



METODY NUMERYCZNE

Wykład 3.

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH



Plan

- Problem optymalnego wyboru węzłów interpolacji
- Wielomiany Czebyszewa
- Aproksymacja
- Rozwiązywanie równań nieliniowych



Błąd wzoru interpolacyjnego

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Przyjmujemy oznaczenia: $M_{n+1} = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n+1)}(x)|$



Kres górny modułu (n+1)-szej pochodnej funkcji f(x) na przedziale $\langle a, b \rangle$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$



Błąd wzoru interpolacyjnego

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|$$

Przykład:

Oceń, z jaką dokładnością można obliczyć wartość $\ln 100,5$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości: $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$

$$f(x) = \ln(x), \quad n = 3, \quad a = 100, \quad b = 103, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$M_4 = \sup_{x \in \langle 100, 103 \rangle} |f^{(4)}(x)| = \frac{6}{100^4}$$

$$|\ln 100,5 - W(100,5)| \leq \frac{6}{100^4 4!} \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \approx 2,344 \cdot 10^{-9}$$



Optymalny dobór węzłów interpolacji

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|$$

Wielkość błędu zależy od wyboru węzłów interpolacji poprzez ω_n .
Na M_{n+1} nie mamy wpływu.

Jak wybrać węzły interpolacji x_i , aby: $\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |\omega_n(x)|$

miało jak najmniejszą wartość

Zagadnienie zostało sformułowane przez rosyjskiego matematyka P.L. Czebyszewa jako zagadnienie znajdowania wielomianu algebraicznego najlepiej przybliżającego zero na zadanym przedziale.



Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa
(pierwszego rodzaju):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Można pokazać, że wielomian $T_n(x)$ jest identyczny z pewnym wielomianem algebraicznym „zawężonym” do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x$$

wzór rekurencyjny

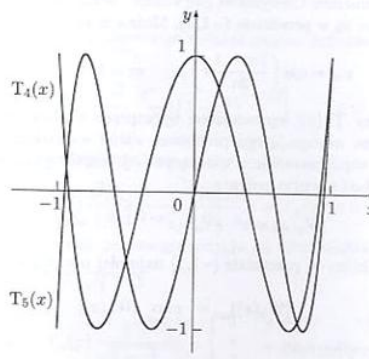
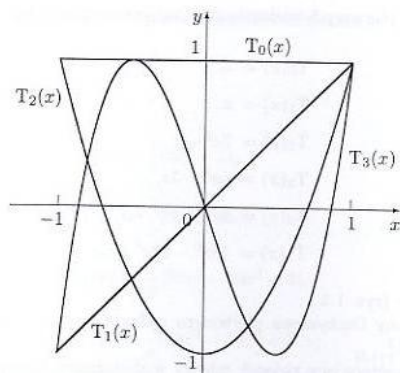
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$



Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$



Met. Numer. Wykład 3

7



Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$(1-x^2) \frac{d^2 T_n(x)}{dx^2} - x \frac{dT_n(x)}{dx} + n^2 T_n(x) = 0$$

Definiuje się je poprzez wzór Rodriguesa:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n (2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{1-x^2} \right)$$

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są ortogonalne w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ z wagą:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Met. Numer. Wykład 3

8

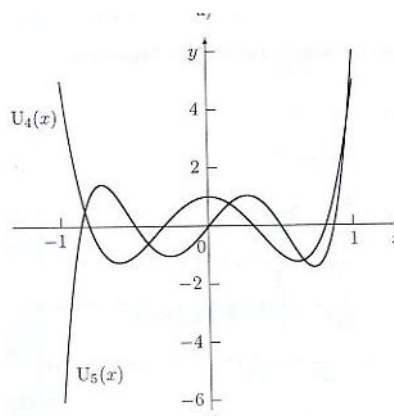
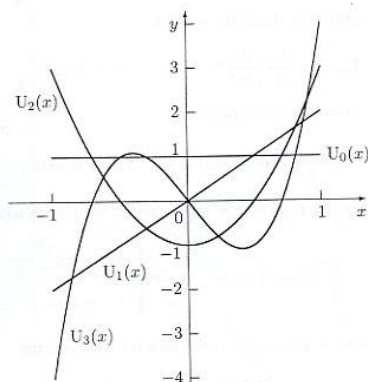


Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$



Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju są rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$(1-x^2) \frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} - 3x \frac{dU_n(x)}{dx} + n(n+2)U_n(x) = 0$$

Definiuje się je poprzez wzór Rodriguesa:

$$U_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{n+1}{(2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+1/2} \right]$$

Wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju są ortogonalne w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ z wagą:

$$w(x) = \sqrt{1-x^2}$$



Optymalny dobór węzłów interpolacji

Każdy wielomian Czebyszewa stopnia n ma n różnych pierwiastków w punktach:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

zawartych między -1 i $+1$

Współczynnik przy najwyższej potęgce w $T_n(x)$ jest równy 2^{n-1} .

Szukamy wielomianu, który przy najwyższej potęgce ma współczynnik równy jedności

$$T_{n+1}^*(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

gdzie x_m ($m=0, 1, 2, \dots, n$) są pierwiastkami wielomianu T_{n+1}



Optymalny dobór węzłów interpolacji

Wyrażenie: $\sup_{x \in \langle a, b \rangle} |\omega_n(x)|$

w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ ma najmniejszą wartość dla wielomianu:

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

wówczas: $\sup_{x \in \langle -1, 1 \rangle} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}$

Jeżeli w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ za węzły interpolacji przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa, to

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}$$



Optymalny dobór węzłów interpolacji

W dowolnym przedziale $\langle a, b \rangle$ oszacowanie błędu wynosi:

$$|f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

przy wyborze węzłów

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(b-a) \cos \frac{2m+1}{2n+2} \pi + (b+a) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nowe węzły x_m nie są rozmieszczone w równych odstępach lecz są zagęszczone przy końcach przedziału.

Proste transformacje liniowe sprowadzają x z przedziału $\langle a, b \rangle$ do z należącego do $\langle -1, 1 \rangle$

$$x = \frac{1}{2} \left[(b+a)z + (b-a) \right]$$

$$z = \frac{1}{b-a} \left[x - \frac{b+a}{2} \right]$$



Podsumowanie interpolacji

Przeczytać i przeanalizować rozdział 1.2.8 Uwagi końcowe, Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, Metody numeryczne

Wnioski:

1. Przy obliczaniu wartości wielomianu interpolacyjnego w jednym lub kilku punktach problem wyboru postaci wzoru interpolacyjnego nie jest istotny.
2. Rodzaj wybranego wzoru i rozmieszczenie węzłów ma wpływ jedynie na błąd obliczeń.
3. O czasochłonności obliczeń decyduje liczba mnożeń i dzielení.

dla wielomianu Lagrange'a stanowi to $n^2 + 4n + 2$

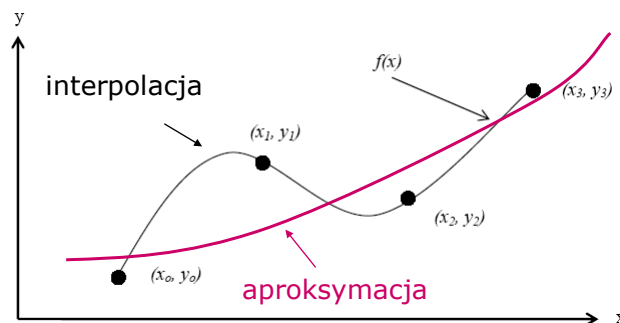
dla wielomianu Newtona $1/2 n^2 + 3/2 n^2$

Aproksymacja

Różnica pomiędzy aproksymacją i interpolacją

$f(x)$ jest funkcją, którą chcemy aproksymować

$F(x)$ jest funkcją aproksymującą





Aproksymacja

Aproksymacja funkcji $f(x)$ polega na wyznaczeniu takich współczynników a_0, a_1, \dots, a_m funkcji

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$$

aby funkcja spełniała pewne warunki, np. minimalizowała normę różnicy:

$$\|f(x) - F(x)\|$$

Jest to aproksymacja liniowa, $F(x)$ nazywane jest wielomianem uogólnionym

$$\varphi_0, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$$

są funkcjami bazowymi $m+1$ wymiarowej podprzestrzeni liniowej \mathbf{X}_{m+1}



Aproksymacja

Duże znaczenie ma aproksymacja wymierna:

$$F(x) = \frac{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)}{b_0\psi(x) + b_1\psi_1(x) + \dots + b_m\psi_m(x)}$$

$$\varphi_i(x) \text{ i } \psi_j(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m)$$

elementy tej samej bazy k -wymiarowej podprzestrzeni liniowej ($k = \max(n, m)$)

Poszukujemy stałych współczynników

$$a_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad b_j \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$



Aproksymacja

Zagadnienie wyboru podprzestrzeni X_m i związanej z nią bazy.

Funkcje bazowe : $\varphi_k(x)$

$\{x^n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) baza jednomianów

$\{p_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) baza wielomianów np. Lagrange'a

$\{\sin(nx), \cos(nx)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) wielomiany trygonometryczne

Największe znaczenie posiada aproksymacja wielomianowa ze względu na prostotę działań ale jej podstawową wadą jest wrażliwość na błędy zaokrągleń.



Aproksymacja

Kryteria wyboru stałych współczynników a_i ($i = 0, 1, \dots, m$)

Trzy typy przybliżeń o dużym znaczeniu

• **przybliżenie interpolacyjne** (*wcześniej omawiane*)

współczynniki są tak dobrane, aby w punktach x_i ($i = 1, 2, \dots, p$)

funkcja przybliżająca wraz z jej pierwszymi r_i pochodnymi (r_i jest liczbą całkowitą nieujemną) była zgodna z $f(x)$ i jej pochodnymi (z dokładnością do błędów zaokrągleń)

Metody interpolacyjne : bezpośrednia, Newtona i Lagrange'a prowadzą do tego samego wielomianu interpolacyjnego ale wybór bazy wpływa na koszt i dokładność.



Aproksymacja

Należy wybierać funkcje bazowe mało wrażliwe na kumulujące się błędy. W podprzestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej m , określonych na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, bazą mogą być wielomiany Czebyszewa

$$T_0, T_1(x), T_2(x), \dots, T_m(x)$$

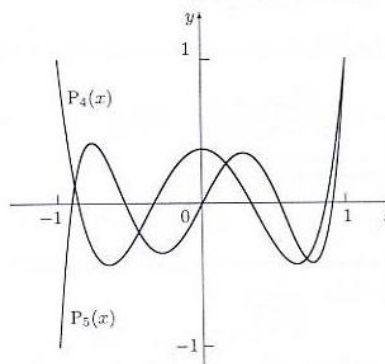
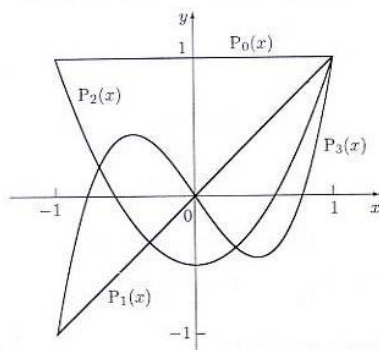
lub wielomiany Legendre'a

$$L_0, L_1(x), L_2(x), \dots, L_m(x)$$

Te wielomiany są ortogonalne na pewnym zbiorze punktów z odpowiednimi wagami



WIELOMIANY LEGENDRE'A





Ortogonalność

Dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ określone na przedziale $[a, b]$ nazywamy ortogonalnymi, jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy zero:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

lub iloczyn skalarny z wagą jest równy zero:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0$$

Ciąg skończony lub nieskończony funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ tworzy układ ortogonalny, jeżeli

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \text{ dla } i \neq j$$



Normy

W przestrzeni X wprowadza się określoną normę:

$$\| \cdot \|$$

Mówimy, że funkcja $F(x)$ dobrze przybliża funkcję $f(x)$ jeżeli norma:

$$\|F(x) - f(x)\|$$

jest mała.



Normy

Istnieją różne normy:

norma Czebyszewa:

$$\|f(x)\| = \sup_{\langle a,b \rangle} |f(x)|$$

norma L_2 :

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

norma L_2 z wagą:

$$\|f\|_{2,w} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$



Aproksymacja

Zagadnienie najlepszej aproksymacji przy wybranych funkcjach bazowych $\varphi_k(x)$ sprowadza się do znalezienia wartości współczynników a_k takich, aby otrzymać minimum wyrażenia:

$$\|f(x) - (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m)\|$$

i aby istniało jedyne możliwe rozwiązanie tego zagadnienia ze względu na a_k

Dwa rodzaje aproksymacji: średniokwadratowa i jednostajna



Aproksymacja

•aproksymacja średniokwadratowa

szukamy minimum wyrażenia będącego całką z kwadratu różnicy pomiędzy $f(x)$ i jej przybliżeniem $F(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ lub sumą ważoną kwadratów błędów rozciągniętą na zbiór dyskretny punktów z przedziału $\langle a, b \rangle$

$$\|F(x) - f(x)\| = \left(\int_a^b |F(x) - f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

•aproksymacja jednostajna

znalezienie najmniejszego maksimum różnicy między $f(x)$ i jej przybliżeniem $F(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

$$\|F(x) - f(x)\| = \sup_{\langle a, b \rangle} |F(x) - f(x)|$$



Aproksymacja średniokwadratowa

Dana jest funkcja $y=f(x)$ na dyskretnym zbiorze argumentów $\mathbf{X} (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ gdzie przyjmuje wartości: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Niech $\varphi_j(x)$, $j=0, 1, \dots, m$, będzie układem funkcji bazowych podprzestrzeni \mathbf{X}_n .

Poszukujemy wielomianu uogólnionego $F(x)$, będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbf{X}=(x_j)$ czyli:

$$F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$$

Szukamy współczynników: a_i



Aproksymacja średniokwadratowa

Kryterium: wyrażenie

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^n w(x_i) [F(x_i) - f(x_i)]^2$$

ma być minimalne.

waga

Oznaczenia:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right]^2$$

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^n w(x_j) R_j^2$$

odchylenie



Aproksymacja średniokwadratowa

Z warunku na ekstremum funkcji wielu zmiennych:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

otrzymujemy układ $m+1$ równań z $m+1$ niewiadomymi, zwany *układem normalnym*

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^n w(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_k(x_j) = 0$$

Układ ten ma wyznacznik różny od zera a jego rozwiązanie daje minimum funkcji H



Aproksymacja wielomianowa

Jako funkcje bazowe przyjmujemy ciąg: jednomianów (x^i) ,
 $i=0,1,\dots,m$

Układ normalny ma wtedy postać:

$$\sum_{j=0}^n \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^m a_i x_j^i \right] x_j^k = 0 \quad k = 0,1,\dots,m$$

Zmieniamy kolejność sumowania:

$$\sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k = \sum_{i=0}^m a_i \left(\sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \right)$$



Aproksymacja wielomianowa

Przyjmujemy oznaczenia:

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^n x_j^{i+k} \quad \rho_k = \sum_{j=0}^n f(x_j) x_j^k$$

układ normalny ma wtedy postać:

$$\sum_{i=0}^m a_i g_{ik} = \rho_k$$

Jeżeli punkty x_0, x_1, \dots, x_n są różne i $m \leq n$, to wyznacznik układu normalnego jest różny od zera i układ ma jednoznaczne rozwiązanie. Jeżeli $m = n$, to wielomian aproksymacyjny $F(x)$ pokrywa się z wielomianem interpolacyjnym w tych punktach i $H=0$. W praktyce stopień wielomianu powinien być mniejszy od liczby punktów (duża liczba informacji, prostsze funkcje aproksymacyjne)



Aproksymacja wielomianowa

Przykład:

Dane są wyniki pomiarów (tabela). Poszukujemy zależności pomiędzy x i y w postaci:

$$ax + by = 1$$

Znaleźć „najlepsze” współczynniki a i b :

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9



Aproksymacja za pomocą wielomianów ortogonalnych

Wady:

$$\sum_{i=0}^m a_i g_{ik} = \rho_k$$

dla m dużego ($m > 6$) układ normalny jest źle uwarunkowany

Zadanie: Wygenerować wartości dla wielomianu

$$y = 40 + 10x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6$$

w przedziale x od 1 do 14 i aproksymować wyniki wielomianem stopnia 6. Wyciągnąć wnioski.



Aproksymacja za pomocą wielomianów ortogonalnych

Zastosowanie do aproksymacji wielomianów ortogonalnych usuwa jedną z podstawowych trudności obliczeniowych pojawiających się przy aproksymacji wielomianami algebraicznymi- złe uwarunkowanie układu normalnego.

Macierz układu normalnego jest macierzą diagonalną a elementy położone na przekątnej wynoszą:

$$a_{ij} = \sum_{i=0}^j \varphi_j^2(x_i)$$

Do aproksymacji jednostajnej często stosuje się szeregi Czebyszewa

$$f(x) \approx \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^n c_j T_j(x)$$

$$c_j = \frac{2}{\pi} c_0 + \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_j(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą



Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Należy znaleźć pierwiastek równania
nieliniowego czyli rozwiązać równanie

$$f(x) = 0$$

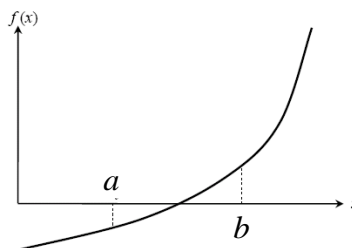
Twierdzenie:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w danym przedziale
 $\langle a, b \rangle$ i funkcja zmienia znak na końcach przedziału

$$f(a)f(b) \leq 0$$

to w przedziale $\langle a, b \rangle$ znajduje się
przynajmniej jeden pojedynczy
pierwiastek.

Przedział $\langle a, b \rangle$, w którym znajduje
się pojedynczy pierwiastek równania
nosi nazwę przedziału **izolacji**
pierwiastka.



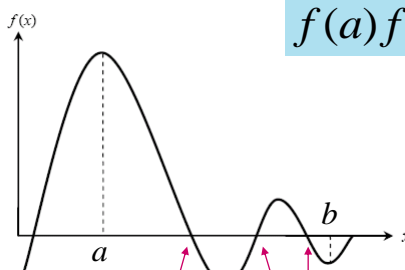
Met. Numer. Wykład 3

37



Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Jeżeli funkcja zmienia znak na granicach przedziału, to w tym
przedziale może istnieć więcej pierwiastków



$$f(a)f(b) \leq 0$$

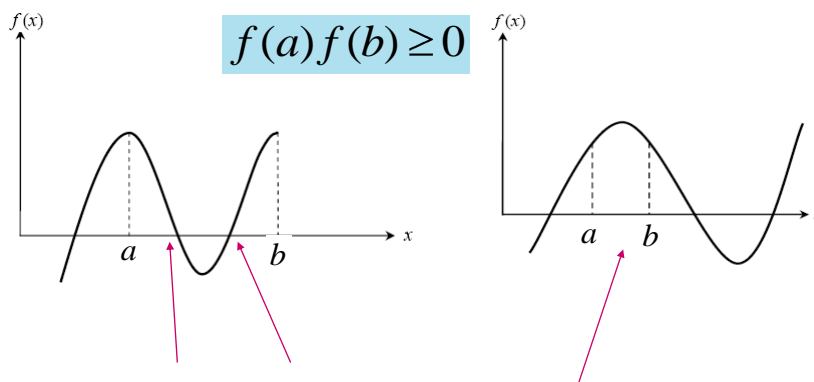
$$f(x) = 0$$

Met. Numer. Wykład 3

38



Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą



Jeżeli funkcja nie zmienia znaku na granicach przedziału, to w tym przedziale może istnieć pierwiastek lub nie



Metody numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą

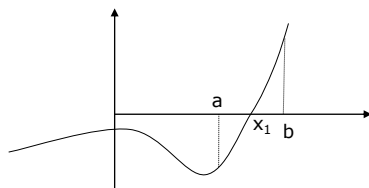
Metody:

- połowienia (równego podziału lub bisekcji)
- stycznych (Newtona)
- regula-falsi (fałszywej liniowości)
- metoda siecznych



Metoda bisekcji

Przedział $\langle a, b \rangle$ dzielimy na połowy punktem: $x_1 = \frac{a+b}{2}$



Jeżeli $f(x_1)=0$, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem równania. Jeżeli $f(x_1) \neq 0$ to z dwóch przedziałów $\langle a, x_1 \rangle$ i $\langle x_1, b \rangle$ wybieramy ten, na końcach którego funkcja $f(x)$ ma różne znaki, tzn. spełniony jest jeden z warunków:

$$f(a) \cdot f(x_1) < 0 \text{ lub } f(x_1) \cdot f(b) < 0$$



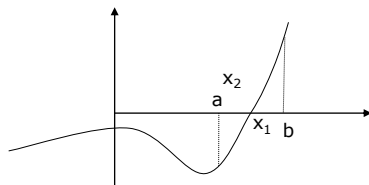
Metoda bisekcji

Uzyskany przedział $\langle a, x_1 \rangle$ lub $\langle x_1, b \rangle$ ponownie dzielimy na połowy punktem:

$$x_2 = \frac{a+x_1}{2}$$

lub

$$x_2 = \frac{b+x_1}{2}$$



Jeżeli $f(x_2)=0$, to x_2 jest szukanym pierwiastkiem równania. Jeżeli $f(x_2) \neq 0$ to wybieramy nowy przedział i sprawdzamy znaki funkcji na jego końcach. Proces ten powtarzamy tak długo, aż otrzymamy rozwiązanie dokładne lub zostanie osiągnięta wymagana dokładność rozwiązania.



Metoda bisekcji

W wyniku takiego postępowania po pewnej liczbie kroków albo otrzymamy pierwiastek dokładny $f(x_n)=0$, albo ciąg przedziałów takich, że:

$$f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$$

gdzie x_i oraz x_{i+1} są odpowiednio początkiem i końcem i -tego przedziału, a jego długość:

$$|x_i - x_{i+1}| = \frac{b-a}{2^i}$$

Ponieważ lewe końce ciągu przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry, a prawe końce ciąg nierosnący i ograniczony z dołu więc istnieje ich wspólna granica.



Algorytm dla metody bisekcji

W każdym kroku obliczamy względny błąd przybliżenia

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i} \right| \times 100$$

gdzie:

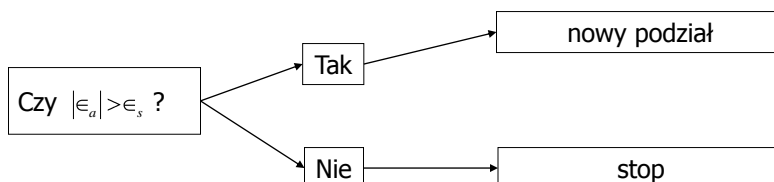
x_m^{i-1} jest pierwiastkiem znalezionym w poprzednim kroku

x_m^i jest pierwiastkiem znalezionym w danym kroku



Algorytm dla metody bisekcji

Porównanie błędu aproksymacji $|\epsilon_a|$ z definiowaną wcześniej tolerancją ϵ_s



Powinno się sprawdzić czy liczba iteracji nie przekracza zadanej wcześniej maksymalnej liczby iteracji. Jeśli przekracza, to program powinien się zatrzymać.



Przykład metody bisekcji

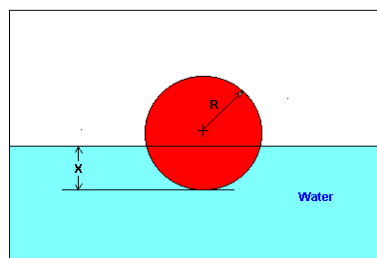
Pływająca kula

Z praw fizyki wynika, że kula będzie zanurzona do głębokości x takiej, że

$$0 \leq x \leq 2R$$

$$0 \leq x \leq 2 \cdot 0.055$$

$$0 \leq x \leq 0.11$$



$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$



Przykład metody bisekcji

Zadanie:

- a) Zastosować metodę bisekcji (połowienia) aby znaleźć głębokość x , do której kula jest zanurzona w wodzie. Przeprowadzić 3 iteracje aby oszacować pierwiastek równania

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

- b) Znaleźć względny błąd przybliżenia po zakończeniu każdej iteracji i liczbę cyfr znaczących poprawnych w odpowiedzi

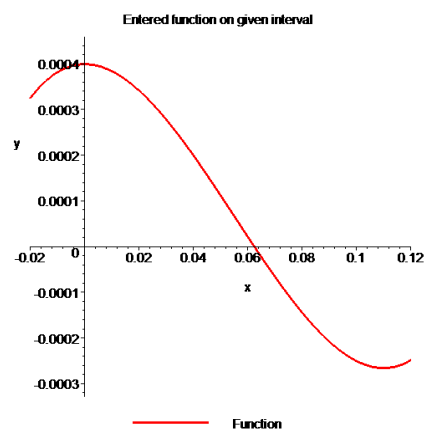


Przykład metody bisekcji

Rozwiązanie

Aby zrozumieć problem funkcja $f(x)$ jest pokazana na rysunku

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4}$$





Przykład metody bisekcji

Zakładamy $x_l = 0.00$

$x_u = 0.11$

Sprawdzamy znak funkcji w x_l i x_u

$$f(x_l) = f(0.00) = (0.00)^3 - 0.165(0.00)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 3.993 \times 10^{-4}$$

$$f(x_u) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -2.662 \times 10^{-4}$$

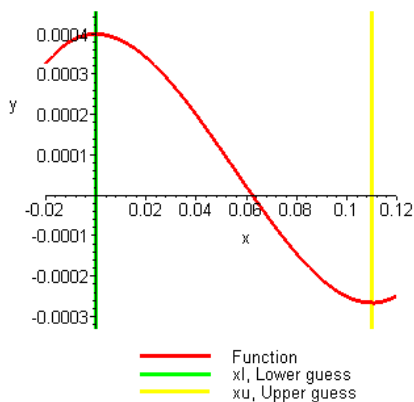
$$\text{stad } f(x_l) f(x_u) = (3.993 \times 10^{-4})(-2.662 \times 10^{-4}) < 0$$

Istnieje przynajmniej jeden pierwiastek równania pomiędzy x_l i x_u , tj. pomiędzy 0 i 0.11



Przykład metody bisekcji

Entered function on given interval with upper and lower guesses





Przykład metody bisekcji

Iteracja 1

Nowy pierwiastek
$$x_m = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0 + 0.11}{2} = 0.055$$

$$f(x_m) = f(0.055) = -0.165(0.055)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 6.655 \times 10^{-5}$$

$$f(x_l) f(x_m) = f(0) f(0.055) = (-0.993 \times 10^{-4})(6.655 \times 10^{-5}) > 0$$

Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_m i x_u , czyli pomiędzy 0.055 i 0.11. Dlatego nowe granice przedziału są:

$$x_l = 0.055, \quad x_u = 0.11$$

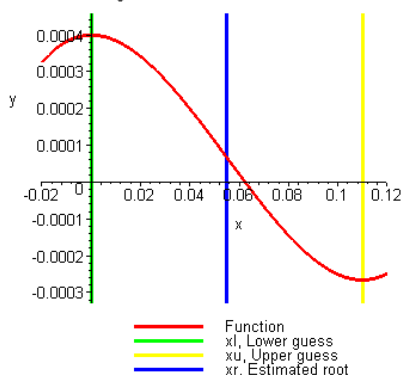
W tym momencie, względny błąd przybliżenia nie może być obliczony, bo to jest to pierwszy krok

$$|\epsilon_a|$$



Przykład metody bisekcji

Entered function on given interval with upper and lower guesses and estimated root



Po pierwszej iteracji



Przykład metody bisekcji

Iteracja 2

Nowy pierwiastek
$$x_m = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.11}{2} = 0.0825$$

$$f(x_m) = f(0.0825) = 0.0825^3 - 0.165 \cdot 0.0825^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -1.622 \times 10^{-4}$$

$$f(x_l) \cdot f(x_m) = f(0.055) \cdot (-1.622 \times 10^{-4}) = 6.655 \times 10^{-5} < 0$$

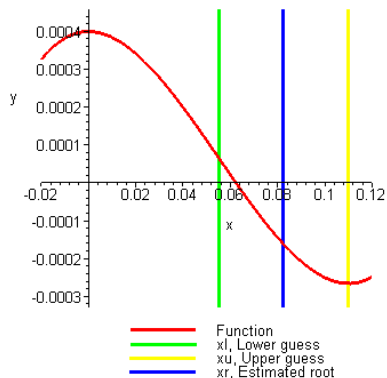
Stąd nowy pierwiastek leży pomiędzy x_l i x_m , tj. pomiędzy 0.055 i 0.0825.
Górna i dolna granica pierwiastka:

$$x_l = 0.055, \quad x_u = 0.0825$$



Przykład metody bisekcji

Entered function on given interval with upper and lower guesses and estimated root



Po drugiej iteracji



Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po drugiej iteracji wynosi

$$\begin{aligned} |\epsilon_a| &= \left| \frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i} \right| \times 100 \\ &= \left| \frac{0.0825 - 0.055}{0.0825} \right| \times 100 \\ &= 33.333\% \end{aligned}$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku $x_m = 0.0825$ gdyż błąd względny jest większy od 5%.

$$|\epsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$



Przykład metody bisekcji

Iteracja 3

Nowy pierwiastek

$$x_m = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.0825}{2} = 0.06875$$

$$f(x_m) = f(0.06875) = 0.06875^3 - 0.165 \cdot 0.06875^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -5.563 \times 10^{-5}$$

$$f(x_l) \cdot f(x_m) = f(0.055) \cdot f(0.06875) = 6.655 \times 10^{-5} \cdot (-5.563 \times 10^{-5}) < 0$$

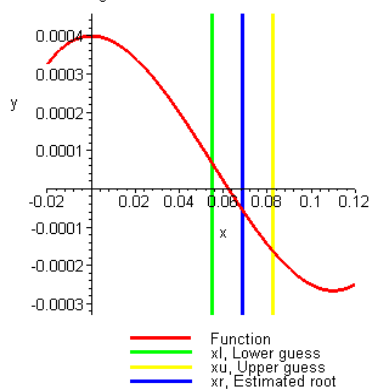
Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_l i x_m , tj. pomiędzy 0.055 i 0.06875. Stąd granice wynoszą:

$$x_l = 0.055, \quad x_u = 0.06875$$



Przykład metody bisekcji

Entered function on given interval with upper and lower guesses and estimated root



Po trzeciej iteracji



Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po trzeciej iteracji wynosi

$$\begin{aligned}
 |\epsilon_a| &= \left| \frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i} \right| \times 100 \\
 &= \left| \frac{0.06875 - 0.0825}{0.06875} \right| \times 100 \\
 &= 20\%
 \end{aligned}$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku $x_m = 0.06875$ gdyż błąd względny jest większy od 5%.



Przykład metody bisekcji

Analiza błędu i cyfr znaczących

Iteracja	x_l	x_u	x_m	$ \epsilon_a \%$	$f(x_m)$
1	0.00000	0.11	0.055	-----	6.655×10^{-5}
2	0.055	0.11	0.0825	33.33	-1.622×10^{-4}
3	0.055	0.0825	0.06875	20.00	-5.563×10^{-5}
4	0.055	0.06875	0.06188	11.11	4.484×10^{-6}
5	0.06188	0.06875	0.06531	5.263	-2.593×10^{-5}
6	0.06188	0.06531	0.06359	2.702	-1.0804×10^{-5}
7	0.06188	0.06359	0.06273	1.370	-3.176×10^{-6}
8	0.06188	0.06273	0.0623	0.6897	6.497×10^{-7}
9	0.0623	0.06273	0.06252	0.3436	-1.265×10^{-6}
10	0.0623	0.06252	0.06241	0.1721	-3.0768×10^{-7}



Przykład metody bisekcji

Liczba poprawnych cyfr znaczących m w wyniku wynosi:

$$|\epsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.1721 \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.3442 \leq 10^{2-m}$$

$$\log 0.3442 \geq 2 - m$$

$$m \leq 2 - \log 0.3442 = 2.463$$

tak więc $m = 2$

Liczba poprawnych cyfr znaczących w wyniku 0.06241 po 10-tej iteracji wynosi 2.



Zalety bisekcji

- metoda jest zawsze zbieżna
- przedział, w którym znajduje się pierwiastek jest zawsze połowiony

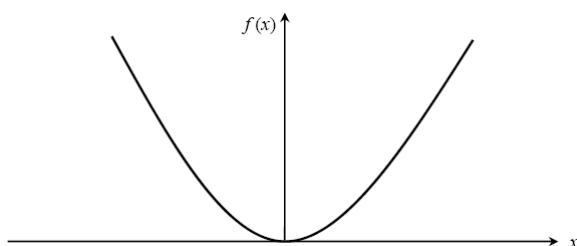
Wady bisekcji

- metoda jest wolnozbieżna
- jeżeli pierwiastek odgadnięty jest bliski rzeczywistemu to szybkość maleje



Wady metody bisekcji

- Jeżeli funkcja $f(x)$ jest taka, że dotyka osi OX to nie można znaleźć pierwiastka metodą bisekcji

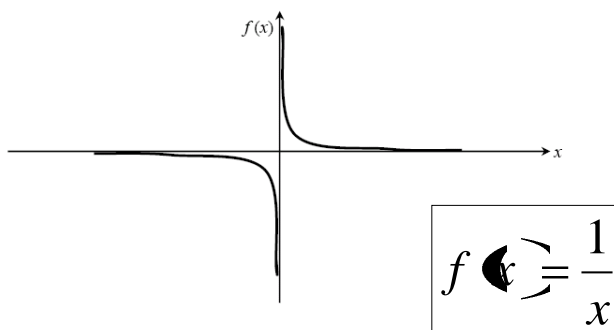


$$f(x) = x^2$$



Wady metody bisekcji

Funkcja zmienia znak ale nie ma pierwiastka



Metoda regula-falsi

regula – linia; falsus- fałszywy

Metoda zwana jest metodą fałszywego założenia liniowości funkcji

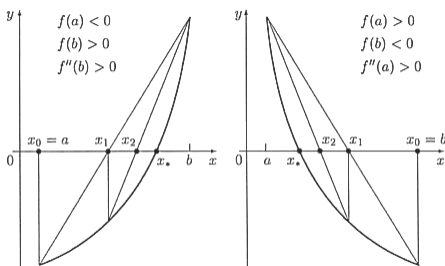
Założenia:

- w przedziale $\langle a, b \rangle$ równanie $f(x)=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek
- jest to pierwiastek pojedynczy
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ jest na przedziale $\langle a, b \rangle$ funkcją klasy C^2
- df/dx i d^2f/dx^2 mają stały znak w tym przedziale

potrzebne do ustalenia błędu i stałego punktu iteracji



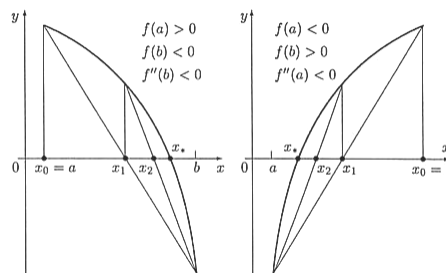
Metoda regula-falsi



Przy takich założeniach
możliwe są jedynie
następujące przypadki:

Metoda ta ma punkt stały,
jest nim punkt, w którym
spełniony jest warunek:

$$f'' f > 0$$

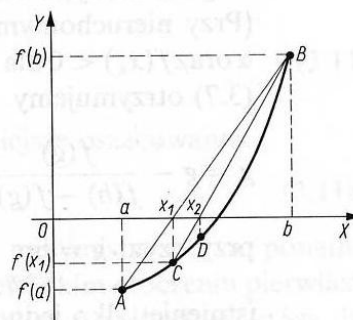


Metoda regula-falsi

Rozważmy przypadek:

Przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ prowadzimy cięciwę (sieczną) o równaniu:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$



Punkt x_1 , w którym cięciwa przecina oś OX jest pierwszym przybliżeniem szukanego pierwiastka.

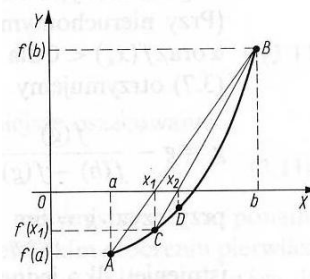
$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a)$$



Metoda regula-falsi

Jeżeli $f(x_1)=0$, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem.

Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to przez punkty $C = (x_1, f(x_1))$ oraz przez ten z punktów A i B , którego rzędna ma znak przeciwny niż $f(x_1)$ prowadzimy następną cięciwą. Punkt x_2 , w którym cięciwa przecina oś OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie zadaną dokładnością. Tworzymy ciąg: x_1, x_2, \dots, x_n



$$x_0 = 0 \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$



Metoda regula-falsi

Można wykazać, że przy przyjętych założeniach ciąg x_1, x_2, \dots, x_n jest rosnący i ograniczony a więc zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek α czyli $f(\alpha)=0$

Błąd n-tego przybliżenia można ocenić na podstawie:

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha)$$

gdzie c jest zawarte w przedziale od x_n do α

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$



Metoda regula-falsi

Przykład: Znaleźć dodatni pierwiastek równania:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

w przedziale (1,2) i ocenić błąd przybliżenia.

Sprawdzamy założenia:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad f''(x) = 6x + 2$$

$$f'(x) > 0 \text{ i } f''(x) > 0 \text{ dla } x > 1$$

$$f(1) = -4 \quad f(2) = 3$$



Metoda regula-falsi

Równanie cięciwy przechodzącej przez punkty A(1,4) i B(2,3)

$$y + 4 = \frac{3+4}{2-1}(x-1)$$

Aby $y=0$, $x_1=1,57142$

Znajdujemy $f(x_1)=-1.36449$. Ponieważ $f(x_1)<0$, to cięciwę prowadzimy przez punkty B(2,3) i C(1,57142,-1,36449)

W drugim przybliżeniu $x_2=1,70540$

Ocena błędu przybliżenia w przykładzie:

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$



Metoda regula-falsi

Ocena błędu przybliżenia w przykładzie:

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

$$m = \inf_{x \in \langle 1, 2 \rangle} |3x^2 + 2x - 3| = 2$$

$$f(x_2) = -0,24784$$

$$|x_n - \alpha| < \frac{0,24784}{2} < 0,124$$

Ponieważ ciąg przybliżeń jest rosnący, więc

$$1,70540 < \alpha < 1,8294$$

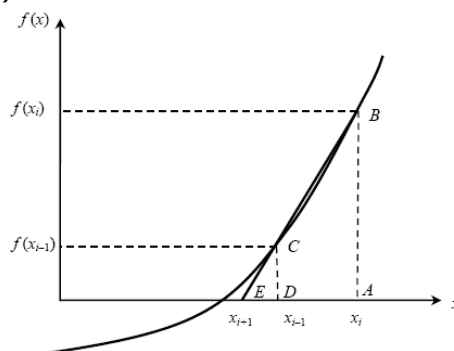


Metoda regula-falsi a metoda siecznych

Wadą metody jest jej stosunkowo **powolna zbieżność**.

Metodę regula-falsi można znacznie ulepszyć tzn. poprawić jej zbieżność, jeżeli zrezygnujemy z żądania, aby funkcja $f(x)$ miała w punktach wytyczających następną cięciwę różne znaki (z wyjątkiem pierwszej iteracji).

Jest to metoda siecznych





Metoda siecznych

W celu obliczenia przybliżenia x_{i+1} korzystamy z dwóch wcześniej wyznaczonych punktów: x_i i x_{i-1} . Wzór określający ciąg przybliżeń jest następujący:

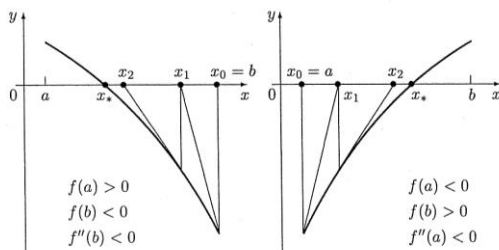
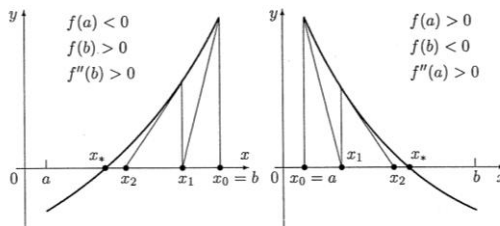
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Wadą metody siecznych jest to, że może nie być zbieżna do pierwiastka (np. gdy początkowe przybliżenia nie leżą dość blisko pierwiastka). Dodatkowo ciąg przybliżeń powinien być malejący (jeżeli odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest tego samego rzędu co oszacowanie błędu, jakim jest obarczona, to następne przybliżenie może być całkowicie błędne).



Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Zakładamy, że $f(x)$ ma różne znaki na końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ oraz $f'(x)$ i $f''(x)$ mają stały znak.

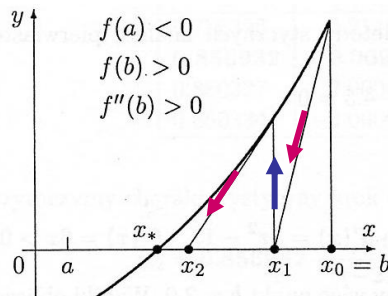


Jako pierwsze przybliżenie pierwiastka przyjmujemy ten koniec przedziału, w którym **funkcja f i jej druga pochodna mają ten sam znak**, tzn. gdy $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$, gdzie $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.



Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Z wybranego końca prowadzimy styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$. Punkt x_1 , będący punktem przecięcia stycznej z osią OX jest kolejnym przybliżeniem pierwiastka. Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to z punktu o współrzędnych $(x_1, f(x_1))$ prowadzimy następną styczną. Punkt x_2 , w którym styczna przecina się z osią OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie zadaną dokładnością.



$$y - f(b) = f'(b)(x - b)$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

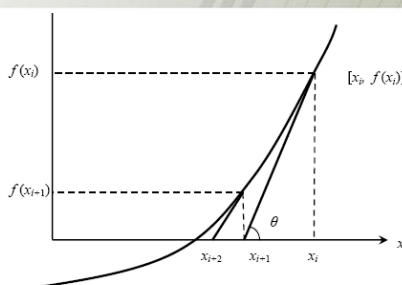


Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Wzór określający kolejne przybliżenia szukanego rozwiązania:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Jest to zbieżny ciąg przybliżeń malejący ($x_{n+1} < x_n$) lub rosnący ($x_{n+1} > x_n$) i ograniczony z dołu lub z góry.



Błąd n-tego przybliżenia można ocenić podobnie jak w metodzie regula-falsi:

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right|$$



Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Znanym przykładem zastosowania metody stycznych jest **algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego**.

Pierwiastek kwadratowy z liczby dodatniej c jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$x^2 - c = 0$$

Obliczenia: $f(x) = x^2 - c$ $f'(x) = 2x$

Stosując metodę stycznych: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n}$

Otrzymujemy:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Metoda ta opiera się na pojęciu **odwzorowania zwężającego**.

Definicja:

Odwzorowanie $\varphi(x)$ w przestrzeni metrycznej (X, ρ) w siebie:

$$\varphi: X \rightarrow X$$

nazywamy odwzorowaniem zawężającym, gdy istnieje taka liczba L , $0 < L < 1$, że:

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\rho(x, y)$$

dla dowolnych $x, y \in X$



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Twierdzenie Banacha:

Niech φ będzie odwzorowaniem zwężającym przestrzeni metrycznej zupełnej (X, ρ) w siebie. Wtedy istnieje jeden i tylko jeden punkt $x_* \in X$ taki, że $\varphi(x_*) = x_*$

Ponadto, jeżeli x_0 jest dowolnym punktem przestrzeni oraz:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{to } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$$

$$\text{i zachodzi nierówność } \rho(x_n, x_*) \leq \frac{L^n}{1-L} \rho(x_1, x_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Twierdzenie Banacha podaje metodę przybliżonego rozwiązywania równania postaci: $x = \varphi(x)$

za pomocą ciągu $x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Twierdzenie: Niech funkcja $\varphi(x)$ będzie określona i różniczkowalna w przedziale domkniętym $[a, b]$ i niech jej wartości należą do tego przedziału. Jeśli istnieje ułamek właściwy q taki, że:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in [a, b]$$

to proces iteracyjny $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

jest zbieżny niezależnie od przybliżenia początkowego $x_0 \in [a, b]$

zaś wartość graniczna $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$

jest jedynym pierwiastkiem równania $x = \varphi(x)$

w przedziale domkniętym $[a, b]$



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Dane jest równanie $f(x)=0$ gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą. Należy wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste tego równania.

Równanie to sprowadzamy do równania równoważnego:

$$x = \varphi(x)$$

Graficzna interpretacja oparta jest na wykresach funkcji:

$$y = x \quad y = \varphi(x)$$

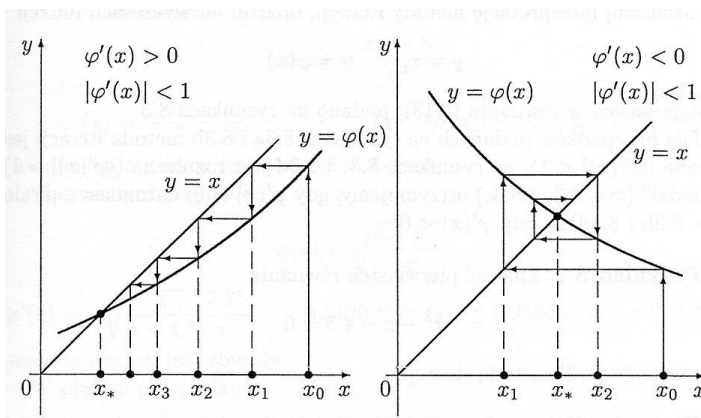
Metoda iteracji jest zbieżna gdy

$$|\varphi'(x)| < 1$$



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

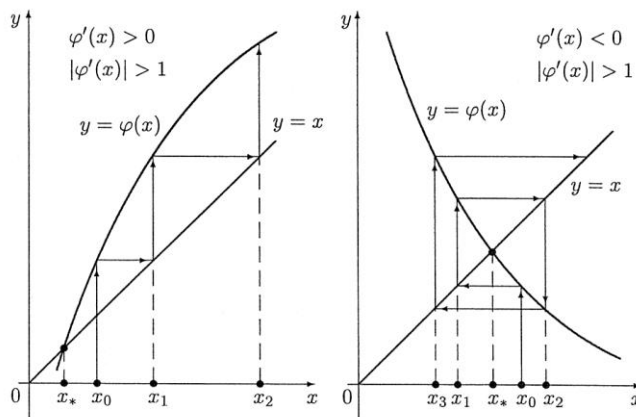
Przypadki gdy metoda jest zbieżna:





Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Przypadki gdy metoda jest rozbieżna:



Met.Numer. Wykład 3

83



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Zadanie domowe:

Znaleźć pierwiastek równania: $x^3 - x - 4.5 = 0$

w przedziale $[1,2]$ metodą iteracji

Równanie $f(x)=0$ można sprowadzić do równania równoważnego $x=\varphi(x)$ w różny sposób:

$$\begin{array}{lll}
 a) \ x = x^3 - 4.5 & c) \ x = \frac{x + 4.5}{x^2} & e) \ x = \sqrt[3]{x + 4.5} \\
 b) \ x = \frac{4.5}{x^2 + 1} & d) \ x = \sqrt{\frac{x + 4.5}{x}} &
 \end{array}$$

Sprawdzić, który sposób zapewnia zbieżność metody

Met.Numer. Wykład 3

84



Metoda kolejnych przybliżeń (iteracji)

Zadanie domowe:

Znaleźć pierwiastek równania: $x^3 - x - 4.5 = 0$

w przedziale $[1,2]$ metodą iteracji

Równanie $f(x)=0$ można sprowadzić do równania równoważnego $x=\varphi(x)$ w różny sposób:

$$\begin{array}{lll}
 a) \ x = x^3 - 4.5 & c) \ x = \frac{x+4.5}{x^2} & e) \ x = \sqrt[3]{x+4.5} \\
 b) \ x = \frac{4.5}{x^2+1} & d) \ x = \sqrt{\frac{x+4.5}{x}} &
 \end{array}$$

Sprawdzić, który sposób zapewnia zbieżność metody



Poszukiwanie wielokrotnych pierwiastków równania

Definicja:

Liczbę α nazywamy r -krotnym ($r \geq 2$) pierwiastkiem równania $f(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $(r-1)$ -krotnym pierwiastkiem równania:

$$f'(x) = 0$$

Jeżeli α jest pierwiastkiem o parzystej krotności, to metoda bisekcji traci sens, ale dla krotności nieparzystej ($r \geq 3$, gdy $f(a)f(b) < 0$) pozostaje słuszna. Podobnie jest dla metody regula falsi i metody siecznych.

Metoda Newtona pozwala na znalezienie pierwiastka zarówno o nieparzystej jak i parzystej krotności lecz obniża się jej rząd.



Poszukiwanie wielokrotnych pierwiastków równania

Modyfikacje utrzymujące rząd i przyspieszające zbieżność metod:

zamiast
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

przyjmujemy
$$x_{n+1} = x_n - r \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

znana a priori krotność pierwiastka

Na ogół krotność pierwiastka nie jest znana. Zamiast funkcji $f(x)$ wprowadza się funkcję $u(x)$:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$



Poszukiwanie wielokrotnych pierwiastków równania

Równanie $u(x)=0$ ma identyczne pierwiastki jak równanie $f(x)=0$ ale wszystkie są pojedyncze

Zmodyfikowana metoda Newtona wykorzystuje wzór:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

gdzie:

$$u'(x_n) = 1 - \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} u(x_n)$$

Zadanie domowe. Znaleźć pierwiastek równania:

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

korzystając z tych trzech metod i porównać ich zbieżność (przyjmując $x_0=3$)



Efektywność metod przybliżonego obliczania pierwiastków

Każdej metodzie przybliżonej można przyporządkować liczbę p (największą możliwą dla danej metody) – zwaną *wykładnikiem zbieżności* danej metody.

Metoda jest rzędu p , jeżeli istnieje stała K taka, że dla dwóch kolejnych przybliżeń x_k i x_{k+1} zachodzi nierówność:

$$|x_{k+1} - x| \leq K|x_k - x|^p$$

Można porównywać rzędy metod określające szybkość ich zbieżności.

Efektywność metody określa zakres obliczeń koniecznych do otrzymania pierwiastka z żadaną dokładnością.



Efektywność metod przybliżonego obliczania pierwiastków

Miarą jakości metody w pobliżu dokładnego pierwiastka może być *wskaźnik efektywności*:

$$E = p^{\frac{1}{k}}$$

gdzie p jest rzędem metody, k – kosztem jednej iteracji

Koszt jednej iteracji zależy przede wszystkim od tego, ile razy w każdym kroku należy obliczać wartość funkcji $f(x)$ i pochodnej.



Efektywność metod przybliżonego obliczania pierwiastków

Metoda	Rząd p	Wskaźnik efektywności E
Bisekcji	1	1
Regula falsi	1	1
Siecznych	1.62	1.62
Newtona (poj.pierw.)	2	$2^{1/(1+k')}$
pierw.wielokr	1	

zakładamy, że koszt obliczenia $f(x)$ $k=1$; k -koszt obliczenia $f'(x)$



Poszukiwanie minimów funkcji jednej zmiennej

Zadanie znajdowania minimum funkcji $f(x)$ można sprowadzić do rozwiązania równania $f'(x)=0$

Wyznaczenie pochodnej funkcji może być zbyt trudne lub funkcja może nie być różniczkowalna.

Jeżeli funkcja f jest dostatecznie regularna i można ją lokalnie przybliżyć wielomianami niskiego rzędu to można zastosować metody aproksymacyjne.

Jeżeli własności funkcji nie są znane to bezpieczniejsze są **metody podziału**.



Metody podziału

Założenia: $f(x)$ ma minimum w punkcie α należącym do przedziału $[a, b]$, $f(x)$ jest malejąca w przedziale $[a, \alpha]$ i rosnąca w $[\alpha, b]$ czyli jest **unimodalna**.

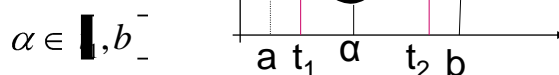
Lemat: Aby zlokalizować punkt α w przedziale $[a', b']$ o mniejszej długości niż przedział $[a, b]$, wystarczy obliczyć wartość funkcji w dwu punktach wewnątrz przedziału $[a, b]$.

$$a < t_1 < t_2 < b$$

Jeżeli $f(t_1) \leq f(t_2)$, to

$$\alpha \in [a, t_2)$$

Jeżeli $f(t_1) > f(t_2)$, to



$$\alpha \in [t_2, b)$$



Metody podziału

Metoda podziału na 3 równe części

Przyjmujemy punkty podziału przedziału $[a, b]$:

$$t_1^i = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \quad t_2^i = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

W każdej iteracji następuje zmniejszenie przedziału $2/3$ razy

Po I iteracjach uzyskujemy przedział o długości:

$$b - a = \left(\frac{2}{3}\right)^I [b^{(0)} - a^{(0)}]$$

Wartość funkcji obliczono $2I$ razy



Metody podziału

Metoda połowienia

Przyjmujemy punkty podziału na cztery części przedziału [a,b]:

$$t_1^i = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \quad t_2^i = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \quad t_3^i = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$$

W każdej iteracji następuje zmniejszenie przedziału 2 razy

Po I iteracjach uzyskujemy przedział o długości:

$$b - a = \left(\frac{1}{2}\right)^I \left(b^{(0)} - a^{(0)} \right)$$

Wartość funkcji obliczono 2I+1 razy

Jest to metoda bardziej ekonomiczna



Metoda optymalnych podziałów

Metoda Johnsona

Najmniejszej liczby obliczeń funkcji wymaga metoda korzystająca z ciągu liczb Fibonacciego.

F ₀	1
F ₁	1
F ₂	2
F ₃	3
F ₄	5
F ₅	8
F ₆	13
F ₇	21

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$$

Opis algorytmu:

Definiujemy pożądaną dokładność ρ wyznaczenia położenia minimum α , tzn. chcemy uzyskać taki punkt t , aby

$$\alpha \in [t - \rho, t + \rho]$$



Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

1. Niech:
$$c = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{\rho}$$

2. Znajdujemy takie N , aby $F_{N-1} < c \leq F_N$

3. Określamy:
$$t_1^i = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a$$

$$t_2^i = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a$$

$i=1, 2, \dots, N-2$



Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

4. W każdej iteracji obliczamy nowe punkty a, b w następujący sposób:

Jeżeli: $f(t_1^i) \leq f(t_2^i)$, to a pozostaje bez zmian, $b = t_2^{(i)}$

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

Po i -tej iteracji długość przedziału $[a, b]$ zostaje zmniejszona

$$\frac{F_{N-1}}{F_{N-i+1}} \text{ razy}$$

bez względu na to, która nierówność jest spełniona



Metoda optymalnych podziałów

Opis algorytmu w metodzie Johnsona:

Po (N-2) iteracjach długość przedziału zostaje zmniejszona do wartości

$$(b-a) = \frac{F_{N-1}}{F_N} \cdot \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}} \dots \frac{F_2}{F_3} (b^{(0)} - a^{(0)}) = 2 \cdot \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{F_N} \leq 2\rho$$

Wykonano łącznie N-1 obliczeń wartości funkcji



Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = |x|$ zlokalizowane na przedziale $[-4, 4]$. Pożądana dokładność $\rho = 1$.

(a) Metoda połowienia $t_1^1 = \frac{3}{4}(-4) + \frac{1}{4}4 = -2$

$$t_2^1 = \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{2}4 = 0$$

$$t_3^1 = \frac{1}{4}(-4) + \frac{3}{4}4 = 2$$

Sprawdzamy: $f(-2) > f(0)$ i $f(2) > f(0)$; możemy zawęzić przedział do: $[-2, 2]$



Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Dokonyjemy nowego podziału na 4 równe części

$$t_1^{(2)} = \frac{3}{4}(-2) + \frac{1}{4}2 = -1$$

$$t_2^{(2)} = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}2 = 0$$

$$t_3^{(2)} = \frac{1}{4}(-2) + \frac{3}{4}2 = 1$$

Sprawdzamy: $f(-1) > f(0)$ i $f(1) > f(0)$; możemy zawęzić przedział do: $[-1, 1]$ ale wtedy $t=0$; $f(t)=0$

Wykonano łącznie 5 obliczeń wartości funkcji



Metoda optymalnych podziałów

Przykład:

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = |x|$ zlokalizowane na przedziale $[-4, 4]$. Pożądana dokładność $\rho = 1$.

(b) Metoda Johnsona
$$c = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{\rho} = \frac{4 - (-4)}{1} = 8$$

$$F_{N-1} < c \leq F_N \Rightarrow F_4 = 5 < c = 8 \leq F_5 = 8$$

zatem $N=5$

$$t_1^{(1)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-1-1}}{F_{5-1+1}}(4 - (-4)) + (-4) = \frac{3}{8}8 - 4 = -1$$

$$t_2^{(1)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-1}}{F_{5-1+1}}(4 - (-4)) + (-4) = \frac{5}{8}8 - 4 = 1$$



Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(1)} = -1; t_2^{(1)} = 1$$

Szukamy nowych granic przedziału a,b

Jeżeli: $f(t_1^{(i)}) \leq f(t_2^{(i)})$, to a pozostaje bez zmian, $b = t_2^{(i)}$

ale $f(-1) = f(1)$, czyli $a = -4$ $b = 1$

Obliczamy nowe punkty podziału:

$$t_1^{(2)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-2-1}}{F_{5-2+1}}(1 - (-4)) + (-4) = \frac{2}{5}5 - 4 = -2$$

$$t_2^{(2)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-2}}{F_{5-2+1}}(1 - (-4)) + (-4) = \frac{3}{5}5 - 4 = -1$$



Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(2)} = -2; t_2^{(2)} = -1$$

Szukamy nowych granic przedziału a,b

Jeżeli: $f(t_1^{(i)}) > f(t_2^{(i)})$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

ale $f(-2) > f(-1)$, czyli $a = -2$ $b = 1$

Obliczamy nowe punkty podziału:

$$t_1^{(3)} = \frac{F_{N-i-1}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-3-1}}{F_{5-3+1}}(1 - (-2)) + (-2) = \frac{1}{3}3 - 2 = -1$$

$$t_2^{(3)} = \frac{F_{N-i}}{F_{N-i+1}}(b-a) + a = \frac{F_{5-3}}{F_{5-3+1}}(1 - (-2)) + (-2) = \frac{2}{3}3 - 2 = 0$$



Metoda optymalnych podziałów

$$t_1^{(3)} = -1; t_2^{(3)} = 0$$

Szukamy nowych granic przedziału a, b

Jeżeli: $f(t_1^{(i)}) > f(t_2^{(i)})$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

ale $f(-1) > f(0)$, czyli $a = -1$ $b = 1$

$$[a, b] = [-1, 1] \Rightarrow t = 0$$

$$f(t) = 0$$

Wykonano łącznie 4 obliczenia wartości funkcji



Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Polega na takim wyborze punktów podziału $t_1^{(i)}$ i $t_2^{(i)}$, aby

- przedział $[a, b]$ zmniejszał swą długość po każdej iteracji tyle samo razy
- po wyznaczeniu punktów nowego podziału, tzn. $t_1^{(i+1)}$ i $t_2^{(i+1)}$, jeden z tych punktów pokrywał się z wyznaczonym punktem podziału w poprzedniej iteracji.

Ma to na celu zmniejszenie liczby obliczeń wartości funkcji, gdyż jedynie w pierwszej iteracji obliczamy dwie wartości funkcji, w następnych zaś już tylko jedną wartość funkcji.

Tę cechę miał omówiony poprzednio algorytm optymalny



Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Wymagania te spełnia algorytm, w którym:

$$t_2^{(i)} - a = b - t_1^{(i)} = \tau(b - a), \quad \tau \in (0,1)$$

$$b - t_2^{(i)} = \tau(b - t_1^{(i)})$$

Stąd: $\tau^2 + \tau - 1 = 0$

czyli: $\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62$

Liczba τ jest stosunkiem boków prostokąta nazywanego przez starożytnych Greków „złotym”



Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Punkty podziału obliczamy ze wzoru:

$$t_1^{(1)} = a + (1 - \tau)(b - a)$$

$$t_2^{(1)} = b - (1 - \tau)(b - a)$$

Przyjęto mnożnik:

$$1 - \tau$$

aby zmniejszyć błędy zaokrągleń przy wyznaczaniu kolejnych punktów podziału



Metoda optymalnych podziałów

Metoda złotego podziału

Nowe punkty a, b powstają w następujący sposób:

Jeżeli: $f(t_1^i) \leq f(t_2^i)$, to a pozostaje bez zmian, $b = t_2^{(i)}$

$$t_2^{(i+1)} = t_1^{(i)}$$

$$t_1^{(i+1)} = a + (1 - \tau)(b - a)$$

Jeżeli: $f(t_1^i) > f(t_2^i)$, to b pozostaje bez zmian, $a = t_1^{(i)}$

$$t_1^{(i+1)} = t_2^{(i)}$$

$$t_2^{(i+1)} = b - (1 - \tau)(b - a), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Aby wyznaczyć t metodą złotego podziału z dokładnością nie gorszą niż metodą Johnsona, potrzeba co najwyżej jednego dodatkowego obliczenia wartości funkcji.