Wykład 3.

Zdarzenia niezależne i prawdopodobieństwo całkowite

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH, Katedra Elektroniki, WIET AGH

Plan:

- Niezależność zdarzeń losowych
- Prawdopodobieństwo całkowite
- Rozwiązywanie zadań wykorzystujących poznany materiał
- Twierdzenie Bayes'a

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń

Przypomnijmy z poprzedniego wykładu definicję prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Definicja to może być zapisana w postaci:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B)$$

co pozwala obliczyć prawdopodobieństwo iloczynu dowolnych dwóch zdarzeń.

Zdarzenia niezależne

W szczególnym przypadku z definicji prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

wynika co następuje:

Jeżeli P(B|A) = P(B) to wynik zdarzenia A nie ma żadnego wpływu na zdarzenie B

Zdarzenia A i B określa się wtedy jako **niezależne.**

Dla dwóch zdarzeń niezależnych obowiązuje:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia niezależne

Przykład 3.1:

Dzienna produkcja części do silników samolotów wynosi 850 w pewnym przedsiębiorstwie. Niestety 50 z nich nie spełnia właściwych norm jakościowych, co powoduje, że są odrzucane jako wadliwe. Zakładamy, że wybieramy dwa elementy z dziennej produkcji ale zanim wylosujemy drugi element, pierwszy oddajemy (losowanie ze zwracaniem).

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B, polegającego na tym, że drugi element jest wadliwy pod warunkiem, że pierwszy wylosowany element jest wadliwy (zdarzenie A), czyli P(B|A).

Zdarzenia niezależne

Rozwiązanie przykładu 3.1:

Ze względu na sposób losowania (ze zwracaniem), przy drugim losowaniu zbiór, z którego losujemy nadal zawiera 850 elementów, w tym 50 wadliwych. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia B nie zależy od tego czy pierwszy wylosowany element był wadliwy czy nie, co oznacza:

$$P(B \mid A) = P(B) = \frac{50}{850}$$

Natomiast, prawdopodobieństwo, że oba elementy wylosowane są wadliwe jest iloczynem prawdopodobieństw A i B:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = (\tfrac{50}{850}) \cdot (\tfrac{50}{850}) = 0{,}0035$$

Zdarzenia niezależne?

Przykład 3.2:

Jak w przykładzie 3.1, dzienna produkcja części do silników samolotów wynosi 850 w pewnym przedsiębiorstwie. Niestety 50 z nich nie spełnia właściwych norm jakościowych, co powoduje, że są odrzucane jako wadliwe. Zakładamy, że wybieramy dwa elementy z dziennej produkcji ale tym razem przed wylosowaniem drugiego elementu, pierwszego **nie oddajemy** (losowanie **bez** zwracania).

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B, polegającego na tym, że drugi element jest wadliwy pod warunkiem, że pierwszy wylosowany element jest wadliwy (zdarzenie A), czyli P(B|A). Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zdarzenia niezależne?

Rozwiązanie przykładu 3.2:

Ze względu na sposób losowania (bez zwracania), przy drugim losowaniu zbiór, z którego losujemy zawiera 849 elementów, w tym 49 wadliwych (pierwszy element wylosowany był wadliwy). Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego:

$$P(B|A) = \frac{49}{849}$$

Prawdopodobieństwa zdarzenia B zależy od tego czy pierwszy element był wadliwy (zdarzenie A) czy nie był (zdarzenie A'):

$$P(B|A') = \frac{50}{849}$$

Zdarzenia A i B prawdopodobnie nie są niezależne, ale jak obliczyć **bezwarunkowe prawdopodobieństwo P(B)?**

Prawdopodobieństwo całkowite

Wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B)$$

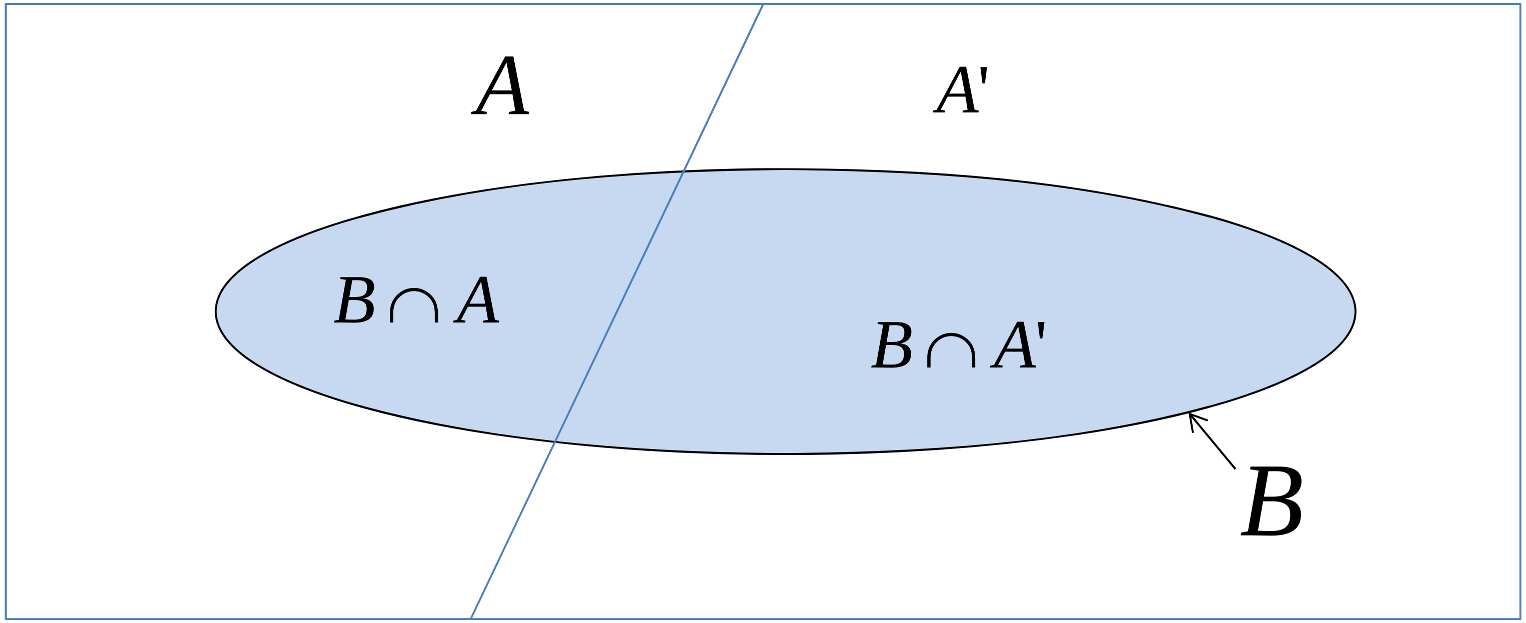
jest użyteczny przy obliczaniu prawdopodobieństwa zdarzenia, które zależy od przebiegu innych zdarzeń.

Przykład 3.3: Przy produkcji półprzewodników istnieje prawdopodobieństwo (np. 0.10), że niekontrolowane zanieczyszczenie elementu spowoduje awarię całego układu. Prawdopodobieństwo tego, że wystąpi awaria układu przez element niezanieczyszczony wynosi 0.005. W danym procesie produkcji około 20% elementów jest poddanych wysokiemu poziomowi zanieczyszczeń. Jakie jest prawdopodobieństwo awarii układu zawierającego jeden taki element?

Prawdopodobieństwo całkowite

Dla zdarzenia B takiego, że: $B = (B \cap A) \cup P(B \cap A')$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') =$$
$$= P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')$$



Prawdopodobieństwo całkowite

Rozwiązanie przykładu 3.3: Wystąpienie awarii całego układu oznaczymy jako zdarzenie F (ang. failure). Zdarzenie, że element jest poddany wysokiemu poziomowi zanieczyszczeń oznaczmy H.

$$P(F \mid H) = 0.10 \quad \text{i} \quad P(F \mid H') = 0.005$$

$$P(H) = 0.20 \quad \text{i} \quad P(H') = 0.80$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(F) = P(F \mid H)P(H) + P(F \mid H')P(H')$$

$$P(F) = 0.10\ (0.20) + 0.005\ (0.80) = 0.0235$$

Wynik może być interpretowany jako średnia ważona dwóch prawdopodobieństw awarii.

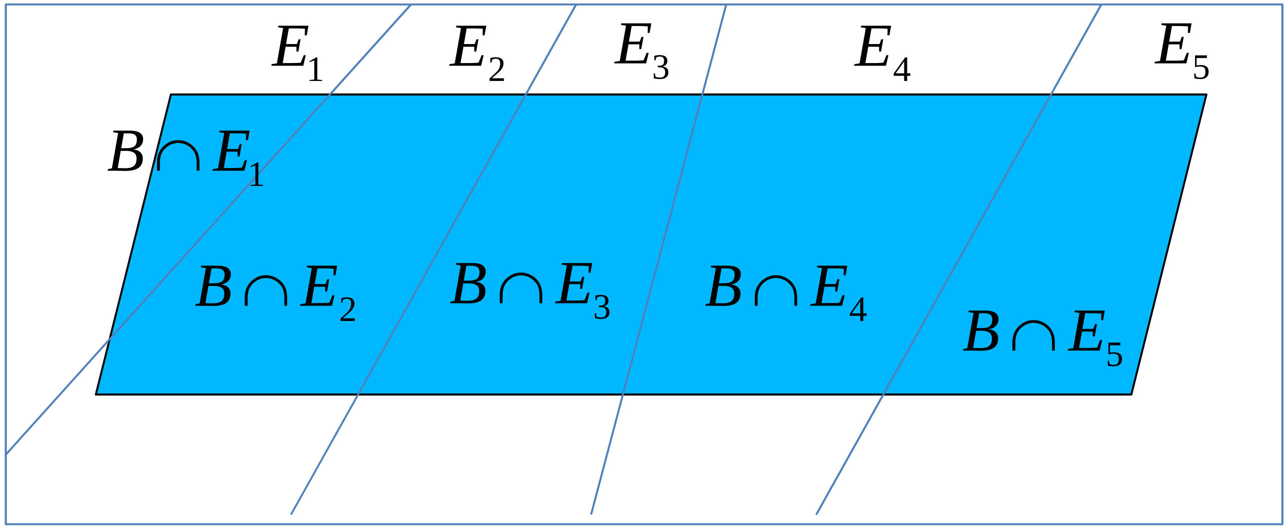
Prawdopodobieństwo całkowite

Dla k zdarzeń parami wykluczających się (ang. exclusive) i wyczerpujących wszystkie możliwości (ang. exhaustive):

E_1 , E_2 , ... , E_k , prawdopodobieństwo zdarzenia B:

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \ldots + P(B \cap E_k) =$$
$$= P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + \ldots + P(B \mid E_k)P(E_k)$$

$$gdzie\ : \sum_{i=1}^{k} E_i = \Omega$$



Czy zdarzenia są niezależne?

Dalszy ciąg przykładu 3.2: Znaleźliśmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia B wylosowania wadliwego elementu w drugim losowaniu bez zwracania zależy od wyniku pierwszego losowania (zdarzenie A – w pierwszym losowaniu wadliwy element; zdarzenie A' - w pierwszym losowaniu dobry element)

$$P(B|A)=\frac{49}{849} \qquad P(B|A')=\frac{50}{849}$$

Czy zdarzenia A i B są **niezależne?**

Obliczmy bezwarunkowe prawdopodobieństwo P(B) ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

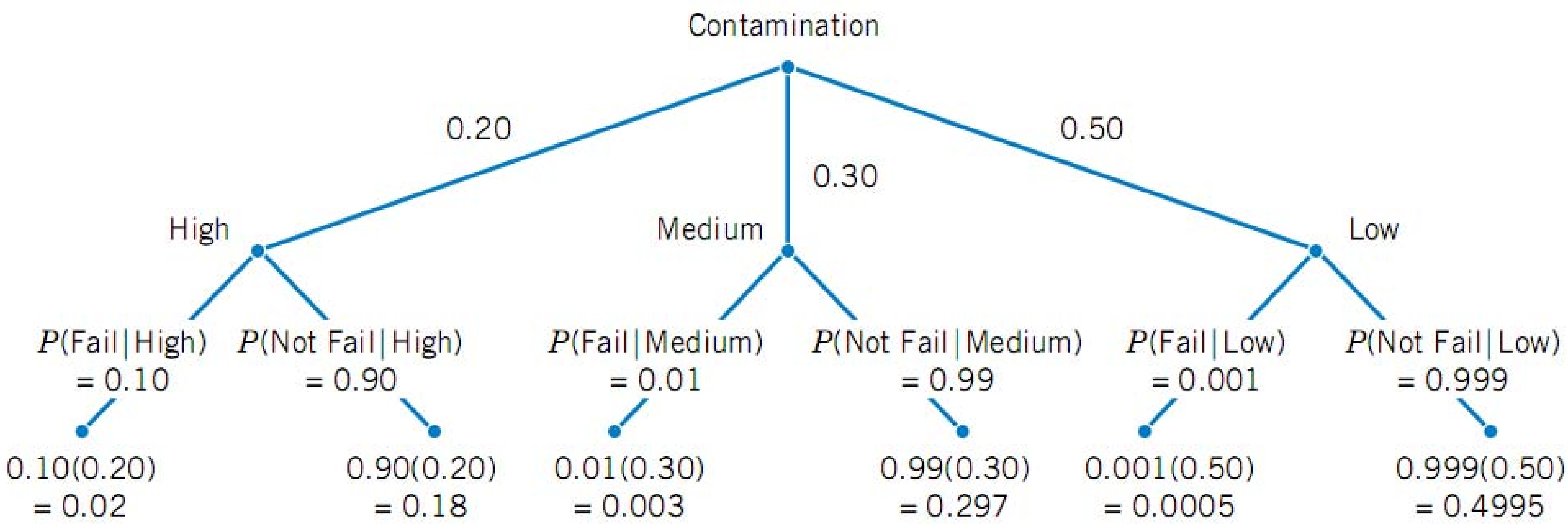
$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')$$

$$P(B) = \left(\frac{49}{849}\right)\left(\frac{50}{850}\right) + \left(\frac{50}{849}\right)\left(\frac{800}{850}\right) = \frac{50}{850} \neq P(B|A)$$

Odpowiedź: zdarzenia A i B **nie są niezależne**!

Prawdopodobieństwo całkowite – przykład do samodzielnego rozwiązania

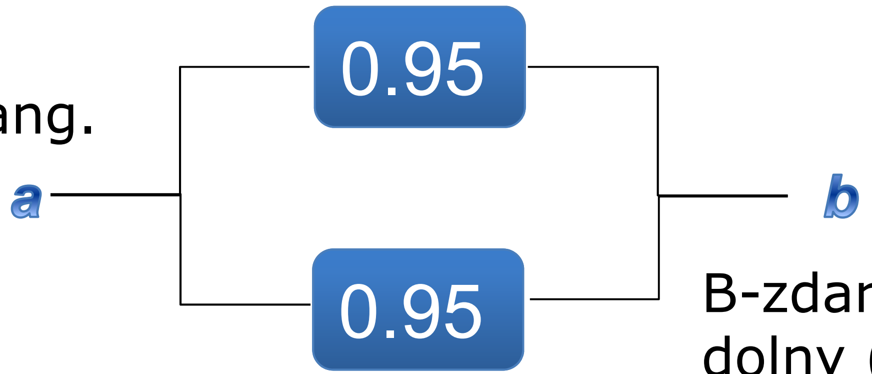
Prawdopodobieństwo awarii układu	Poziom zanieczyszczeń	Udział elementów zanieczyszczonych
0,1	Wysoki (High)	20% (H)
0,01	Średni (Medium)	30% (M)
0,001	Mały (Low)	50% (L)



Rozwiązywanie zadań wykorzystujących poznany materiał

Przykład 3.4: Poniższy układ pracuje, jeżeli jest połączenie pomiędzy punktami a i b. Prawdopodobieństwo, że pojedynczy element pracuje dane jest na rysunku. Załóżmy, że elementy mają awarię niezależnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że układ pracuje?

T-zdarzenie, że element górny (ang. top) przewodzi



B-zdarzenie, że element dolny (ang. bottom) przewodzi

$$P(T \text{ lub } B) = P(T \cup B) = 1 - P\left[(T \cup B)'\right]$$

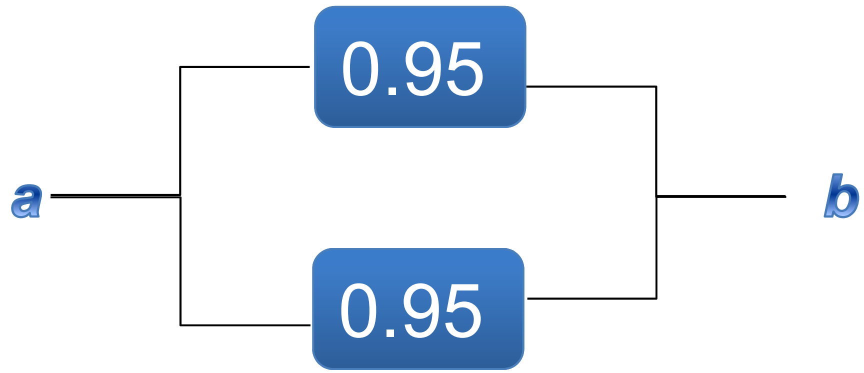
prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Rozwiązywanie zadań wykorzystujących poznany materiał

Rozwiązanie przykładu 3.4: Aby rozwiązać zadanie trzeba znać prawa De Morgana:

$$(T \cup B)' = T' \cap B'$$

$$(T \cap B)' = T' \cup B'$$



$$P(T \text{ lub } B) = P(T \cup B) = 1 - P[(T \cup B)'] = 1 - P(T' \cap B')$$

Zdarzenia B′ i T′ są niezależnie więc:

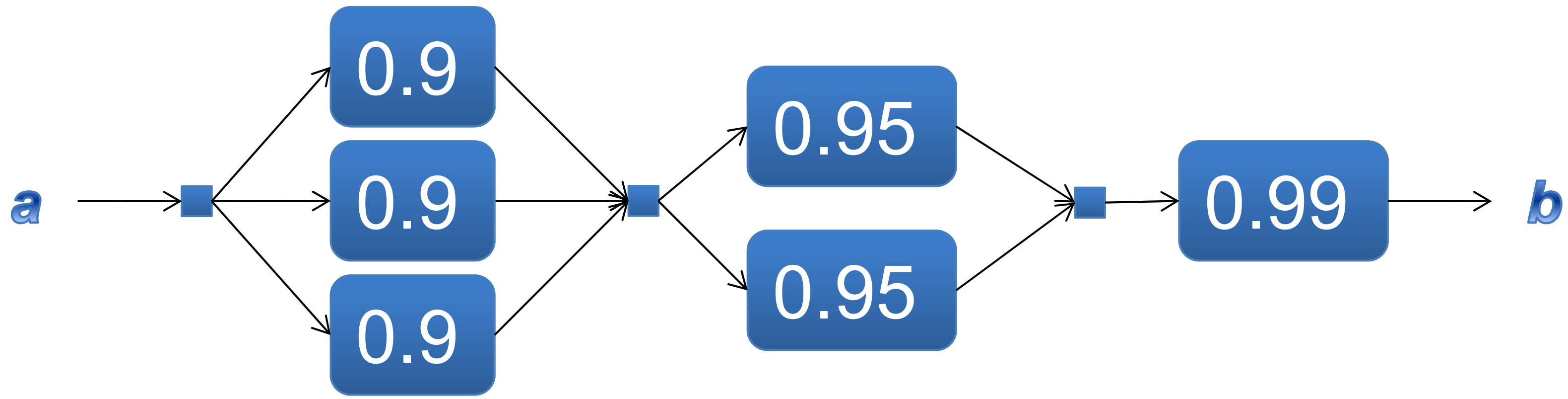
$$P(T' \, and \, B') = P(T' \cap B') = P(T')P(B') = (1 - 0.95)^2 = 0.05^2$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że układ pracuje wynosi:

$$P(T \text{ lub } B) = 1 - P(T' \cap B') = 1 - 0.05^2 = 0.9975$$

Rozwiązywanie zadań wykorzystujących poznany materiał

Przykład 3.5: Jakie jest prawdopodobieństwo działania układu?



Rozwiązywanie zadań wykorzystujących poznany materiał

Rozwiązanie przykładu 3.5:

W pierwszej kolumnie:

$$1 - (1 - 0{,}9)^3 = 1 - (0{,}1)^3$$

W drugiej kolumnie:

$$1 - (1 - 0{,}95)^2 = 1 - (0{,}05)^2$$

Prawdopodobieństwo, że system działa:

$$(1 - (0{,}1)^2)(1 - (0{,}05)^3)(0{,}99) = 0{,}987$$

Twierdzenie Bayes'a

Proste przekształcenie definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P\left(A \cap B\right) = P(A \mid B)P(B) = P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A)$$

prowadzi do wzoru:

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P\left(B \mid A\right) \cdot P(A)}{P\left(B\right)}, \; dla \quad P(B) > 0$$

Jest to użyteczne twierdzenie gdy nie znamy pełnej tablicy jak w następującym przykładzie (3.6)

Przykład 3.6

Zdarzenie D oznacza, że cienka warstwa ma wadę; F oznacza, że ma skazę na powierzchni.

		Skaza na powierzchni:		
		Tak (F)	Nie (F')	Razem
Element wadliwy	Tak (D)	10	28	38
	Nie (D')	30	332	362
	Razem	40	360	400

W tabeli podany jest udział skaz powierzchniowych na cienkich warstwach do stwierdzenia ich wadliwości.

Możemy z tabeli wyczytać że:

$$P\left(D \mid F\right) = \frac{10}{40} = 0,25 \qquad P(F) = \frac{40}{400} = 0,1 \qquad P(D) = \frac{38}{400} = 0.095$$

Przykład 3.6

Jeżeli znamy pełną tablicę to możemy np. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że część jest wadliwa pod warunkiem, że ma skazę na powierzchni:

$$P(F \mid D) = \frac{10}{38}$$

Jeżeli nie dysponujemy pełną tablicą to możemy obliczyć prawdopodobieństwo P(F/D) z twierdzenia Bayes'a:

$$P(F \mid D) = \frac{P(D \mid F) \cdot P(F)}{P(D)}$$

$$P(F \mid D) = \frac{\frac{10}{40} \cdot \frac{40}{400}}{\frac{38}{400}} = \frac{10}{38}$$

Twierdzenie Bayes'a

Dla *k* zdarzeń parami wykluczających się (ang. exclusive) i wyczerpujących wszystkie możliwości (ang. exhaustive):

E_1 , E_2 , ... , E_k , prawdopodobieństwo zdarzenia E_1 pod warunkiem zajścia dowolnego zdarzenia B:

$$P(E_1|B) = \frac{P(B \mid E_1)P(E_1)}{P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + \ldots + P(B \mid E_k)P(E_k)}$$

$$dla \quad P(B) > 0$$

Ilustracja twierdzenia Bayesa

Przykład 3.7: Na dużej populacji zdrowych i chorych na daną chorobę pacjentów szpitala przeprowadzono test w celu ustalenia czy nowy sposób leczenia jest skuteczny. Prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego S/D, że dodatni wynik testu (S) identyfikuje osobę chorą (D) wynosi P(S/D)=0,99. Prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego S'/D', że ujemny wynik testu (S') prawidłowo identyfikuje osobę zdrową (D') wynosi P(S'/D')=0,95. Prawdopodobieństwo wystąpienia choroby w populacji wynosi P(D)=0,0001. Przeprowadzono na Tobie test, którego wynik jest dodatni. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jesteś chory?

Rozwiązanie przykładu 3.7: D-zdarzenie jesteś chory; S-zdarzenie, że wynik testu jest dodatni; szukamy P(D/S).

Prawdopodobieństwo zdarzenia S/D', że wynik testu jest dodatni a pacjent jest zdrowy P(S/D')=1-P(S'/D')=0,05

Ilustracja twierdzenia Bayes'a

Rozwiązanie przykładu 3.7: D-zdarzenie jesteś chory; S-zdarzenie, że wynik testu jest dodatni; szukamy P(D/S).

Prawdopodobieństwo zdarzenia S/D', że wynik testu jest dodatni a pacjent jest zdrowy P(S/D')=1-P(S'/D')=0,05

P(S/D)=0,99; P(S'/D')=0,95; P(D)=0,0001

Z twierdzenia Bayes'a

$$P(D \mid S) = \frac{P(S \mid D) \cdot P(D)}{P(S \mid D) \cdot P(D) + P(S / D')P(D')}$$

$$P(D \mid S) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}0001}{0{,}99 \cdot 0{,}0001 + 0{,}05 \cdot (1 - 0{,}0001)} = 0{,}002$$

Nawet jeśli wynik testu jest dodatni to prawdopodobieństwo tego, że jesteś chory jest małe. Dlaczego?