METODY NUMERYCZNE

Wykład 6.

Rozwiązywanie układów równań liniowych

dr hab. inż. Katarzyna Zakrzewska, prof. AGH

Plan

- Metody dokładne
- Metoda eliminacji Gaussa
- Metoda Gaussa-Seidla
- Rozkład LU
- Metoda Kryłowa
- Metoda LR i QR
- Zdefiniowanie problemu własnego

Układ równań liniowych

Układ równań liniowych:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

gdzie:

- **A** – macierz o m wierszach i n kolumnach
- **x** – wektor o n niewiadomych
- **b** – wektor m danych liczb

możliwe rozwiązania:

- Nieskończenie wiele rozwiązań
- Dokładnie jedno rozwiązanie
- Brak rozwiązania (układ sprzeczny)

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Rozpatrujemy układ *m* równań liniowych z *n* niewiadomymi w postaci

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

o współczynnikach a_{ik} oraz b_i należących do ciała liczbowego *K* (*K* = *R lub K* = *C)*

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Macierzą układu równań nazywamy macierz *A* jego współczynników przy zmiennych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} b_m \end{bmatrix}$$

Macierzą rozszerzoną nazywamy macierz *C*, *oznaczaną także jako A/B,* powstałą z macierzy *A* przez dołączenie do niej kolumny wyrazów wolnych

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

Układ *m* równań liniowych z *n* niewiadomymi ma rozwiązania, jeśli rząd *r* macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej:

$$rz\ A = rz\ C = r$$

Dla dowolnej macierzy jej rząd jest równy *r* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy minor rzędu *k* tej macierzy i każdy minor rzędu większego od *k* jest zerowy.

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli ten wspólny rząd *r* obu macierzy równa się liczbie niewiadomych, to istnieje jedno rozwiązanie, czyli jeden zbiór liczb spełniający równania; jest to ***układ oznaczony***

$$rz\,A = rz\,C = n$$

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli wspólny rząd *r* obu macierzy jest mniejszy od liczby niewiadomych *n,* to *(n – r)* niewiadomych można przyjąć dowolnie, a pozostałe *r* niewiadomych wyznacza się z równań; jest to ***układ nieoznaczony***, bo jego rozwiązania zależą od *(n – r)* parametrów

$$rz\ A = rz\ C < n$$

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli rząd r macierzy głównej jest mniejszy od rzędu macierzy rozszerzonej, to układ równań liniowych nie ma rozwiązań; jest to ***układ sprzeczny***

$$rz\,A \neq rz\,C$$

Pojęcie normy

W przestrzeni **R**^{n}, której elementami są wektory: $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]^T$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,\ |x_2|,\ \ldots,\ |x_n|\}$$

Dla dowolnego wektora **x** є **R**^{n}, obowiązują nierówności:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Metody dokładne - definicja

Jeśli rozwiązanie układu równań **Ax=b** polega na takim przekształceniu danych **A** i **b**, że przy założeniu dokładnie wykonywanych działań arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie, to taką metodę rozwiązania nazywamy metodą dokładną.

Metody dokładne - cechy

- Mała liczba obliczeń potrzebnych do wyznaczenia rozwiązania
- Jeśli zadanie jest źle uwarunkowane numerycznie, to wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem.
- Mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń
- Przekształcenie macierzy **A** obciąża w dużym stopniu pamięć maszyny, zwłaszcza jeśli początkowe dane **A** i **b** należy przechować celem ostatecznego sprawdzenia

Metody dokładne - przykład

Przykład – wzory Cramera

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Sposób 1:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Zakładamy dokładność do 2 cyfr dziesiętnych , każdy wynik przed dalszymi obliczeniami jest zaokrąglany

$$\begin{cases} 0{,}99x_1 + 0{,}70x_2 = 0{,}54 \\ 0{,}70x_1 + 0{,}50x_2 = 0{,}38 \end{cases}$$

$$a_{11}a_{22} = 0{,}99 \cdot 0{,}50 = 0{,}4950 = 0{,}50$$

$$a_{21}a_{12} = 0{,}70 \cdot 0{,}70 = 0{,}4900 = 0{,}49$$

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0{,}50 - 0{,}49 = 0{,}01$$

Metody dokładne - przykład

$$a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0{,}50 \cdot 0{,}54 - 0{,}70 \cdot 0{,}38$$

$$= 0{,}2700 - 0{,}2660 = 0{,}27 - 0{,}27 = 0$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0{,}99 \cdot 0{,}38 - 0{,}70 \cdot 0{,}54$$

$$= 0{,}3762 - 0{,}3780 = 0{,}38 - 0{,}38 = 0$$

$$x_1 = \frac{0}{0{,}01} = 0$$

$$x_2 = \frac{0}{0{,}01} = 0$$

Dokładne rozwiązanie tego układu równań daje wynik:

$$x_1 = 0{,}80 \qquad x_2 = -0{,}36$$

Metody dokładne – przykład cd.

Sposób 2: metoda eliminacji Gaussa

$$0{,}99x_1 + 0{,}70x_2 = 0{,}54$$
$$0{,}70x_1 + 0{,}50x_2 = 0{,}38$$

Eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego równania układu równań. W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0{,}70}{0{,}99} = 0{,}7070 \cong 0{,}71$$

Otrzymujemy:

$$0.70x_1 + 0{,}4949x_2 = 0{,}3818$$
$$0{,}70x_1 + 0{,}50x_2 = 0{,}38$$

Odejmując równania stronami po wcześniejszym zaokrągleniu do 2 cyfr:

$$0{,}00x_2 = 0{,}00$$

czyli układ nieoznaczony, posiadający nieskończenie wiele rozwiązań.

Układy równań z macierzą trójkątną

Macierz trójkątna – definicja

Macierz trójkątną nazywamy macierzą trójkątną dolną (górną), jeżeli wszystkie elementy nad (pod) diagonalą są równe zeru.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \ldots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \ldots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \ldots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna dolna *Macierz trójkątna górna*

Układy równań z macierzą trójkątną

Obliczenie wyznacznika macierzy trójkątnej sprowadza się do wymnożenia elementów leżących na głównej przekątnej:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i} = l_{1,1} \cdot l_{2,2} \cdot \ldots l_{n,n}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i} = u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdot \ldots u_{n,n}$$

Układy równań z macierzą trójkątną

Jeżeli macierz **A** układu n równań z n niewiadomymi **Ax=b** jest macierzą trójkątną (dolną lub górną), to rozwiązanie **x** takiego układu równań można uzyskać wykonując małą liczbę działań arytmetycznych i przy małych błędach zaokrągleń

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Ogólnie

$$x_i = \frac{b_i - a_{in}x_n - \ldots - a_{ii+1}x_{i+1}}{a_{ii}} \qquad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$$

Układy równań z macierzą trójkątną

Koszt obliczeniowy:

Dla wyznaczenia wektora **x** należy wykonać M mnożeń i dzieleń oraz D dodawań:

$$M = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$D = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Metoda eliminacji Gaussa

Etap pierwszy (zwany etapem eliminacji „do przodu” zmiennych)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Wymaganych jest n-1 kroków eliminacji

Metoda eliminacji Gaussa

<u>Krok 1.</u> Od drugiego wiersza odejmujemy pierwszy podzielony przez a_{11} i pomnożony przez a_{21}

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \Big| \; \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\[2ex] a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

Metoda eliminacji Gaussa

Podobnie postępujemy z pozostałymi wierszami:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

gdzie: $a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$

.

.

.

$$a'_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Krok 2. Powtarzamy procedurę kroku 1 dla trzeciego wiersza

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad \Big| \; \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a'_{32}x_2 + a'_{23}\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}x_3 + \ldots + a'_{2n}\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}x_n = \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\left(a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{23}\right)x_3 + \ldots + \left(a'_{3n} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}a'_{2n}\right)x_n = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}}b'_2$$

Metoda eliminacji Gaussa

Po kroku 2 otrzymujemy

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Metoda eliminacji Gaussa

Pod koniec kroku n-1 układ równań przybiera postać:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 + \ldots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'}$$

$$a_{33}^{''}x_3 + \ldots + a_{3n}^{''}x_n = b_3^{''}$$

....

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Po przeprowadzeniu n-1 kroków eliminacji zmiennych otrzymane równania możemy zapisać w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \cdots & a_{2n}' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \cdots & a_{3n}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2' \\ b_3'' \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Otrzymana macierz jest macierzą trójkątną!

Metoda eliminacji Gaussa

Etap drugi zwany postępowaniem odwrotnym (podstawieniem wstecznym)

Ponieważ otrzymana macierz jest macierzą trójkątną korzystamy ze wzorów:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - a_{i,i+1}^{(i-1)} x_{i+1} - a_{i,i+2}^{(i-1)} x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}^{(i-1)} x_n}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad dla \ i = n-1,\ldots,1$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad dla \ \ i = n-1,\ldots,1$$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa – koszt obliczeniowy

Łączna ilość mnożeń i dzieleń:

$$M = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$$

Łączna ilość dodawań:

$$D = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

Przykład:

Czas t (s)	Prędkość (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Prędkość rakiety została przybliżona wielomianem:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12.$$

Znaleźć współczynniki a_1, a_2, a_3 metodą eliminacji Gaussa i prędkość w chwili t = 6 s

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \,, \quad 5 \le t \le 12.$$

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$t_1 = 5s, v(5) = 106{,}8\ m/s$$

$$t_2 = 8s, v(5) = 177{,}2\ m/s$$

$$t_3 = 12\ s, v(5) = 279{,}2\ m/s$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1 przez 25 i pomnożyć przez 64

$$\frac{64}{25} = 2.56$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix} \times 2.56 = \begin{bmatrix} 64 & 12.8 & 2.56 & \vdots & 273.408 \end{bmatrix}$$

Odjąć wynik od równania nr 2

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 64 & 12.8 & 2.56 & \vdots & 273.408 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \end{bmatrix} \end{array}$$

Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1 przez 25 i pomnożyć przez 144

$$\frac{144}{25} = 5.76$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix} \times 5.76 = \begin{bmatrix} 144 & 28.8 & 5.76 & \vdots & 615.168 \end{bmatrix}$$

Odjąć wynik od równania nr 3

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 144 & 28.8 & 5.76 & \vdots & 615.168 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix} \end{array}$$

Po pierwszym kroku eliminacji

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 2 przez -4.8 i pomnożyć przez -16.8

$$\frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \end{bmatrix} \times 3.5 = \begin{bmatrix} 0 & -16.8 & -5.46 & \vdots & -336.728 \end{bmatrix}$$

Odjąć wynik od równania nr 3

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & 335.968 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & -16.8 & -5.46 & \vdots & -336.728 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.76 \end{bmatrix} \end{array}$$

Po drugim kroku eliminacji

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.76 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\left[\begin{array}{ccccc} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.7 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Eliminacja wsteczna

Obliczanie a_3

$$0.7a_3 = 0.76$$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$

$$a_3 = 1.08571$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_2

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8} \qquad a_3 = 1.08571$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$

$$a_2 = 19.6905$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.2 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = 1.08571 \qquad a_2 = 19.6905$$

Obliczanie a_1

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25}$$

$$= 0.290472$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0.290472 t^2 + 19.6905 t + 1.08571, \quad 5 \le t \le 12$$

$$v(6) = 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 = 129.686 \text{ m/s.}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Wady metody:

- Może nastąpić zatrzymanie procesu obliczeń w powodu dzielenia przez zero.
- Jest szczególnie podatna na narastanie błędu zaokrąglenia.

Zalety metody:

- Liczba wykonywanych działań w metodzie eliminacji Gaussa jest bez porównania mniejsza niż przy pomocy wzorów Cramera

W przypadku 15 równań:

M=1345 mnożeń w metodzie eliminacji Gaussa i $M=5\cdot10^{12}$ dla wzorów Cramera

Maszyna cyfrowa wykonująca 10^6 mnożeń na sekundę:

0,01 s w metodzie eliminacji Gaussa i ponad rok dla wzorów Cramera

Metoda eliminacji Gaussa

Dzielenie przez zero może wystąpić podczas każdego kroku eliminacji zmiennych

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 6 & 5 & 3 \\ 24 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 6.5 \\ 0 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

w następnym kroku, dzielenie przez zero

Metoda eliminacji Gaussa

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie dokładne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych w każdym kroku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.999995 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z dokładnością 5 cyfr dziesiętnych w każdym kroku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.5 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta (ang. partial pivoting)

- z częściowym wyborem elementu podstawowego

- Zapobiega dzieleniu przez zero.
- Zmniejsza błąd numeryczny.

Elementem podstawowym nazywamy ten element macierzy A, za pomocą którego eliminujemy zmienną z dalszych równań. Dotychczas jako elementy podstawowe wybieraliśmy element leżący na diagonali

$$a_{kk}$$

Stosując częściowy wybór elementu podstawowego wybieramy ten z elementów k-tej kolumny w k-tej macierzy, który ma największy moduł. Przez zmianę kolejności wierszy w macierzy można uzyskać element podstawowy leżący na diagonali

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości w pierwszej kolumnie to: $|25|, |64|, |144|$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Zamiana wiersza trzeciego z pierwszym

Metoda eliminacji Gaussa

Przykład :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości w pierwszej kolumnie to: $|25|, |64|, |144|$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Zamiana wiersza trzeciego z pierwszym

Metoda Gaussa – Crouta w obliczaniu wyznaczników

Obliczyć wyznacznik macierzy [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Po eliminacji Gaussa

$$[B] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Użyteczne twierdzenie: Jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez dodanie lub odjęcie od jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę to nie zmienia to wyznacznika

det(A)=det(B)=25 (-4,8) (0.7)=-84,00

Metoda Gaussa – Crouta w obliczaniu wyznaczników

Po zastosowaniu metody częściowego wyboru elementu podstawowego otrzymaliśmy macierz $[C]$

$$[C]=\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Użyteczne twierdzenie: Jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez przestawienie jednego wiersza z drugim to zmienia się tylko znak wyznacznika

det(C)=(-)(-)det(B)=144 (2.917) (-0.2)=-84,00

tu wystąpiło dwukrotne przestawienie wierszy

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1 przez 144 i pomnożyć przez 64

$$\frac{64}{144} = 0.4444$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \times 0.4444 = \begin{bmatrix} 63.99 & 5.333 & 0.4444 & \vdots & 124.1 \end{bmatrix}$$

Odjąć rezultat od równania nr 2

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 63.99 & 5.333 & 0.4444 & \vdots & 124.1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccccc}144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2\\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10\\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8\end{array}\right]$$

Podzielić równanie 1 przez 144 i pomnożyć przez 25

$$\frac{25}{144} = 0.1736$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2\end{array}\right] \times 0.1736 = \left[\begin{array}{ccccc}25.00 & 2.083 & 0.1736 & \vdots & 48.47\end{array}\right]$$

Odjąć rezultat od równania nr 3

$$\begin{array}{r}\left[\begin{array}{ccccc}25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8\end{array}\right]\\ -\left[\begin{array}{ccccc}25 & 2.083 & 0.1736 & \vdots & 48.47\end{array}\right]\\ \hline \left[\begin{array}{ccccc}0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33\end{array}\right]\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2\\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10\\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33\end{array}\right]$$

Metoda eliminacji Gaussa

Wartości w drugiej kolumnie drugiego i trzeciego wiersza to:

$$|2.667|, |2.917|$$

Maksimum to 2.917 w trzecim wierszu

Zamiana wiersza trzeciego z drugim

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 2 przez 2.917 i pomnożyć przez 2.667

$$\frac{2.667}{2.917} = 0.9143.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix} \times 0.9143 = \begin{bmatrix} 0 & 2.667 & 0.7556 & \vdots & 53.33 \end{bmatrix}$$

Odjąć rezultat od równania nr 3

$$\begin{array}{r} \begin{bmatrix} 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 2.667 & 0.7556 & \vdots & 53.33 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.2 & \vdots & -0.23 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 0 & -0.2 & \vdots & -0.23 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279.2 \\ 58.33 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_2

$$2.917a_2 + 0.8264a_3 = 58.33$$

$$a_2 = \frac{58.33 - 0.8264a_3}{2.917}$$

$$= \frac{58.33 - 0.8264 \times 1.15}{2.917}$$

$$= 19.67$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279.2 \\ 58.33 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_1

$$144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279.2$$

$$a_1 = \frac{279.2 - 12a_2 - a_3}{144}$$

$$= \frac{279.2 - 12 \times 19.67 - 1.15}{144}$$

$$= 0.2917$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie to:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2917 \\ 19.67 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

Metoda Gaussa – Seidla

Układ n równań z n niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Metoda Gaussa – Seidla

Przekształcenie równań do postaci:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \longleftarrow \text{z równania 1}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \longleftarrow \text{z równania 2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

z n-1

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 \ldots\ldots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \longleftarrow \text{z równania n}$$

Metoda Gaussa – Seidla

Postać ogólna dla i - tego równania

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Jest to metoda iteracyjna

Metoda Gaussa – Seidla

Zakładamy początkowe wartości od x_1 do x_n i podstawiamy je do wcześniej przekształconych równań

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Obliczamy błąd względny uzyskanych nowych wartości:

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

Procedurę powtarzamy iteracyjnie aż do uzyskania odpowiedniego wartości o zadawalającym błędzie.

Metoda Gaussa - Seidla

Przykład:

Czas t (s)	Prędkość (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Prędkość rakiety została przybliżona wielomianem:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12.$$

Znaleźć współczynniki a_1, a_2, a_3 metodą Gaussa-Seidla i prędkość w chwili t = 6 s

Metoda Gaussa – Seidla

Postać równania:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Po wstawieniu danych:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości przyjęte do pierwszej iteracji:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Metoda Gaussa – Seidla

Przekształcenie równań:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64a_1 - a_3}{8}$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144a_1 - 12a_2}{1}$$

Metoda Gaussa – Seidla

Pierwsza iteracja:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(2) - (5)}{25} = 3.6720$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(3.6720) - (5)}{8} = -7.8510$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(3.6720) - 12(-7.8510)}{1} = -155.36$$

Metoda Gaussa – Seidla

Znajdowanie błędu względnego pierwszej iteracji:

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{3.6720 - 1.0000}{3.6720}\right| \times 100 = 72.76\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{-7.8510 - 2.0000}{-7.8510}\right| \times 100 = 125.47\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{-155.36 - 5.0000}{-155.36}\right| \times 100 = 103.22\%$$

Wyniki pierwszej iteracji:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

Maksymalny błąd względny to 125.47%

Metoda Gaussa – Seidla

Druga iteracja:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

Wyniki pierwszej iteracji:

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(-7.8510) - 155.36}{25} = 12.056$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(12.056) - 155.36}{8} = -54.882$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(12.056) - 12(-54.882)}{1} = -798.34$$

Metoda Gaussa – Seidla

Znajdowanie błędu względnego drugiej iteracji:

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{12.056 - 3.6720}{12.056}\right| x100 = 69.543\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{-54.882 - (-7.8510)}{-54.882}\right| x100 = 85.695\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{-798.34 - (-155.36)}{-798.34}\right| x100 = 80.540\%$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.056 \\ -54.882 \\ -798.54 \end{bmatrix}$$

Maksymalny błąd względny to 85.70%

Metoda Gaussa – Seidla

Iteracja	a_1	$\left\|\in_a\right\|_1 \%$	a_2	$\left\|\in_a\right\|_2 \%$	a_3	$\left\|\in_a\right\|_3 \%$
1	3.6720	72.767	−7.8510	125.47	−155.36	103.22
2	12.056	69.543	−54.882	85.695	−798.34	80.540
3	47.182	74.447	−255.51	78.521	−3448.9	76.852
4	193.33	75.595	−1093.4	76.632	−14440	76.116
5	800.53	75.850	−4577.2	76.112	−60072	75.963
6	3322.6	75.906	−19049	75.972	−249580	75.931

Wyniki kolejnych iteracji różnią się zacznie od prawidłowych:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29048 \\ 19.690 \\ 1.0857 \end{bmatrix}$$

Kiedy zatem ta metoda jest zbieżna?

Metoda Gaussa – Seidla

Jeżeli macierz jest silnie diagonalnie dominująca to metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}$$ dla wszystkich *i*

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}$$ przynajmniej dla jednego *i*

Metoda Gaussa – Seidla

Przykład macierzy diagonalnie dominującej

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| = 8$$

$$|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| = 4$$

$$|a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| = 10$$

Rozkład LU

Rozkład LU to kolejny sposób na rozwiązanie układu n równań z n niewiadomymi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Macierz A można przedstawić jako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

gdzie:

L – dolna macierz trójkątna

U – górna macierz trójkątna

Rozkład LU

Zapisując układ równań: $[A][X]=[C]$

Zakładając że: $[A]=[L][U]$

$$[L][U][X]=[C]$$

Mnożąc przez: $[L]^{-1}$

$$[L]^{-1}[L][U][X]=[L]^{-1}[C]$$

ale: $[L]^{-1}[L]=[I]$

macierz jednostkowa

$$[I][U][X]=[L]^{-1}[C]$$

ale: $[I][U]=[U]$

zatem: $[U][X]=[L]^{-1}[C]$

$$[L]^{-1}[C]=[Z]$$

$$[L][Z]=[C]$$

$$[U][X]=[Z]$$

Rozkład LU

$$\underbrace{[U][X]}=\underbrace{[L]^{-1}[C]}$$

Można zapisać $\boxed{[U][X]=[Z]}$ $\quad [L]^{-1}[C]=[Z]$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[L][Z]=[C]}$$

Rozkład LU

Jeśli dany jest układ równań:

$$[A][X]=[C]$$

Należy dokonać dekompozycji macierzy **A** na macierze **L** oraz **U**

Rozwiązać układ równań w poszukiwaniu macierzy **Z**:

$$[L][Z]=[C]$$

Rozwiązać układ równań w poszukiwaniu macierzy **X**:

$$[U][X]=[Z]$$

Rozkład LU

Dekompozycja macierzy **A** na **L** oraz **U**:

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

U – jest macierzą wyznaczaną podczas pierwszego etapu eliminacji Gaussa

L – jest macierzą współczynników użytych podczas pierwszego etapu eliminacji Gaussa

Rozkład LU - przykład

Aby odnaleźć kształt obiektu z obrazów powierzchni w trzech kierunkach, trzeba rozwiązać np. następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2425 & 0 & -0{,}9701 \\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701 \\ -0{,}2357 & -0{,}2357 & -0{,}9428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 239 \end{bmatrix}$$

Po prawej stronie znajdują się natężenia światła od środka obrazu. Macierz współczynników zależy od kierunku źródła światła w stosunku do aparatu. Niewiadomymi są **intensywności obrazu**, które będą określać kształt obiektu. **Odnajdziemy wartości x_1, x_2, x_3 za pomocą dekompozycji LU**

Rozkład LU – przykład cd.

Rozwiązanie:

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Poszukujemy macierzy [L] i [U].
Macierz [U] wyznaczymy metodą eliminacji Gaussa.

Krok pierwszy:

$$wiersz2-\left[\frac{wiersz1}{0{,}2425}\right]\times(0)=\begin{bmatrix}0{,}2425 & 0 & -0{,}9701\\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701\\ -0{,}2357 & -0{,}2357 & -0{,}9428\end{bmatrix}$$

$$wiersz3-\left[\frac{wiersz1}{0{,}2425}\right]\times(-0{,}2357)=\begin{bmatrix}0{,}2425 & 0 & -0{,}9701\\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701\\ 0 & -0{,}2357 & -1{,}8857\end{bmatrix}$$

Krok drugi:

$$wiersz3-\left[\frac{wiersz2}{0{,}2425}\right]\times(-0{,}2357)=\begin{bmatrix}0{,}2425 & 0 & -0{,}9701\\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701\\ 0 & 0 & -2{,}8286\end{bmatrix}$$

Macierz współczynników [U] wynosi:

$$[U]=\begin{bmatrix}0{,}2425 & 0 & -0{,}9701\\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701\\ 0 & 0 & -2{,}8286\end{bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz [L]:

$$[L]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1\end{bmatrix}$$

Rozkład LU - przykład

Znajdowanie macierzy **L**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

z pierwszego kroku znajdowania macierzy **U**

$$\ell_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0}{0{,}2425} = 0$$

$$\ell_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-0{,}2357}{0{,}2425} = -0{,}97196$$

z drugiego kroku znajdowania macierzy **U**

$$\ell_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-0{,}2357}{0{,}2425} = -0{,}97196$$

Rozkład LU - przykład

Kiedy macierze [L] i [U] są znane, spróbujemy rozwiązać układ **[L][Z]=[C]**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,97196 & -0,97196 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 239 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 247$$

$$z_2 = 248$$

$$z_3 = 239 - (-0,97196)z_1 - (-0,97196)z_2$$

$$z_3 = 720,12$$

Rozkład LU - przykład

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 720{,}12 \end{bmatrix}$$

Znając już [Z] rozwiązujemy układ **[U][X]=[Z]**

$$\begin{bmatrix} 0{,}2425 & 0 & -0{,}9701 \\ 0 & 0{,}2425 & -0{,}9701 \\ 0 & 0 & -2{,}8286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 720{,}12 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU - przykład

Rozwiązując układ równań:

$$0,2425\,x_1 + (-0,9701)\,x_3 = 247$$

$$0,2425\,x_2 + (-0,9701)\,x_3 = 248$$

$$-2,8286\,x_3 = 720,12$$

otrzymamy szukany wektor x:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10905 \\ 4,2328 \\ -254,59 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU - przykład

Zadanie domowe:
Rozwiązać układ opisujący 3-fazowy obwód AC:

$$\begin{bmatrix} 0.7460 & -0.4516 & 0.0100 & -0.0080 & 0.0100 & -0.0080 \\ 0.4516 & 0.7460 & 0.0080 & 0.0100 & 0.0080 & 0.0100 \\ 0.0100 & -0.0080 & 0.7787 & -0.5205 & 0.0100 & -0.0080 \\ 0.0080 & 0.0100 & 0.5205 & 0.7787 & 0.0080 & 0.0100 \\ 0.0100 & -0.0080 & 0.0100 & -0.0080 & 0.8080 & -0.6040 \\ 0.0080 & 0.0100 & 0.0080 & 0.0100 & 0.6040 & 0.8080 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ar} \\ I_{ai} \\ I_{br} \\ I_{bi} \\ I_{cr} \\ I_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0.000 \\ -60.00 \\ -103.9 \\ -60.00 \\ 103.9 \end{bmatrix}$$

Find the values of I_{ar}, I_{ai}, I_{br}, I_{bi}, I_{cr}, and I_{ci} using LU decomposition.

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Jeśli macierz A układu równań jest macierzą symetryczną dodatnio określoną to jej dekompozycja LU ma prostszą postać nazywaną

dekompozycją Choleskiego

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Macierz trójkątna górna U ma taką samą zawartość elementową jak macierz trójkątna dolna L.
<u>**Wyznaczyć trzeba dwukrotnie mniej elementów macierzy.**</u>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{N,1} & \cdots & \cdots & l_{N,N} \end{bmatrix}$$

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Poszczególne elementy macierzy L są wyznaczone wg zależności:

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} \qquad l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}, \quad i = 2,3,\ldots,N$$

$$l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k}}{l_{j,j}}, \quad j = 2,3,\ldots,i-1$$

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Aby przeprowadzić rozkład LL^T należy wykonać:

$$M = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$$

Operacji mnożenia i dzielenia

$$D = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

Operacji dodawania i odejmowania

n – obliczeń pierwiastka kwadratowego

Problem własny – pojęcia podstawowe

Często przy tworzeniu modeli matematycznych wykorzystywanych do symulacji zjawisk fizycznych czy zachowania się układu, zachodzi potrzeba rozwiązania tzw. **problemu własnego:**

$$Ax_k = \lambda_k x_k \qquad\qquad A = \left[a_{ii}\right]$$

-*A* jest macierzą kwadratowa o wymiarach *n x n*

-x_k jest wektorem własnym macierzy odpowiadającej wartości własnej λ_k

Problem własny – pojęcia podstawowe

Ciąg wszystkich wartości własnych nazywamy widmem macierzy **A** i oznaczamy **Sp(A).** Z definicji wartości i wektora własnego wynika:

$$(A-\lambda I)x=0$$

Macierz (A-λI) jest osobliwa, więc:

$$\det(A-\lambda I)x=0$$

Wyznacznik ten jest wielomianem stopnia n zmiennej λ:

$$w(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(-1)^n(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0)$$

Problem własny – pojęcia podstawowe

Dla dowolnej macierzy ***A*** istnieje macierz nieosobliwa ***P*** (która może mieć elementy zespolone) i zachodzi pomiędzy nimi związek:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k \end{bmatrix} \qquad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz definiuje postać **kanoniczną Jordana**:

$$k = 1,2,\ldots K \le n$$

λ_i- jest wartością własną macierzy A i może wystąpić w wielu macierzach J_k

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Jeśli:

$$w(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

jest równaniem charakterystycznym macierzy *A* to:

$$w(A) = 0$$

Metoda Kryłowa poszukiwania zer równania charakterystycznego

$$w(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i = 0$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia:

$$w(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i = 0$$

Co dla dowolnego wektora ***y*** daje:

$$A^n y + \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i y = 0$$

Układ n równań na n niewiadomych: $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$

Do jego utworzenia potrzeba jednak *n^3* obliczeń oraz $1/3 * n^3$ aby go rozwiązać

Wyznaczanie wartości własnych metodą LR

W metodzie tej iteracyjnie przekształcamy macierz A uzyskując ciąg:

$$A = A_1 \to A_2 \to \dots \to A_m$$

w którym ostatni element stanowi macierz trójkątną górną.
Elementy diagonalne macierzy $\boldsymbol{A_m}$ stanowią natomiast ciąg wartości własnych macierzy $\boldsymbol{A}$ czyli

$$\lim_{i \to \infty} a_{jj}^{(i)} = \lambda_j$$

Wyznaczanie wartości własnych metodą LR

W każdej iteracji wyznaczamy rozkład $\boldsymbol{A_i}$ na iloczyn macierzy trójkątnej dolnej $\boldsymbol{L}$ z jedynkami na diagonali oraz macierzy trójkątnej górnej $\boldsymbol{R}$:

$$A_i = L_i R_i$$

Przekształcamy macierz w następujący sposób:

$$A_{i+1} = L_{i+1} R_{i+1} = R_i L_i$$

Rozkład LR może nie istnieć i/lub jego znalezienie jest źle uwarunkowane

Macierze $\boldsymbol{A_i}$ oraz $\boldsymbol{A_{i+1}}$ są podobne

$$A_i = L_i R_i, \; L_i^{-1} A_i = R_i, \;\; A_i R_i^{-1} = L_i$$

$$A_{i+1} = R_i L_i = L_i^{-1} A L_i = R_i A R_i^{-1}$$

Wyznaczanie wartości własnych metodą QR

Metoda wywodzi się z metody LR, przy czym macierz ***L*** zastąpiono **macierzą ortogonalną *Q*** przez co metoda jest **stabilna numerycznie.**

$$A_1 = A$$

$$A_i = Q_i R_i \qquad Q^H Q = I$$

$$A_{i+1} = R_i Q_i$$

gdzie: ***R*** jest macierzą trójkątną górną, a ***Q*** jest macierzą ortogonalną.

Wyznaczanie wartości własnych metodą QR

W metodzie QR otrzymujemy ciąg macierzy:

$$A = A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_m$$

Macierze te są do siebie podobne więc mają te same wartości własne. Jeśli ***m*** jest **<u>duże</u>** wówczas spodziewamy się że na diagonali $\boldsymbol{A_m}$ będą znajdować się wartości własne ***A***.

Wadą metody QR jest wolna zbieżność dla macierzy pełnych.
Metoda jest szybkozbieżna dla macierzy rzadkich
(macierzy trójdiagonalnych i macierzy Hessenberga)

Macierze rzadkie

Macierzą rzadką nazywamy macierz, w której większość elementów ma taką samą wartość, najczęściej zerową.

Rzadkie macierze występują w procesie rozwiązywania wielu równań z dziedziny teorii sieci elektrycznych i systemów energetycznych, genetyki, socjologii, teorii grafów itd.

Macierze rzadkie

Rzadkie macierze przechowuje się w pamięci w postaci upakowanej (tzn. nie przechowuje się w pamięci elementów zerowych). Taka forma pozwala na przetwarzanie większych macierzy, niż byłby to możliwe w tradycyjny sposób.

W niektórych przypadkach czas przetwarzania macierzy zmniejsza się dodatkowo z tego powodu, że pakowanie eliminuje obliczenia trywialne, na przykład mnożenie przez zero.

Redukcja macierzy

Jeśli λ_1 jest wartością własną macierzy ***A*** i x_1 odpowiadającym jej wektorem własnym oraz dla dowolnego wektora ***v*** o własności:

$$v^T x_1 = 1$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 v^T$$

Ma te same wartości co macierz ***A*** oprócz λ_1, która jest zerem.

Redukcja macierzy – metoda Hotellinga

Metoda jest skuteczna tylko w przypadku macierzy symetrycznych:

$$v = x_1$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$$

Redukcja macierzy – metoda Wielandta

Wektor ***v*** definiujemy następująco:

$$v^T = \frac{A_{j0}}{\lambda_1 x_1^{(j)}}$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 v^T = A - \frac{x_1 A_{j0}}{x_1^{(j)}}$$

j-ty wiersz macierzy W_1 jest równy zero

$$(W_1)_{j0} = A_{j0} - \frac{x_1 A_{j0}}{x_1^{(j)}} = 0$$

Uogólniony problem własny

Uogólniony problem własny definiujemy następująco:

$$Ax = \lambda Bx$$

A i ***B*** są macierzami kwadratowymi

SPROWADZAMY RÓWNANIE DO ZWYKŁEGO PROBLEMU WŁASNEGO

$$B^{-1}Ax = Cx = \lambda x$$

JAK ZNALEŹĆ B^{-1} ?

Uogólniony problem własny

W przypadku, gdy **B** oraz **A** są macierzami symetrycznymi możemy posłużyć się rozkładem Choleskyego

$$B = LL^T$$

$$BB^{-1} = I = LL^T (L^T)^{-1} L^{-1}$$

$$B^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1}$$

Wykorzystując rozkład LL^T można znaleźć macierz podobną do $B^{-1}A$

$$\begin{aligned} L^T (B^{-1}A)(L^T)^{-1} &= L^T (L^T)^{-1} L^{-1} A (L^{-1})^T \\ &= L^{-1} A (L^{-1})^T \\ &= G \end{aligned}$$

Uogólniony problem własny

Dzięki temu przekształceniu, macierz ***G*** jest **symetryczna** jak ***A*** i posiada identyczne widmo wartości własnych. ***Jak znaleźć G?***

Najpierw należy znaleźć macierz ***F:***

$$F = A(L^{-1})^T$$

Rozwiązując układ równań:

$$FL^T = A$$

A następnie wyznaczamy ***G***:

$$G = L^{-1}F$$

Rozwiązując układ równań:

$$LG = F$$

Rozkład LL^T wymaga wykonania 1/6*n^3 mnożeń a wyznaczenie macierzy *G* 2/3*n^3 mnożeń. Macierz *G* jest symetryczna więc w celu wyznaczenia jej wartości i wektorów własnych korzystamy z metod przeznaczonych dla tej klasy macierzy.