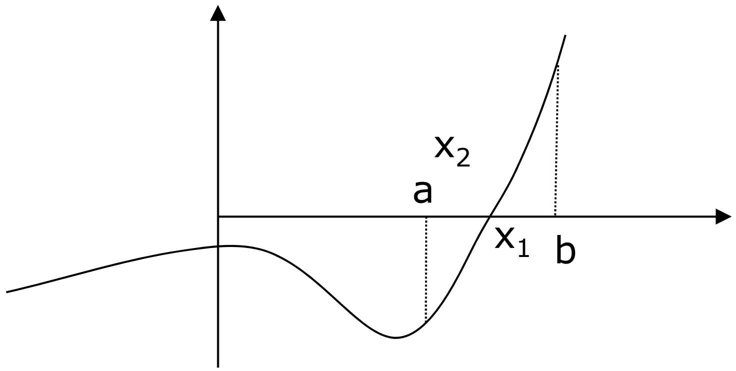
Metoda bisekcji

Uzyskany przedział <a,x_1> lub <x_1,b> ponownie dzielimy na połowy punktem:

$$x_2 = \frac{a + x_1}{2}$$

lub

$$x_2 = \frac{b + x_1}{2}$$



Jeżeli f(x_2)=0, to x_2 jest szukanym pierwiastkiem równania. Jeżeli f(x_2)≠0 to wybieramy nowy przedział i sprawdzamy znaki funkcji na jego końcach. Proces ten powtarzamy tak długo, aż otrzymamy rozwiązanie dokładne lub zostanie osiągnięta wymagana dokładność rozwiązania.

Metoda bisekcji

W wyniku takiego postępowania po pewnej liczbie kroków albo otrzymamy pierwiastek dokładny $f(x_n)=0$, albo ciąg przedziałów takich, że:

$$f(x_i)\,f(x_{i+1})<0$$

gdzie x_i oraz x_{i+1} są odpowiednio początkiem i końcem i-tego przedziału, a jego długość:

$$\left|x_i - x_{i+1}\right| = \frac{b-a}{2^i}$$

Ponieważ lewe końce ciągu przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry, a prawe końce ciąg nierosnący i ograniczony z dołu więc istnieje ich wspólna granica.

Algorytm dla metody bisekcji

W każdym kroku obliczamy względny błąd przybliżenia

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i}\right| \times 100$$

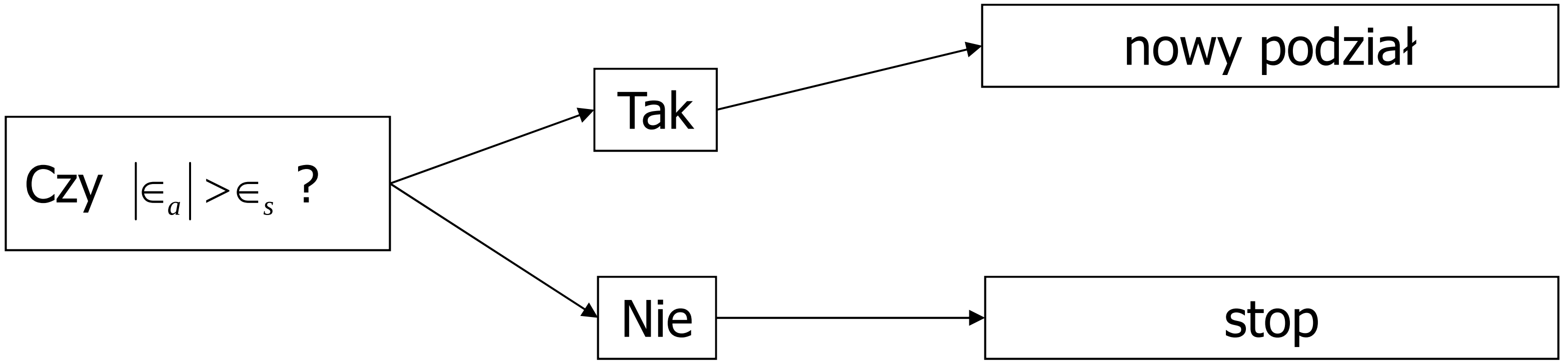
gdzie:

x_m^{i-1} jest pierwiastkiem znalezionym w poprzednim kroku

x_m^i jest pierwiastkiem znalezionym w danym kroku

Algorytm dla metody bisekcji

Porównanie błędu aproksymacji $|\epsilon_a|$ z definiowaną wcześniej tolerancją ϵ_s



Powinno się sprawdzić czy liczba iteracji nie przekracza zadanej wcześniej maksymalnej liczby iteracji. Jeśli przekracza, to program powinien się zatrzymać.

Przykład metody bisekcji

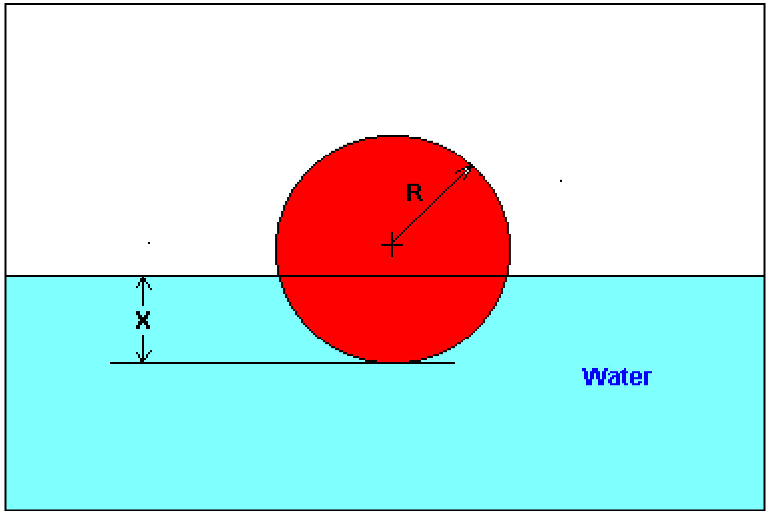
Pływająca kula

Z praw fizyki wynika, że kula będzie zanurzona do głębokości x takiej, że

$$0 \le x \le 2R$$

$$0 \le x \le 2(0.055)$$

$$0 \le x \le 0.11$$



$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

Przykład metody bisekcji

Zadanie:

a) Zastosować metodę bisekcji (połowienia) aby znaleźć głębokość x, do której kula jest zanurzona w wodzie. Przeprowadzić 3 iteracje aby oszacować pierwiastek równania

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

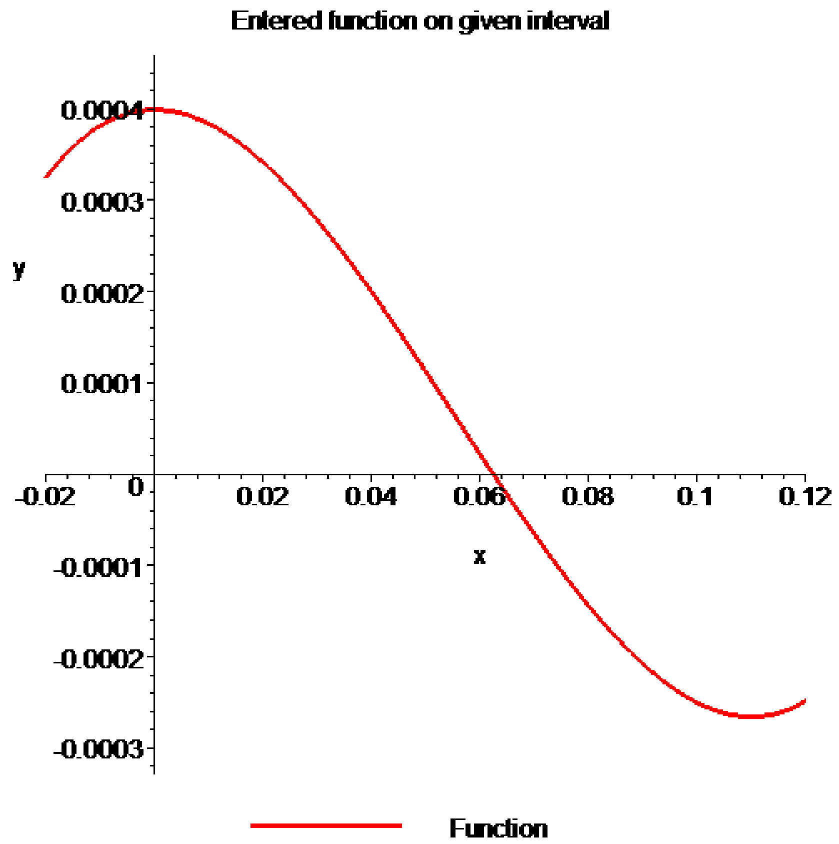
b) Znaleźć względny błąd przybliżenia po zakończeniu każdej iteracji i liczbę cyfr znaczących poprawnych w odpowiedzi

Przykład metody bisekcji

Rozwiązanie

Aby zrozumieć problem funkcja f(x) jest pokazana na rysunku

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times 10^{-4}$$



Przykład metody bisekcji

Zakładamy $$x_\ell = 0.00$$ $$x_u = 0.11$$

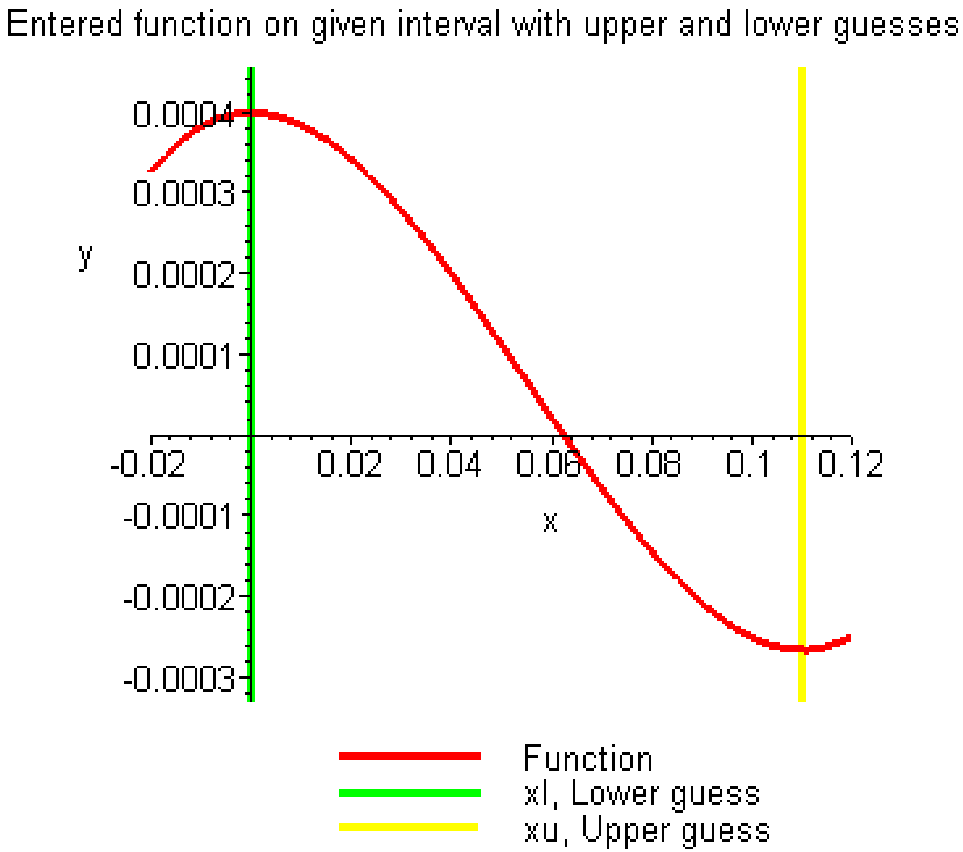
Sprawdzamy znak funkcji w x_ℓ i x_u

$$f(x_l) = f(0) = (0)^3 - 0.165(0)^2 + 3.993\times10^{-4} = 3.993\times10^{-4}$$
$$f(x_u) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993\times10^{-4} = -2.662\times10^{-4}$$

stąd $$f(x_l)f(x_u) = f(0)f(0.11) = \left(3.993\times10^{-4}\right)\left(-2.662\times10^{-4}\right) < 0$$

Istnieje przynajmniej jeden pierwiastek równania pomiędzy x_ℓ i x_u, tj. pomiędzy 0 i 0.11

Przykład metody bisekcji



Przykład metody bisekcji

Iteracja 1

Nowy pierwiastek $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0+0.11}{2} = 0.055$$

$$f(x_m) = f(0.055) = (0.055)^3 - 0.165(0.055)^2 + 3.993\times10^{-4} = 6.655\times10^{-5}$$

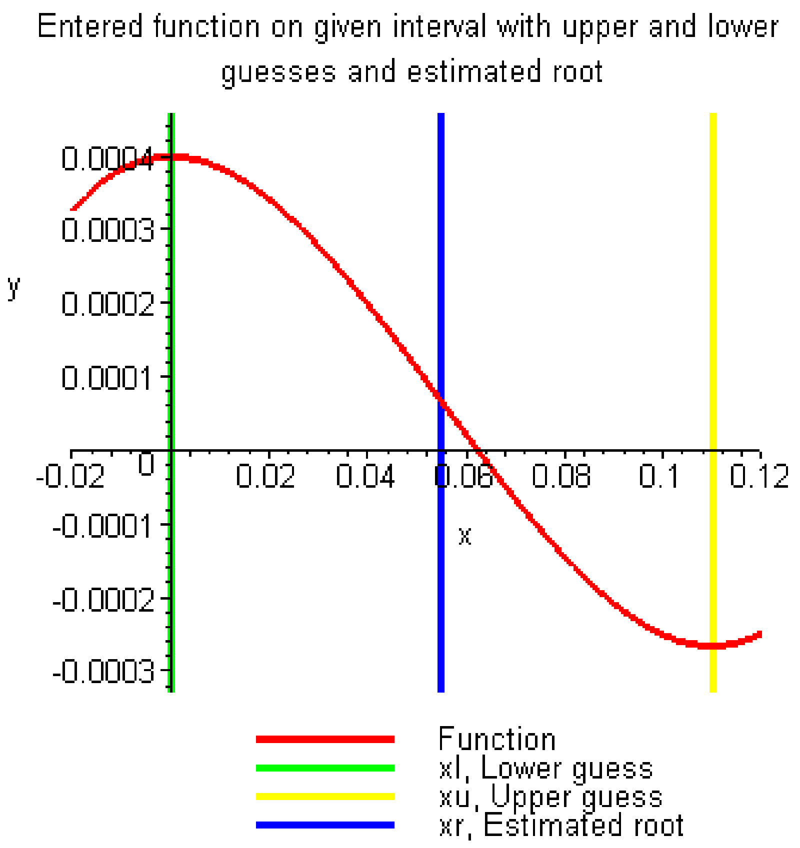
$$f(x_l)f(x_m) = f(0)f(0.055) = (3.993\times10^{-4})(6.655\times10^{-5}) > 0$$

Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_m i x_u, czyli pomiędzy 0.055 i 0.11. Dlatego nowe granice przedziału są:

$$x_l = 0.055,\ \ x_u = 0.11$$

W tym momencie, względny błąd przybliżenia $|\in_a|$ nie może być obliczony, bo jest to pierwszy krok

Przykład metody bisekcji



Po pierwszej iteracji

Przykład metody bisekcji

Iteracja 2

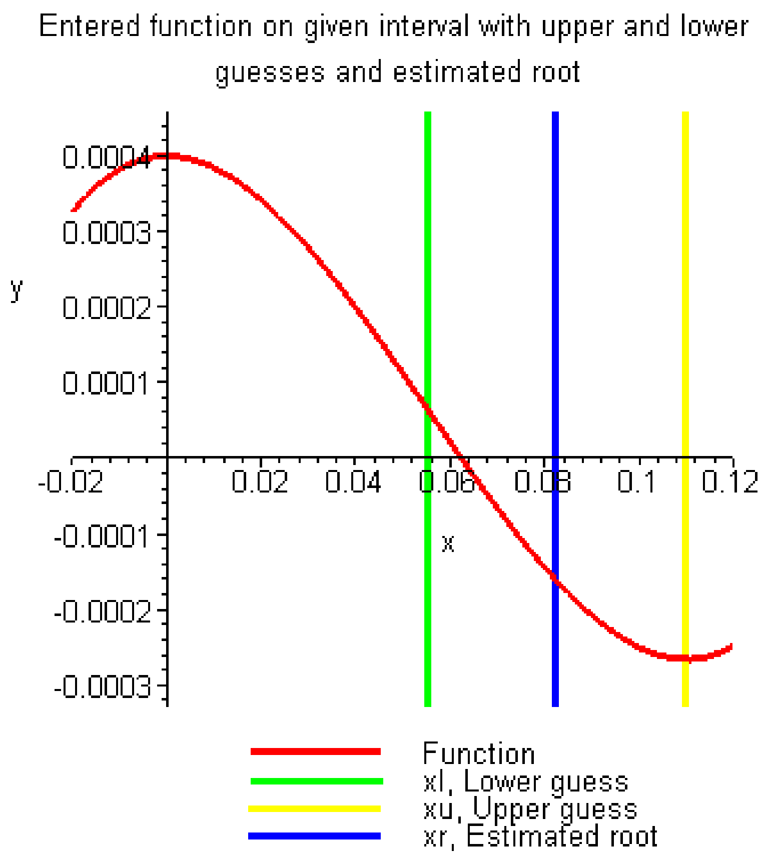
Nowy pierwiastek
$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.11}{2} = 0.0825$$

$$f(x_m) = f(0.0825) = (0.0825)^3 - 0.165(0.0825)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -1.622 \times 10^{-4}$$
$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.0825) = (6.655 \times 10^{-5})(-1.622 \times 10^{-4}) < 0$$

Stąd nowy pierwiastek leży pomiędzy x_ℓ i x_m, tj. pomiędzy 0.055 i 0.0825.
Górna i dolna granica pierwiastka:

$$x_l = 0.055, \; x_u = 0.0825$$

Przykład metody bisekcji



Po drugiej iteracji

Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po drugiej iteracji wynosi

$$|\in_a| = \left| \frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i} \right| \times 100$$

$$= \left| \frac{0.0825 - 0.055}{0.0825} \right| \times 100$$

$$= 33.333\%$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku $x_m = 0.0825$ gdyż błąd względny jest większy od 5%.

$$|\varepsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

Przykład metody bisekcji

Iteracja 3

Nowy pierwiastek $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.0825}{2} = 0.06875$$

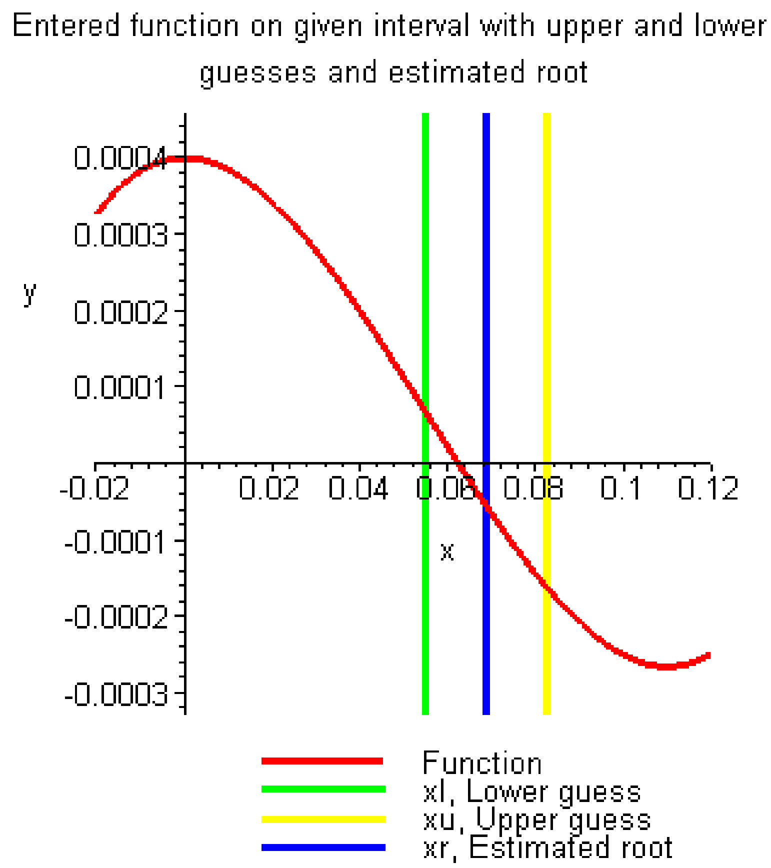
$$f(x_m) = f(0.06875) = (0.06875)^3 - 0.165(0.06875)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -5.563 \times 10^{-5}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.06875) = (6.655 \times 10^{-5})(-5.563 \times 10^{-5}) < 0$$

Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_ℓ i x_m, tj. pomiędzy 0.055 i 0.06875. Stąd granice wynoszą:

$$x_l = 0.055, \; x_u = 0.06875$$

Przykład metody bisekcji



Po trzeciej iteracji

Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po trzeciej iteracji wynosi

$$
\begin{aligned}
\left|\in_a\right| &= \left|\frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i}\right| \times 100 \\
&= \left|\frac{0.06875 - 0.0825}{0.06875}\right| \times 100 \\
&= 20\%
\end{aligned}
$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku x_m = 0.06875 gdyż błąd względny jest większy od 5%.

Przykład metody bisekcji

Analiza błędu i cyfr znaczących

Iteracja	x_ℓ	x_u	x_m	$\lvert \in_a \rvert \%$	$f(x_m)$
1	0.00000	0.11	0.055	----------	6.655×10^{-5}
2	0.055	0.11	0.0825	33.33	-1.622×10^{-4}
3	0.055	0.0825	0.06875	20.00	-5.563×10^{-5}
4	0.055	0.06875	0.06188	11.11	4.484×10^{-6}
5	0.06188	0.06875	0.06531	5.263	-2.593×10^{-5}
6	0.06188	0.06531	0.06359	2.702	-1.0804×10^{-5}
7	0.06188	0.06359	0.06273	1.370	-3.176×10^{-6}
8	0.06188	0.06273	0.0623	0.6897	6.497×10^{-7}
9	0.0623	0.06273	0.06252	0.3436	-1.265×10^{-6}
10	0.0623	0.06252	0.06241	0.1721	-3.0768×10^{-7}

Przykład metody bisekcji

Liczba poprawnych cyfr znaczących m w wyniku wynosi:

$$\left|\in_a\right| \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.1721 \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.3442 \leq 10^{2-m}$$

$$\log(0.3442) \leq 2 - m$$

$$m \leq 2 - \log(0.3442) = 2.463$$

tak więc $m = 2$

Liczba poprawnych cyfr znaczących w wyniku 0.06241 po 10-tej iteracji wynosi 2.

Zalety bisekcji

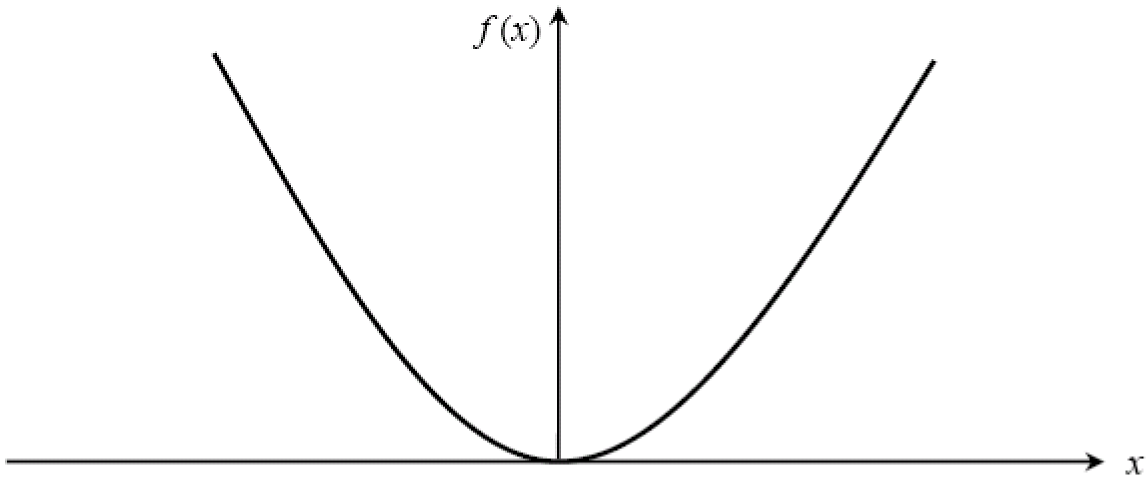
- metoda jest zawsze zbieżna
- przedział, w którym znajduje się pierwiastek jest zawsze połowiony

Wady bisekcji

- metoda jest wolnozbieżna
- jeżeli pierwiastek odgadnięty jest bliski rzeczywistemu to szybkość maleje

Wady metody bisekcji

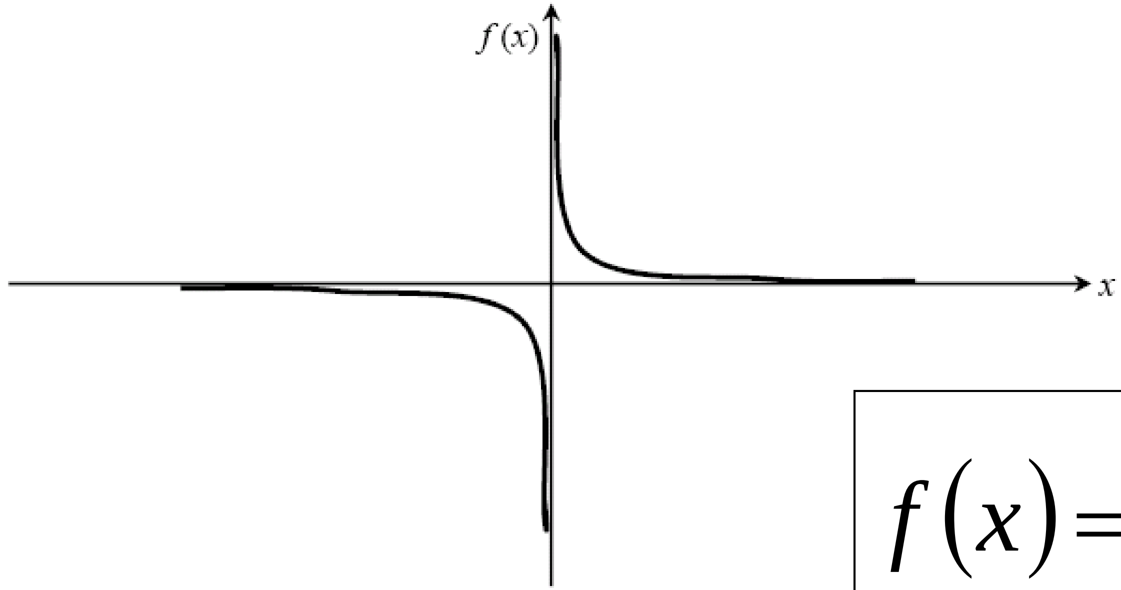
- Jeżeli funkcja f(x) jest taka, że dotyka osi OX to nie można znaleźć pierwiastka metodą bisekcji



$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Wady metody bisekcji

Funkcja zmienia znak ale nie ma pierwiastka



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Metoda regula-falsi

regula – linia; falsus- fałszywy

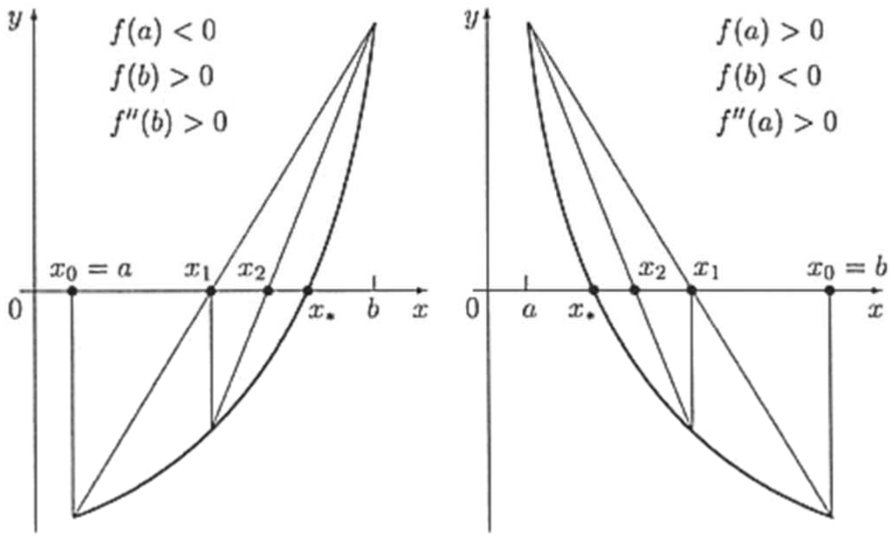
Metoda zwana jest metodą fałszywego założenia liniowości funkcji

Założenia:

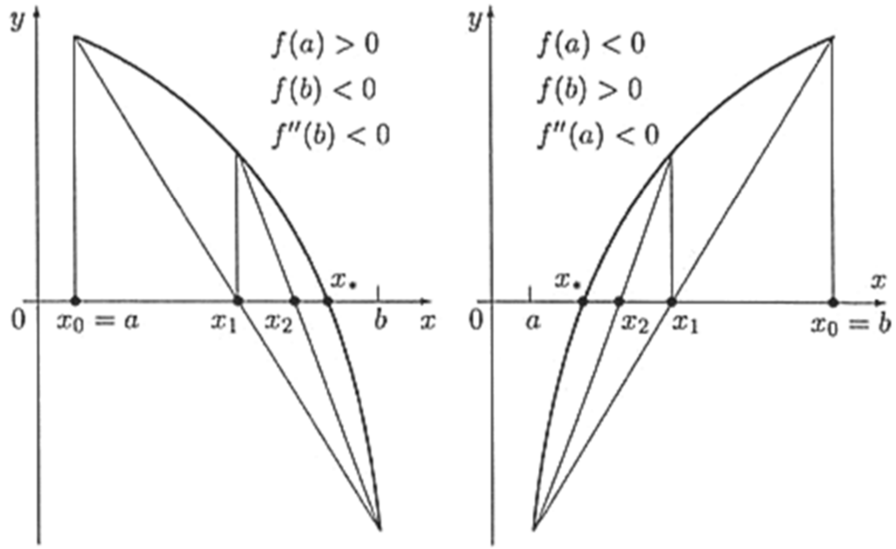
- w przedziale <a,b> równanie $f(x)=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek
- jest to pierwiastek pojedynczy
- $f(a)f(b)<0$
- $f(x)$ jest na przedziale <a,b> funkcją klasy C^2
- df/dx i d^2f/dx^2 mają stały znak w tym przedziale

potrzebne do ustalenia błędu i stałego punktu iteracji

Metoda regula-falsi



Przy takich założeniach możliwe są jedynie następujące przypadki:



Metoda ta ma punkt stały, jest nim punkt, w którym spełniony jest warunek:

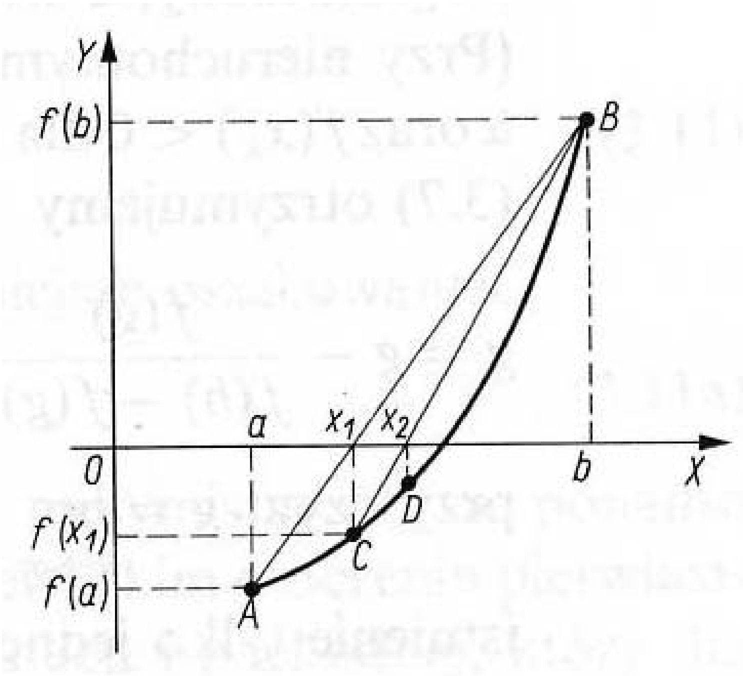
$$\boxed{f'' f > 0}$$

Metoda regula-falsi

Rozważmy przypadek:

Przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ prowadzimy cięciwę (sieczną) o równaniu:

$$\boxed{y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$



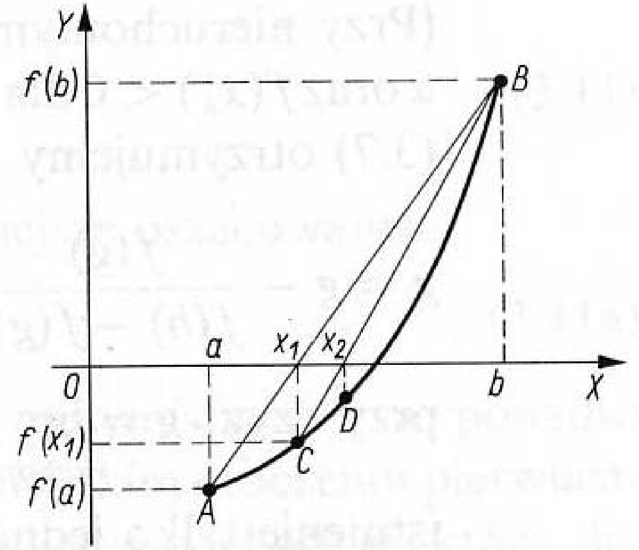
Punkt x_1, w którym cięciwa przecina oś OX jest pierwszym przybliżeniem szukanego pierwiastka.

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

Metoda regula-falsi

Jeżeli f(x_1)=0, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem.

Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to przez punkty $C = (x_1, f(x_1))$ oraz przez ten z punktów A i B, którego rzędna ma znak przeciwny niż $f(x_1)$ prowadzimy następną cięciwę. Punkt x_2, w którym cięciwa przetnie oś OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie z zadaną dokładnością. Tworzymy ciąg: $x_1, x_2, \ldots x_n$



$$x_0 = 0 \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k) \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Metoda regula-falsi

Można wykazać, że przy przyjętych założeniach ciąg x_1, x_2, …x_n jest rosnący i ograniczony a więc zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek α czyli $f(\alpha)=0$

Błąd n-tego przybliżenia można ocenić na podstawie:

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha)$$

gdzie c jest zawarte w przedziale od x_n do α

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$$

$$m = \inf_{x \in <a,b>} |f'(x)|$$

Metoda regula-falsi

Przykład: Znaleźć dodatni pierwiastek równania:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

w przedziale (1,2) i ocenić błąd przybliżenia.

Sprawdzamy założenia:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3 \qquad f''(x) = 6x + 2$$

$$f'(x) > 0 \;\; i \;\; f''(x) > 0 \;\; dla \;\; x > 1$$

$$f(1) = -4 \quad f(2) = 3$$

Metoda regula-falsi

Równanie cięciwy przechodzącej przez punkty A(1,-4) i B(2,3)

$$y+4=\frac{3+4}{2-1}(x-1)$$

Aby y=0, x_1=1,57142

Znajdujemy f(x_1)=-1.36449. Ponieważ f(x_1)<0, to cięciwę prowadzimy przez punkty B(2,3) i C(1,57142,-1,36449)

W drugim przybliżeniu x_2=1,70540

Ocena błędu przybliżenia w przykładzie:

$$m=\inf_{x\in<a,b>}\left|f'(x)\right|$$

Metoda regula-falsi

Ocena błędu przybliżenia w przykładzie:

$$m = \inf_{x \in <a,b>} \left| f'(x) \right|$$

$$m = \inf_{x \in <1,2>} \left| 3x^2 + 2x - 3 \right| = 2$$

$f(x_2)=-0,24784$

$$\left| x_n - \alpha \right| < \frac{0,24784}{2} < 0,124$$

Ponieważ ciąg przybliżeń jest rosnący, więc

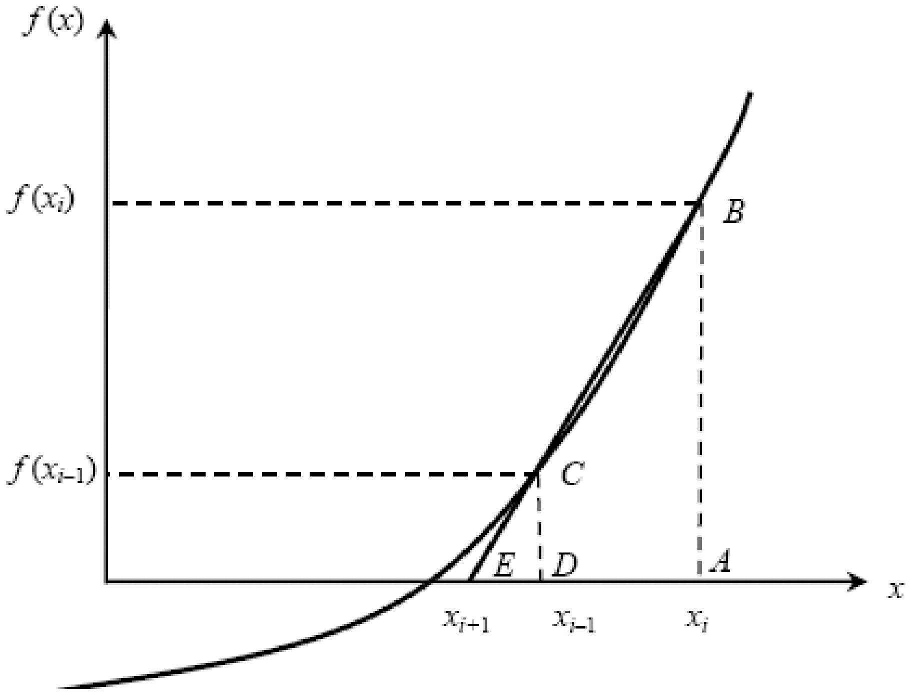
$$1,70540 < \alpha < 1,8294$$

Metoda regula-falsi a metoda siecznych

Wadą metody jest jej stosunkowo **powolna zbieżność**.

Metodę regula-falsi można znacznie ulepszyć tzn. poprawić jej zbieżność, jeżeli zrezygnujemy z żądania, aby funkcja f(x) miała w punktach wytyczających następną cięciwę różne znaki (z wyjątkiem pierwszej iteracji).

Jest to metoda siecznych



Metoda siecznych

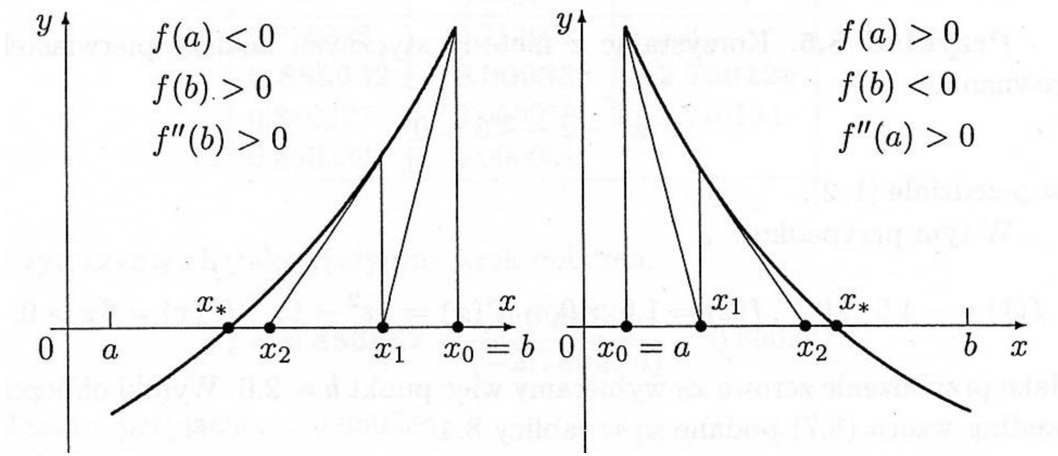
W celu obliczenia przybliżenia x_{i+1} korzystamy z dwóch wcześniej wyznaczonych punktów: x_i i x_{i-1} . Wzór określający ciąg przybliżeń jest następujący:

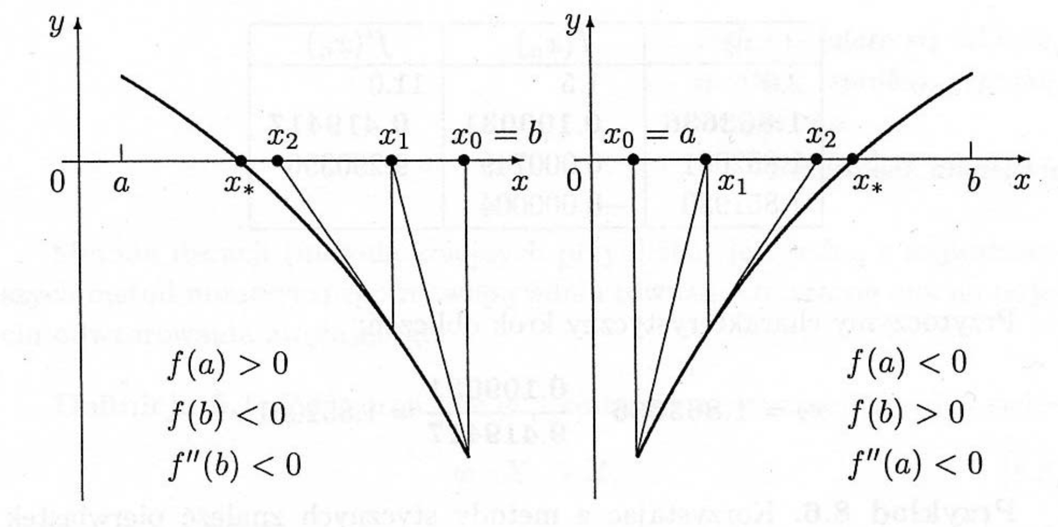
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Wadą metody siecznych jest to, że może nie być zbieżna do pierwiastka (np. gdy początkowe przybliżenia nie leżą dość blisko pierwiastka). Dodatkowo ciąg przybliżeń powinien być malejący (jeżeli odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest tego samego rzędu co oszacowanie błędu, jakim jest obarczona, to następne przybliżenie może być całkowicie błędne).

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Zakładamy, że f(x) ma różne znaki na końcach przedziału <a,b> oraz f′(x) i f″(x) mają stały znak.

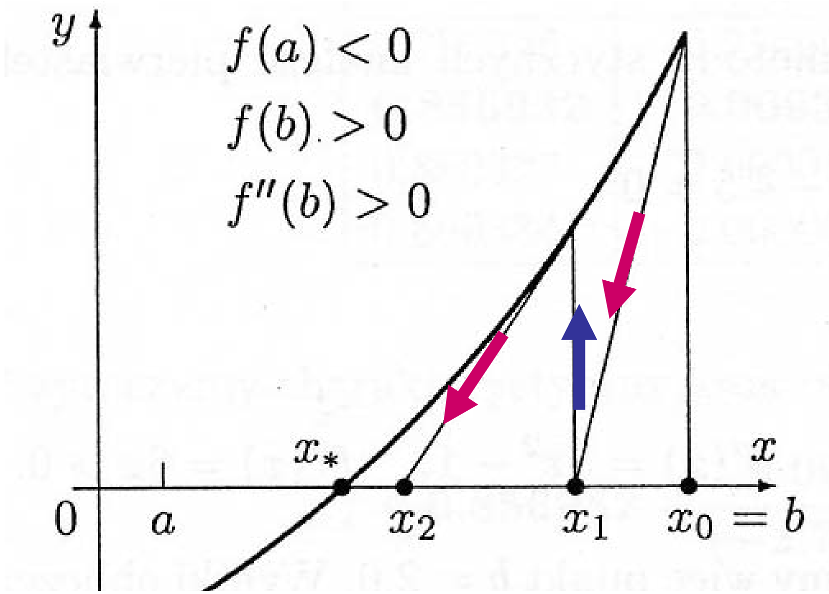




Jako pierwsze przybliżenie pierwiastka przyjmujemy ten koniec przedziału,
w którym **funkcja *f* i jej druga pochodna mają ten sam znak**, tzn.
gdy $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$,
gdzie $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Z wybranego końca prowadzimy styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$. Punkt x_1, będący punktem przecięcia stycznej z osią OX jest kolejnym przybliżeniem pierwiastka. Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to z punktu o współrzędnych (x_1, $f(x_1)$) prowadzimy następną styczną. Punkt x_2, w którym styczna przecina się z osią OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie z zadaną dokładnością.



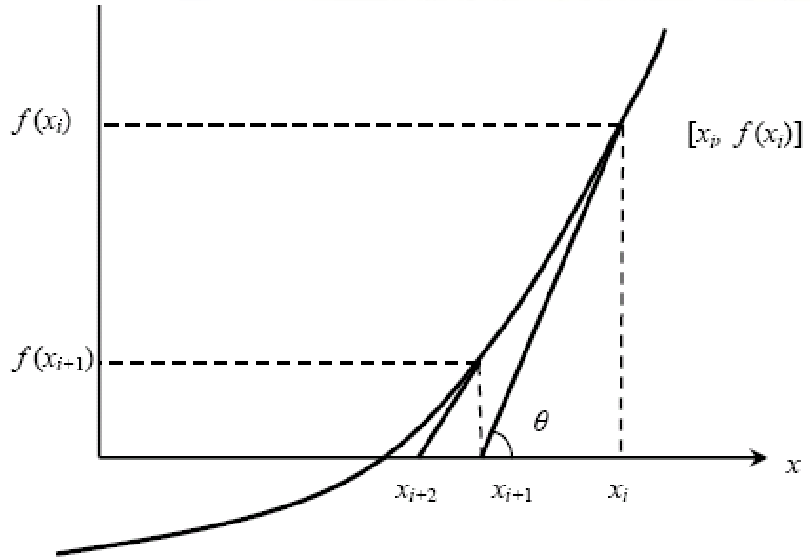
$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Wzór określający kolejne przybliżenia szukanego rozwiązania:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Jest to zbieżny ciąg przybliżeń malejący ($x_{n+1} < x_n$) lub rosnący ($x_{n+1} > x_n$) i ograniczony z dołu lub z góry.

Błąd n-tego przybliżenia można ocenić podobnie jak w metodzie regula-falsi:

$$\left|x_{n+1} - \alpha\right| \approx \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right|$$

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Znanym przykładem zastosowania metody stycznych jest **algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego**.

Pierwiastek kwadratowy z liczby dodatniej c jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$x^2 - c = 0$$

Obliczenia: $f(x) = x^2 - c \qquad f'(x) = 2x$

Stosując metodę stycznych: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - c}{2x_n}$

Otrzymujemy:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Dane jest równanie f(x)=0 gdzie f(x) jest funkcją ciągłą. Należy wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste tego równania.

Równanie to sprowadzamy do równania równoważnego:

$$x = \varphi(x)$$

Graficzna interpretacja oparta jest na wykresach funkcji:

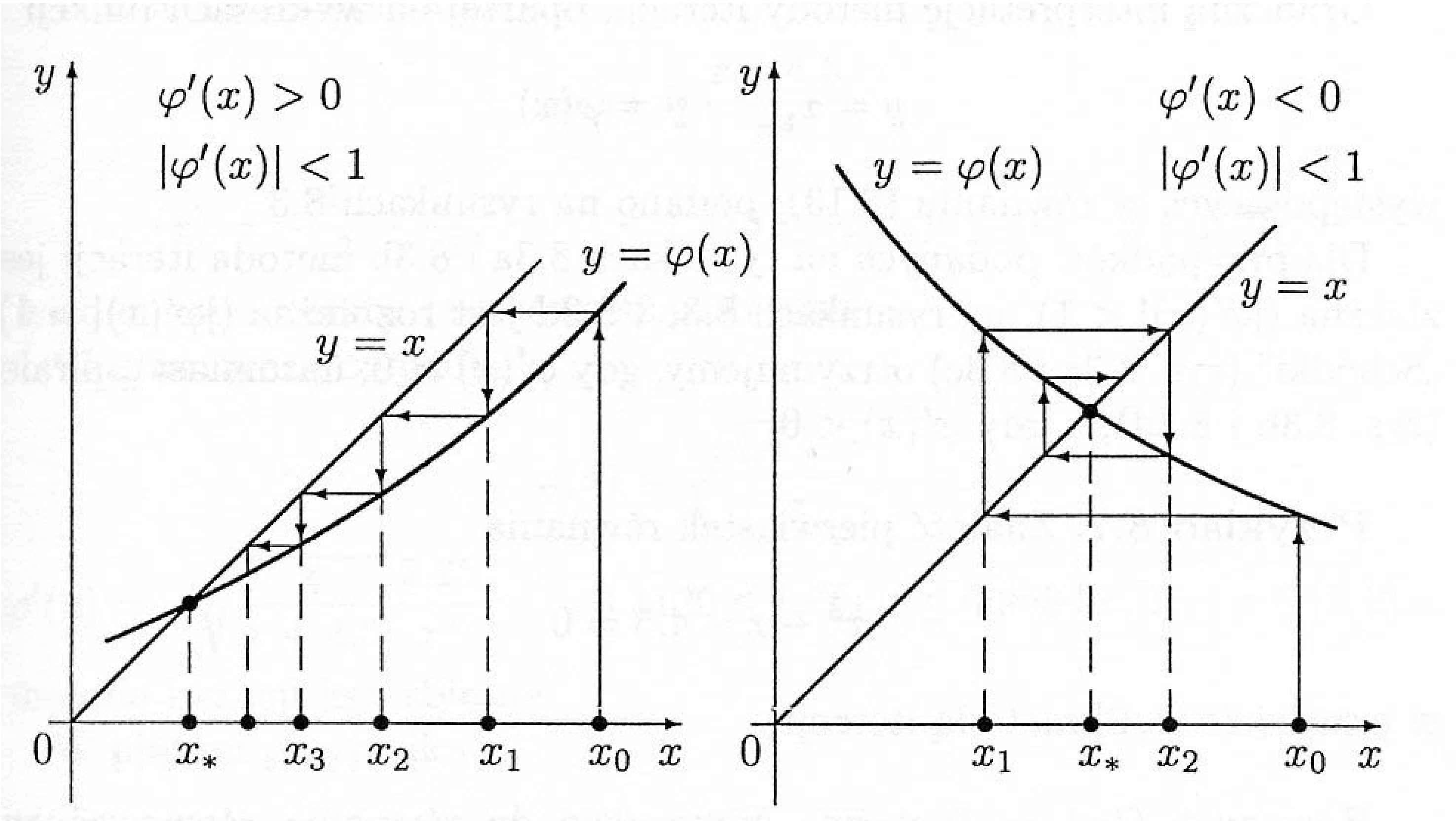
$$y = x \qquad y = \varphi(x)$$

Metoda iteracji jest zbieżna gdy

$$|\varphi'(x)| < 1$$

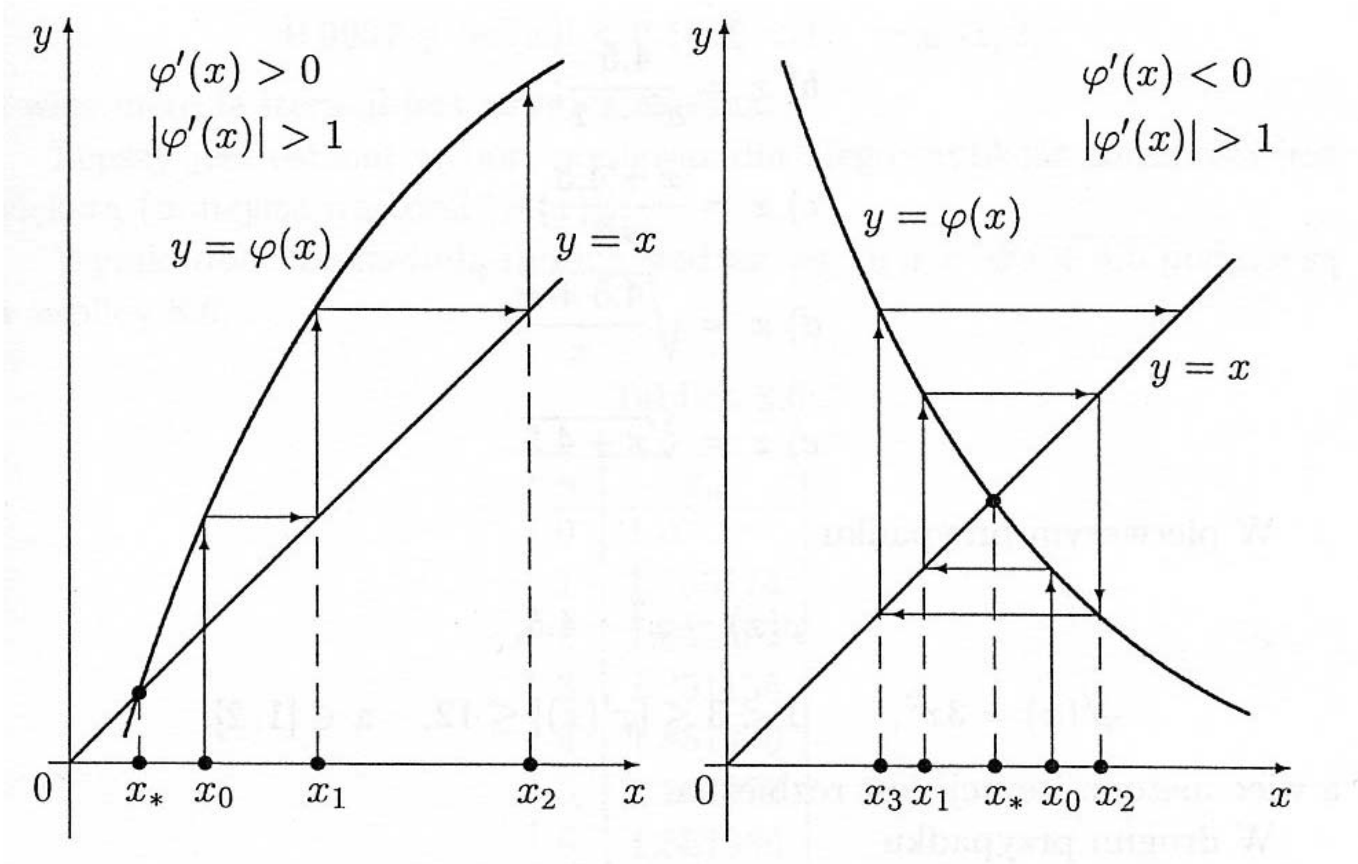
Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Przypadki gdy metoda jest zbieżna:



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Przypadki gdy metoda jest rozbieżna:



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Zadanie domowe:

Znaleźć pierwiastek równania: $x^3 - x - 4.5 = 0$

w przedziale [1,2] metodą iteracji

Równanie f(x)=0 można sprowadzić do równania równoważnego x=φ(x) w różny sposób:

$$a)\quad x = x^3 - 4.5$$

$$b)\quad x = \frac{4.5}{x^2+1}$$

$$c)\quad x = \frac{x+4.5}{x^2}$$

$$d)\quad x = \sqrt{\frac{x+4.5}{x}}$$

$$e)\quad x = \sqrt[3]{x+4.5}$$

Sprawdzić, który sposób zapewnia zbieżność metody

Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Zadanie domowe:

Znaleźć pierwiastek równania: $$x^3 - x - 4.5 = 0$$

w przedziale [1,2] metodą iteracji

Równanie f(x)=0 można sprowadzić do równania równoważnego x=φ(x) w różny sposób:

$$a)\quad x = x^3 - 4.5$$

$$b)\quad x = \frac{4.5}{x^2+1}$$

$$c)\quad x = \frac{x+4.5}{x^2}$$

$$d)\quad x = \sqrt{\frac{x+4.5}{x}}$$

$$e)\quad x = \sqrt[3]{x+4.5}$$

Sprawdzić, który sposób zapewnia zbieżność metody

Poszukiwanie minimów funkcji jednej zmiennej

Zadanie znajdowania minimum funkcji f(x) można sprowadzić do rozwiązania równania f'(x)=0

Wyznaczenie pochodnej funkcji może być zbyt trudne lub funkcja może nie być różniczkowalna.

Jeżeli funkcja f jest dostatecznie regularna i można ją lokalnie przybliżyć wielomianami niskiego rzędu to można zastosować metody aproksymacyjne.

Jeżeli własności funkcji nie są znane to bezpieczniejsze są metody podziału.

Metody podziału

Założenia: f(x) ma minimum w punkcie α należącym do przedziału [a,b], f(x) jest malejąca w przedziale [a, α] i rosnąca w [α,b] czyli jest unimodalna.

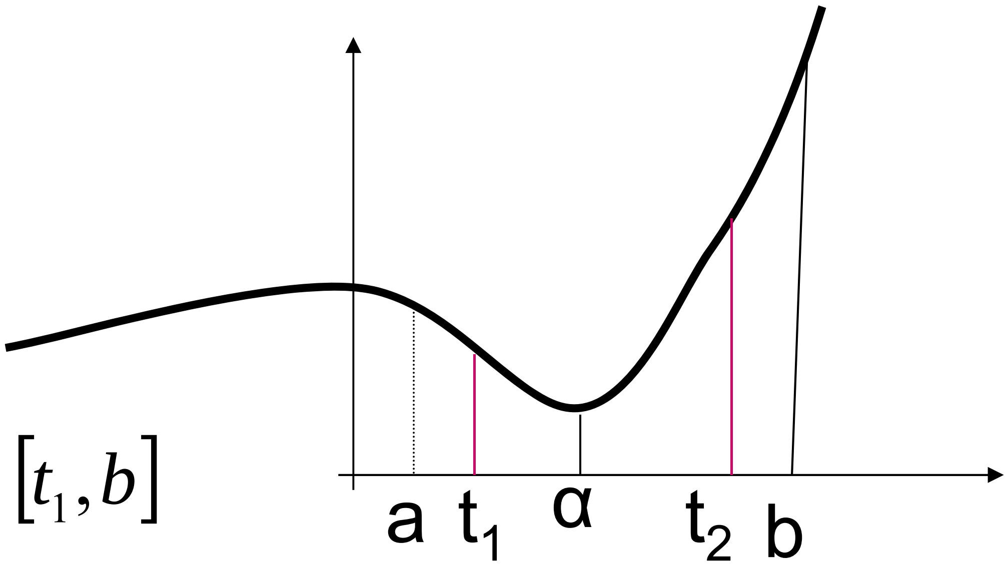
Lemat: Aby zlokalizować punkt α w przedziale [a',b'] o mniejszej długości niż przedział [a,b], wystarczy obliczyć wartość funkcji w dwu punktach wewnątrz przedziału [a,b].

$a<t_1<t_2<b$

Jeżeli $f(t_1) \le f(t_2)$, to

$$\alpha \in [a, t_2]$$

Jeżeli $f(t_1) > f(t_2)$, to $\alpha \in [t_1, b]$



Metoda podziału na 3 równe części

Przyjmujemy punkty podziału przedziału [a,b]:

$$t_1^i = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \qquad t_2^i = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

W każdej iteracji następuje zmniejszenie przedziału 3/2 razy

Po I iteracjach uzyskujemy przedział o długości:

$$b - a = \left(\frac{2}{3}\right)^I \left(b^{(0)} - a^{(0)}\right)$$

Wartość funkcji obliczono 2I razy

Metody podziału

Metoda połowienia

Przyjmujemy punkty podziału na cztery części przedziału [a,b]:

$$t_1^i = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \qquad t_2^i = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \qquad t_3^i = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$$

W każdej iteracji następuje zmniejszenie przedziału 2 razy

Po I iteracjach uzyskujemy przedział o długości:

$$b - a = \left(\frac{1}{2}\right)^I \left(b^{(0)} - a^{(0)}\right)$$

Wartość funkcji obliczono 2I+1 razy

Jest to metoda bardziej ekonomiczna

Metoda optymalnych podziałów

Metoda Johnsona

Najmniejszej liczby obliczeń funkcji wymaga metoda korzystająca z ciągu liczb Fibonacciego.

F_0	1
F_1	1
F_2	2
F_3	3
F_4	5
F_5	8
F_6	13
F_7	21

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

Opis algorytmu:

Definiujemy pożądaną dokładność ρ wyznaczenia położenia minimum α., tzn. chcemy uzyskać taki punkt t, aby

$$\alpha \in [t - \rho, t + \rho]$$

Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

1.Niech: $$c = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{\rho}$$

2. Znajdujemy takie N, aby $F_{N-1} < c \le F_N$

3. Określamy: $$t_1^i = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a$$

$$t_2^i = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a$$

i=1,2,..., N-2

Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

4. W każdej iteracji obliczamy nowe punkty a,b w następujący sposób:

Jeżeli: $f(t_1^i) \leq f(t_2^i)$, to a pozostaje bez zmian, $b=t_2^{(i)}$

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a=t_1^{(i)}$

Po i-tej iteracji długość przedziału [a,b] zostaje zmniejszona

$$\frac{F_{N-1}}{F_{N-i+1}} \; razy$$

bez względu na to, która nierówność jest spełniona

Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

Po (N-2) iteracjach długość przedziału zostaje zmniejszona do wartości

$$(b-a)=\frac{F_{N-1}}{F_N}\cdot\frac{F_{N-2}}{F_{N-1}}\cdots\frac{F_2}{F_3}(b^{(0)}-a^{(0)})=2\cdot\frac{b^{(0)}-a^{(0)}}{F_N}\leq 2\rho$$

Wykonano łącznie N-1 obliczeń wartości funkcji

Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Znaleźć minimum funkcji f(x)=|x| zlokalizowane na przedziale [-4,4]. Pożądana dokładność ρ=1.

(a) Metoda połowienia

$$t_1^1 = \frac{3}{4}(-4) + \frac{1}{4}4 = -2$$

$$t_2^1 = \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{2}4 = 0$$

$$t_3^1 = \frac{1}{4}(-4) + \frac{3}{4}4 = 2$$

Sprawdzamy: f(-2)>f(0) i f(2)>f(0); możemy zawęzić przedział do: [-2,2]

Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Dokonujemy nowego podziału na 4 równe części

$$t_1^{(2)} = \frac{3}{4}(-2) + \frac{1}{4}2 = -1$$

$$t_2^{(2)} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}2 = 0$$

$$t_3^{(2)} = \frac{1}{4}(-2) + \frac{3}{4}2 = 1$$

Sprawdzamy: f(-1)>f(0) i f(1)>f(0); możemy zawęzić przedział do: [-1,1] ale wtedy t=0; f(t)=0

Wykonano łącznie 5 obliczeń wartości funkcji

Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Znaleźć minimum funkcji f(x)=|x| zlokalizowane na przedziale [-4,4]. Pożądana dokładność ρ=1.

(b) Metoda Johnsona

$$c = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{\rho} = \frac{4-(-4)}{1} = 8$$

$$F_{N-1} < c \le F_N \Rightarrow F_4 = 5 < c = 8 \le F_5 = 8$$

zatem N=5

$$t_1^{(1)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-1-1}}{F_{5-1+1}}(4-(-4))+(-4) = \frac{3}{8}8-4 = -1$$

$$t_2^{(1)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-1}}{F_{5-1+1}}(4-(-4))+(-4) = \frac{5}{8}8-4 = 1$$

Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(1)} = -1;\ t_2^{(1)} = 1$$

Szukamy nowych granic przedziału a,b

Jeżeli: $f(t_1^i) \le f(t_2^i)$, to a pozostaje bez zmian, $b = t_2^{(i)}$

ale f(-1)=f(1), czyli a=-4 b=1

Obliczamy nowe punkty podziału:

$$t_1^{(2)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-2-1}}{F_{5-2+1}}(1-(-4))+(-4) = \frac{2}{5}5-4 = -2$$

$$t_2^{(2)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-2}}{F_{5-2+1}}(1-(-4))+(-4) = \frac{3}{5}5-4 = -1$$

Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(2)} = -2;\ t_2^{(2)} = -1$$

Szukamy nowych granic przedziału a,b

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

ale f(-2)>f(-1), czyli a=-2 b=1

Obliczamy nowe punkty podziału:

$$t_1^{(3)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-3-1}}{F_{5-3+1}}(1-(-2))+(-2) = \frac{1}{3}3-2 = -1$$

$$t_2^{(3)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a)+a = \frac{F_{5-3}}{F_{5-3+1}}(1-(-2))+(-2) = \frac{2}{3}3-2 = 0$$

Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(3)} = -1;\; t_2^{(3)} = 0$$

Szukamy nowych granic przedziału a,b

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

ale f(-1)>f(0), czyli a=-1 b=1

$$[a,b] = [-1,1] \Rightarrow t = 0$$

$$f(t) = 0$$

Wykonano łącznie 4 obliczenia wartości funkcji

Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Polega na takim wyborze punktów podziału $t_1^{(i)}$ i $t_2^{(i)}$, aby
• przedział [a,b] zmniejszał swą długość po każdej iteracji tyle samo razy
•po wyznaczeniu punktów nowego podziału, tzn. $t_1^{(i+1)}$ i $t_2^{(i+1)}$, jeden z tych punktów pokrywał się z wyznaczonym punktem podziału w poprzedniej iteracji.

Ma to na celu zmniejszenie liczby obliczeń wartości funkcji, gdyż jedynie w pierwszej iteracji obliczamy dwie wartości funkcji, w następnych zaś już tylko jedną wartość funkcji.

Tę cechę miał omówiony poprzednio algorytm optymalny

Metoda złotego podziału

Wymagania te spełnia algorytm, w którym:

$$t_2^{(i)} - a = b - t_1^{(i)} = \tau(b-a), \quad \tau \in (0,1)$$

$$b - t_2^{(i)} = \tau(b - t_1^{(i)})$$

Stąd: $$\tau^2 + \tau - 1 = 0$$

czyli: $$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62$$

Liczba τ jest stosunkiem boków prostokąta nazywanego przez starożytnych Greków „złotym”

Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Punkty podziału obliczamy ze wzoru:

$$t_1^{(1)} = a + (1-\tau)(b-a)$$

$$t_2^{(1)} = b - (1-\tau)(b-a)$$

Przyjęto mnożnik:

$$1-\tau$$

aby zmniejszyć błędy zaokrągleń przy wyznaczaniu kolejnych punktów podziału

Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Nowe punkty a,b powstają w następujący sposób:

Jeżeli: $f(t_1^i) \leq f(t_2^i)$, to a pozostaje bez zmian, $b = t_2^{(i)}$

$$t_2^{(i+1)} = t_1^{(i)}$$

$$t_1^{(i+1)} = a + (1-\tau)(b-a)$$

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

$$t_1^{(i+1)} = t_2^{(i)}$$

$$t_2^{(i+1)} = b - (1-\tau)(b-a), \quad i = 1,2,3,....$$

Aby wyznaczyć t metodą złotego podziału z dokładnością nie gorszą niż metodą Johnsona, potrzeba co najwyżej jednego dodatkowego obliczenia wartości funkcji.