METODY NUMERYCZNE

Wykład 4.

Całkowanie numeryczne

dr hab. inż. Katarzyna Zakrzewska, prof. AGH

Plan

- Wzór trapezów
- Złożony wzór trapezów
- Metoda ekstrapolacji Richardsona
- Metoda Romberga
- Metoda Simpsona – wzór parabol
- Metoda Gaussa

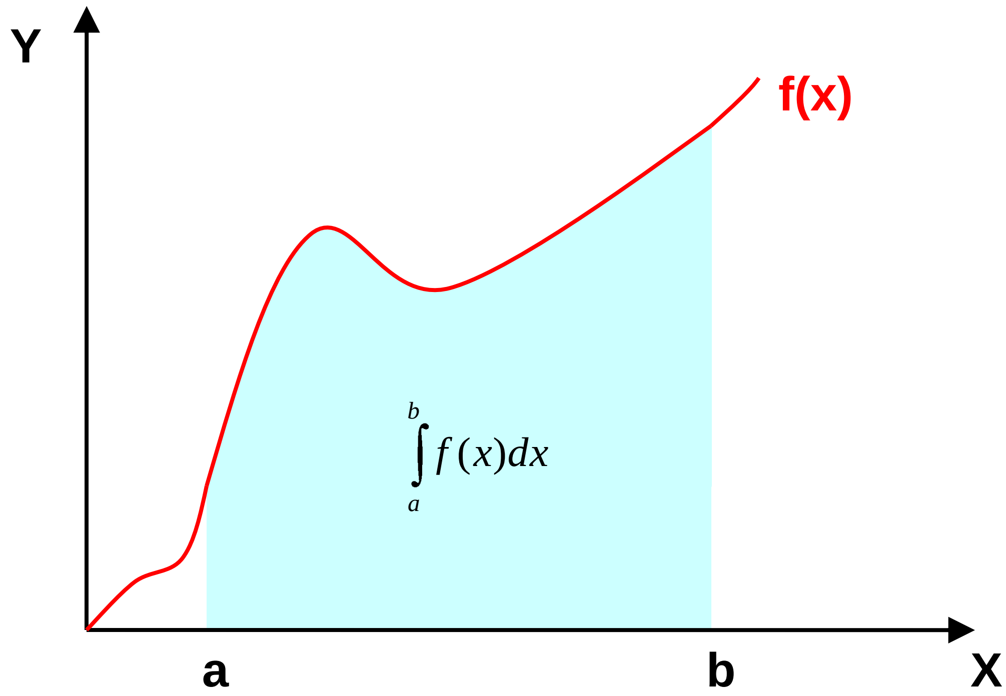
Całkowanie numeryczne - idea

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Całkę można przybliżyć sumą

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$x_i \le c_i \le x_{i+1}$$



Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratura Newtona – Cotesa należy do metod z ustalonymi węzłami, polega na tym, że funkcja f(x) jest interpolowana wielomianem (np. Lagrange'a)

$$f(x) \approx f_n(x)$$

gdzie:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Wówczas całka z funkcji f(x) może być przybliżana całką z funkcji interpolującej $f_n(x)$ n-tego stopnia

$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^b f_n(x)$$

Wzór trapezów

Zakładamy n = 1 czyli $f_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$I = \int_a^b f(x) \approx \int_a^b f_1(x) = \int_a^b (a_0 + a_1 x)dx$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Szukamy współczynników a_0 i a_1

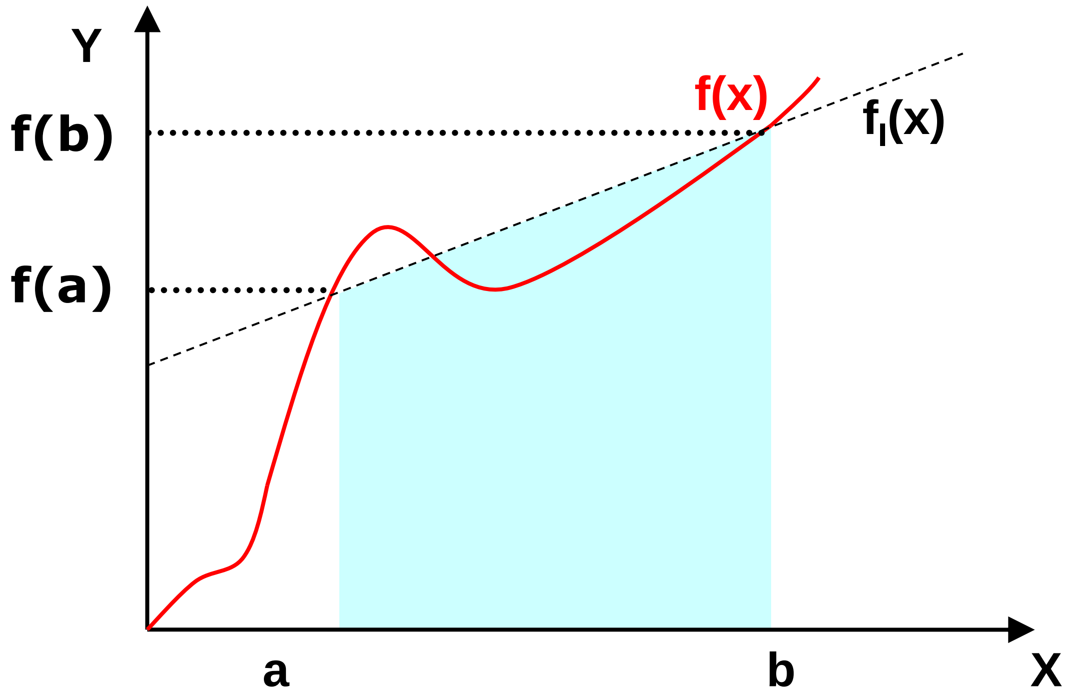
Zakładamy, że prosta, która przybliża funkcję f(x) przechodzi przez punkty (a,f(a)) i (b,f(b)). Czyli:

$$\begin{cases} f(a) = f_1(a) = a_0 + a_1 a \\ f(b) = f_1(b) = a_0 + a_1 b \end{cases} \Rightarrow \quad a_0 = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a}, \quad a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx pole\ trapezu$$



Wzór trapezów

Przykład 1:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od t_1=8 s do t_2=30 s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t}\right] - 9.8t$$

a) Przy pomocy metody trapezów znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

b) Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (ang. true relative error)

Wzór trapezów

a)

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \qquad a = 8\ s \qquad b = 30\ s$$

$$f(t) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t$$

$$f(8) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(8)}\right]-9.8(8) \quad = 177.27\ m/s$$

$$f(30) = 2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100(30)}\right]-9.8(30) \quad = 901.67\ m/s$$

$$I = (30-8)\left[\frac{177.27+901.67}{2}\right] \quad = 11868\ m$$

Wzór trapezów

b) Wartość dokładna

$$\Delta x = \int_{8}^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt = 11061 \ m$$

Błąd względny:

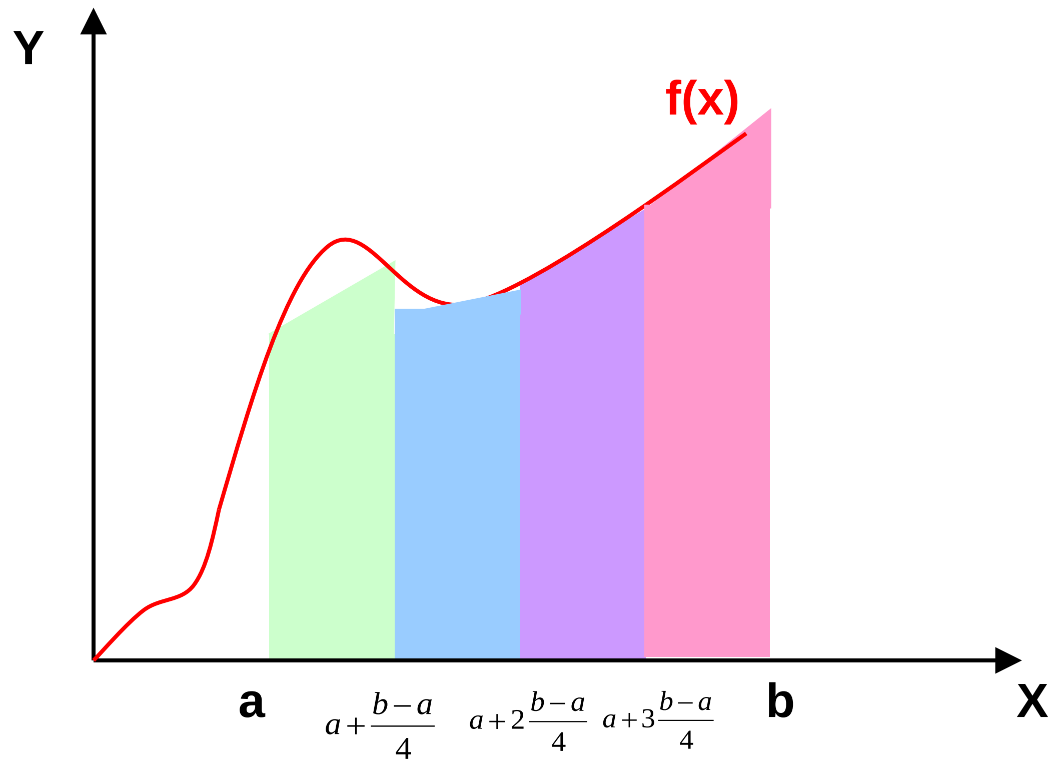
$$\left| \in_t \right| = \left| \frac{11061 - 11868}{11061} \right| \times 100 \ = 7.2959\%$$

Złożony wzór trapezów

Błąd, jak pokazuje poprzedni przykład, jest zbyt duży. Można zaproponować podział przedziału całkowania na n segmentów, każdy o długości h.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

dla n=4



$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+3h} f(x)dx + \int_{a+3h}^{a+4h} f(x)dx$$

Złożony wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

$$= h\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2}\right] + h\left[\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}\right] + \ldots$$

$$\ldots + [b-(a+(n-1)h]\left[\frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2}\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

Złożony wzór trapezów

Przykład 2:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t}\right] - 9.8t$$

a) Przy pomocy metody trapezów znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ przyjmując $n=2$

b) Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Złożony wzór trapezów

a) $$I = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\} + f(b)\right]$$

n = 2   a = 8 s   b = 30 s $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{30-8}{2} = 11s$

$$I = \frac{30-8}{2(2)}\left[f(8) + 2\left\{\sum_{i=1}^{2-1} f(a+ih)\right\} + f(30)\right]$$

$$= \frac{22}{4}\left[f(8) + 2f(19) + f(30)\right] = \frac{22}{4}\left[77.27 + 2(484.75) + 901.67\right]$$

$$= 11266\ m$$

Złożony wzór trapezów

b) wartość dokładna wynosi:

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000\, ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt \quad = 11061\ m$$

Błąd względny to:

$$\left| \in_t \right| = \left| \frac{11061 - 11266}{11061} \right| \times 100 \; = 1.8534\%$$

Złożony wzór trapezów

n	Δx	E_t	$\lvert\in_t\rvert\%$	$\lvert\in_a\rvert\%$
1	11868	-807	7.296	---
2	11266	-205	1.853	5.343
3	11153	-91.4	0.8265	1.019
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
5	11094	-33.0	0.2981	0.1669
6	11084	-22.9	0.2070	0.09082
7	11078	-16.8	0.1521	0.05482
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Błąd bezwzględny metody z pojedynczym segmentem

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta), \quad a < \zeta < b$$

gdzie ζ jest punktem w $[a, b]$

Błąd w metodzie złożonej (wielosegmentowej) jest sumą błędów dla każdego segmentu. Błąd pojedynczego segmentu wynosi:

$$E_1 = \frac{[(a+h)-a]^3}{12} f''(\zeta_1), \quad a < \zeta_1 < a+h$$

$$= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_1)$$

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Podobnie:

$$E_i = \frac{\left[(a+ih)-(a+(i-1)h)\right]^3}{12} f''(\zeta_i), \quad a+(i-1)h < \zeta_i < a+ih$$

$$= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_i)$$

dla n:

$$E_n = \frac{\left[b-\left(a+(n-1)h\right)\right]^3}{12} f''(\zeta_n), \quad a+(n-1)h < \zeta_n < b$$

$$= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_n)$$

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Całkowity błąd w metodzie złożonej jest sumą błędów pojedynczych segmentów:

$$E_t = \sum_{i=1}^{n} E_i = \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i) = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)}{n}$$

Wyrażenie $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)}{n}$

jest przybliżoną średnią wartością drugiej pochodnej w przedziale $a < x < b$

$$E_t \propto \alpha \frac{1}{n^2}$$

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Poniższa tablica dla całki
$$\int_8^{30}\left(2000\ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt$$

w funkcji liczby segmentów n. Widać, że gdy liczba segmentów jest podwajana, błąd E_t zmniejsza się w przybliżeniu czterokrotnie.

n	**Value**	E_t	$\lvert\in_t\rvert\%$	$\lvert\in_a\rvert\%$
2	11266	-205	1.854	5.343
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560
16	11065	-3.22	0.02913	0.00401

Całkowanie metodą Romberga

Metoda Romberga jest rozszerzeniem metody trapezów i daje lepsze przybliżenie całki poprzez zasadniczą redukcję błędu (true error)

Ekstrapolacja Richardsona

Błąd (E_t true error) w n-segmentowym wzorze trapezów wynosi

$$E_t \cong \frac{C}{n^2}$$

gdzie C jest współczynnikiem proporcjonalności

Stąd:

$$E_t = TV - I_n$$

wartość dokładna (true value)

wartość przybliżona np. wyliczona ze wzoru trapezów (approximate value)

Ekstrapolacja Richardsona

Można pokazać, że $$\frac{C}{(2n)^2} \cong TV - I_{2n}$$

gdy segment zostaje zmniejszony o połowę

Ze wzorów: $$\begin{cases} \dfrac{C}{(n)^2} \cong TV - I_n \\ \dfrac{C}{(2n)^2} \cong TV - I_{2n} \end{cases}$$

otrzymujemy: $$\boxed{TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3}}$$

Ekstrapolacja Richardsona

Przykład 3:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od t_1=8 s do t_2=30 s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t}\right] - 9.8t$$

a) Przy pomocy ekstrapolacji Richardsona znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

b) Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Przyjąć n=2

Tabela wyników ze złożonego wzoru trapezów do n=8 segmentów

n	Δx	E_t	$\lvert\in_t\rvert\%$	$\lvert\in_a\rvert\%$
1	11868	-807	7.296	---
2	11266	-205	1.853	5.343
3	11153	-91.4	0.8265	1.019
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
5	11094	-33.0	0.2981	0.1669
6	11084	-22.9	0.2070	0.09082
7	11078	-16.8	0.1521	0.05482
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560

Ekstrapolacja Richardsona

a)

$$I_2 = 11266m \qquad I_4 = 11113m$$

$$TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3}$$ dla *n=2*

$$TV \cong I_4 + \frac{I_4 - I_2}{3} = 11113 + \frac{11113 - 11266}{3}$$

$$= 11062m$$

Ekstrapolacja Richardsona

b)

Wartość dokładna to:

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt \quad = 11061\, m$$

Stąd

$$E_t = 11061 - 11062 \qquad = -1\, m$$

Ekstrapolacja Richardsona

c) Błąd względny

$$|\in_t| = \left|\frac{11061-11062}{11061}\right| \times 100 = 0.00904\%$$

Porównanie wyników z metodą złożoną trapezów

n	**Δx** (m) wzór trapezów	$|\in_t|\%$ wzór trapezów	**Δx** (m) ekstrapolacja Richardsona	$|\in_t|\%$ ekstrapolacja Richardsona
1	11868	7.296	--	--
2	11266	1.854	11065	0.03616
4	11113	0.4655	11062	0.009041
8	11074	0.1165	11061	0.0000

Metoda Romberga

Całkowanie metodą Romberga stosuje ten sam wzór co ekstrapolacja Richardsona. Jednakże, metoda Romberga jest to algorytm rekurencyjny. Przypomnijmy:

$$TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3}$$

Można zapisać

$$\left(I_{2n}\right)_R = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3} = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{4^{2-1} - 1}$$

Wartość dokładna TV jest zastąpiona przez wynik całkowania metodą Richardsona $\left(I_{2n}\right)_R$

Znak $\cong$ jest zastąpiony przez znak równości.

Metoda Romberga

Estymowana wartość dokładna wynosi: $TV \cong (I_{2n})_R + Ch^4$

gdzie Ch^4 jest wartością błędu przybliżenia

Następna wartość całki (podwajając liczbę segmentów) wynosi:

$$(I_{4n})_R = I_{4n} + \frac{I_{4n} - I_{2n}}{3}$$

Estymowana wartość dokładna wynosi teraz:

$$TV \cong (I_{4n})_R + \frac{(I_{4n})_R - (I_{2n})_R}{15}$$

$$= (I_{4n})_R + \frac{(I_{4n})_R - (I_{2n})_R}{4^{3-1} - 1}$$

Metoda Romberga

Ogólne wyrażenie w metodzie Romberga

$$I_{k,j} = I_{k-1,j+1} + \frac{I_{k-1,j+1} - I_{k-1,j}}{4^{k-1} - 1}, k \geq 2$$

Wskaźnik *k* reprezentuje rząd ekstrapolacji

k=1 odpowiada wartościom uzyskanym ze wzoru trapezów

k=2 odpowiada wartościom uzyskanym z błędem $O(h^2)$

Wskaźnik *j* reprezentuje dokładność; j+1 daje całkę wyznaczoną dokładniej niż j

Metoda Romberga

Przykład 4:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t}\right] - 9.8t$$

a) Przy pomocy wzoru Romberga znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

b) Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Przyjąć n=1, 2, 4, 8

Tabela wyników ze złożonego wzoru trapezów do n=8 segmentów

n	Δx	E_t	$\lvert\in_t\rvert\%$	$\lvert\in_a\rvert\%$
1	11868	-807	7.296	---
2	11266	-205	1.853	5.343
3	11153	-91.4	0.8265	1.019
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
5	11094	-33.0	0.2981	0.1669
6	11084	-22.9	0.2070	0.09082
7	11078	-16.8	0.1521	0.05482
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560

Metoda Romberga

Na podstawie tabeli odczytujemy:

$$I_{1,1} = 11868 \qquad I_{1,2} = 11266$$

$$I_{1,3} = 11113 \qquad I_{1,4} = 11074$$

W pierwszym przybliżeniu:

$$I_{2,1} = I_{1,2} + \frac{I_{1,2} - I_{1,1}}{3}$$

$$= 11266 + \frac{11266 - 11868}{3}$$

Metoda Romberga

Podobnie,

$$I_{2,2} = I_{1,3} + \frac{I_{1,3} - I_{1,2}}{3}$$

$$= 11113 + \frac{11113 - 11266}{3}$$

$$= 11062$$

$$I_{2,3} = I_{1,4} + \frac{I_{1,4} - I_{1,3}}{3}$$

$$= 11074 + \frac{11074 - 11113}{3}$$

$$= 11061$$

Metoda Romberga

W drugim przybliżeniu,

$$I_{3,1} = I_{2,2} + \frac{I_{2,2} - I_{2,1}}{15}$$

$$= 11062 + \frac{11062 - 11065}{15}$$

$$= 11062$$

Podobnie,

$$I_{3,2} = I_{2,3} + \frac{I_{2,3} - I_{2,2}}{15}$$

$$= 11061 + \frac{11061 - 11062}{15}$$

$$= 11061$$

Metoda Romberga

Dla trzeciego rzędu,

$$I_{4,1} = I_{3,2} + \frac{I_{3,2} - I_{3,1}}{63}$$

$$= 11061 + \frac{11061 - 11062}{63}$$

$$= 11061m$$

Metoda Romberga

		Rząd 1	*Rząd 2*	*Rząd 3*
1-segment	11868			
		11065		
2-segment	11262		11062	
		11062		11061
4-segment	11113		11061	
		11061		
8-segment	11074			

Poprawione wartości całki metodą Romberga

Metoda Simpsona

Metoda trapezów była oparta na przybliżeniu funkcji podcałkowej f(x) wielomianem stopnia pierwszego. W metodzie Simpsona wykorzystuje się wielomiany stopnia drugiego, jest to tzw. metoda parabol.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

gdzie:

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

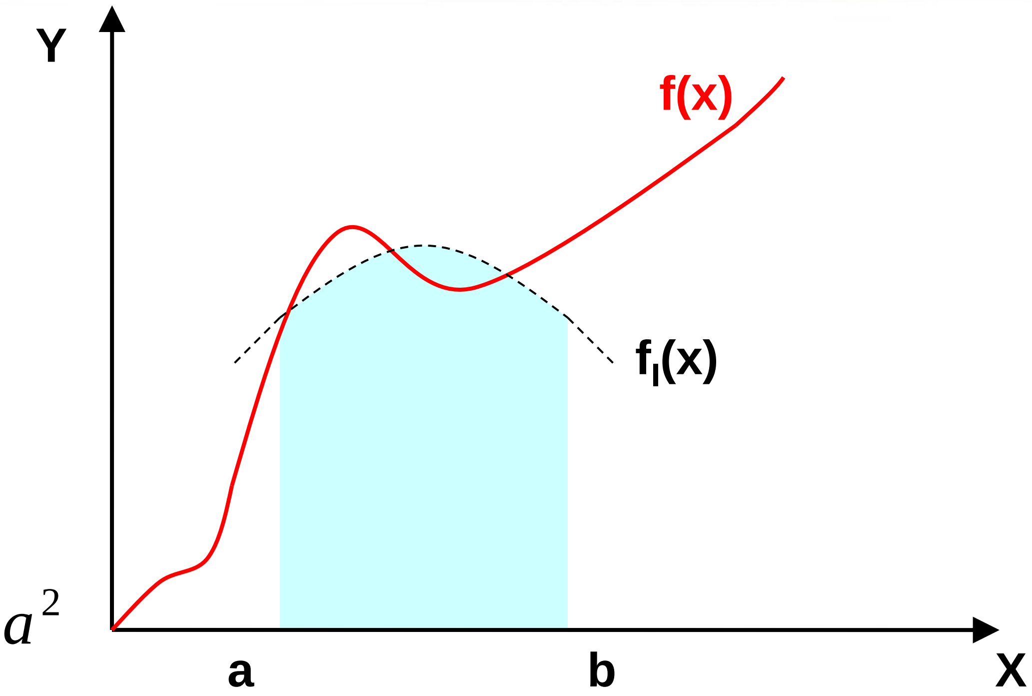
Metoda Simpsona

Równanie paraboli dla 3 punktów:

$$(a, f(a)),$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right),$$

$$(b, f(b))$$



$$\begin{cases} f(a) = f_2(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ f(b) = f_2(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 \end{cases}$$

Metoda Simpsona

Wyznaczone współczynniki funkcji $f_2(x)$ to:

$$a_0 = \frac{a^2 f(b) + abf(b) - 4abf\left(\frac{a+b}{2}\right) + abf(a) + b^2 f(a)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_1 = -\frac{af(a) - 4af\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3af(b) + 3bf(a) - 4bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + bf(b)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_2 = \frac{2\left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

Metoda Simpsona

Wówczas:

$$I \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

$$= \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right) dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + a_2 \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Metoda Simpsona

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Co daje:

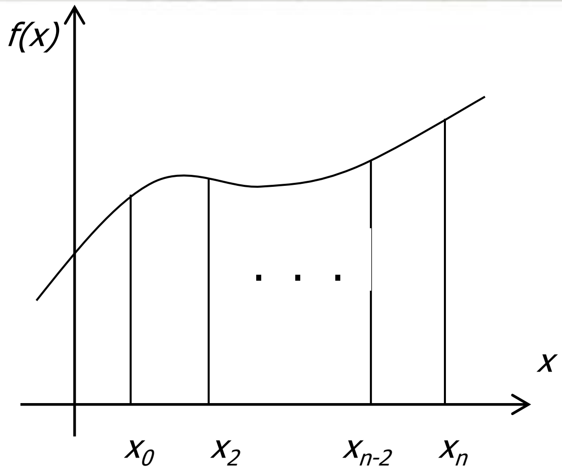
$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

wzór parabol

Metoda Simpsona w wersji złożonej

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots..$$

$$\ldots. + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)dx = (x_2 - x_0)\left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}\right] + \ldots$$

$$+ (x_4 - x_2)\left[\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}\right] + \ldots$$

$$\ldots + (x_{n-2} - x_{n-4})\left[\frac{f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})}{6}\right] + \ldots$$

$$+ (x_n - x_{n-2})\left[\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}\right]$$

$$x_i - x_{i-2} = 2h$$

$$i = 2, 4, \ldots, n$$

Metoda Simpsona

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\left[\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}\right]+\dots$$

$$+2h\left[\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6}\right]+\dots$$

$$+2h\left[\frac{f(x_{n-4})+4f(x_{n-3})+f(x_{n-2})}{6}\right]+\dots$$

$$+2h\left[\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}\right]$$

Metoda Simpsona

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\{f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2\{f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})\}+f(x_n)\}\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ i=odd}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i=even}}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

$$= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ i=odd}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i=even}}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

Metoda Simpsona – analiza błędu

Wartości przybliżone
przykładu stosując regułę 1/3 Simpsona z wieloma segmentami

n	Wartość przybliżona	E_t	$\|\epsilon_t\|$
2	11065.72	4.38	0.0396%
4	11061.64	0.30	0.0027%
6	11061.40	0.06	0.0005%
8	11061.35	0.01	0.0001%
10	11061.34	0.00	0.0000%

Metoda Simpsona – analiza błędu

Błąd dla jednego segmentu $E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta), \quad a < \zeta < b$

Błąd w metodzie wielosegmentowej

$$E_1 = -\frac{(x_2 - x_0)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_1) \quad = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_1), \quad x_0 < \zeta_1 < x_2$$

$$E_2 = -\frac{(x_4 - x_2)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_2) \quad = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_2), \quad x_2 < \zeta_2 < x_4$$

$$E_i = -\frac{(x_{2i} - x_{2(i-1)})^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_i) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_i), \quad x_{2(i-1)} < \zeta_i < x_{2i}$$

Metoda Simpsona – analiza błędu

Całkowity błąd

$$E_t = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} E_i = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i) = -\frac{(b-a)^5}{90n^5}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{90n^4}\frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)}{n}$$

$$\overline{f}^{(4)} = \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)}{n} \qquad E_t = -\frac{(b-a)^5}{90n^4}\overline{f}^{(4)}$$

średnia wartość pochodnej

Metoda Gaussa

Całkę metodą kwadratury Gaussa przedstawia wzór:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

stałe współczynniki

Punkty x_1 i x_2 , w których określamy wartość funkcji podcałkowej nie są ustalone (jak poprzednio na granicach przedziału czyli a i b), ale są a priori dowolnie rozmieszczone w przedziale <a,b>.

Metoda Gaussa

Niewiadome x_1, x_2, c_1, c_2 znajduje się zakładając, że funkcja podcałkowa spełnia warunek:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4}\right]_a^b$$

$$= a_0 (b - a) + a_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$

AGH

Metoda Gaussa

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

z jednej strony

$$\int_a^b f(x)dx = c_1\left(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3\right) + c_2\left(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3\right)$$

$$= a_0\left(c_1 + c_2\right) + a_1\left(c_1x_1 + c_2x_2\right) + a_2\left(c_1x_1^2 + c_2x_2^2\right) + a_3\left(c_1x_1^3 + c_2x_2^3\right)$$

z drugiej strony

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right)dx$$

$$= a_0\left(b - a\right) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$

Metoda Gaussa

$$a_0\left(c_1+c_2\right)+a_1\left(c_1x_1+c_2x_2\right)+a_2\left(c_1x_1^{2}+c_2x_2^{2}\right)+a_3\left(c_1x_1^{3}+c_2x_2^{3}\right)$$

$$=a_0\left(b-a\right)+a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)+a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)+a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

$$b-a=c_1+c_2 \qquad \frac{b^2-a^2}{2}=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\frac{b^3-a^3}{3}=c_1x_1^{2}+c_2x_2^{2} \qquad \frac{b^4-a^4}{4}=c_1x_1^{3}+c_2x_2^{3}$$

Metoda Gaussa

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} b-a = c_1 + c_2 \\ \dfrac{b^2-a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \dfrac{b^3-a^3}{3} = c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2} \\ \dfrac{b^4-a^4}{4} = c_1 x_1^{\,3} + c_2 x_2^{\,3} \end{cases}$$

otrzymujemy dla metody dwupunktowej:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \qquad x_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Metoda Gaussa

W dwu-punktowej metodzie Gaussa, całka funkcji f(x) wyraża się wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{b+a}{2}\right)+\frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{b+a}{2}\right)$$

Uogólniając dla n punktów:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + c_n f(x_n)$$

Metoda Gaussa

W n-punktowej metodzie Gaussa, współczynniki c_i oraz argumenty x_i są stabelaryzowane dla całek w granicach od -1 do 1

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$$

n	współczynniki	argumenty funkcji
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0.000000000 x_3 = 0.774596669
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_4 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312

Metoda Gaussa

n	współczynniki	argumenty funkcji
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0.000000000 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.2386191860 x_4 = 0.2386191860 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514

Metoda Gaussa

Jeżeli dane są w tablicach dla $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ to jak obliczamy

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad ?$$

Granice całkowania $[a, b]$ należy zamienić na $[-1, 1]$

Niech $x = mt + c$

Dla $x = a, \quad t = -1$

Dla $x = b, \quad t = 1$

Wynika stąd, że:

$$\begin{cases} m = \dfrac{b-a}{2} \\ c = \dfrac{b+a}{2} \end{cases}$$

Metoda Gaussa

Stąd: $$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Ostatecznie:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt$$

Metoda Gaussa

Przykład 5:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od t_1=8 s do t_2=30 s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t}\right] - 9.8t$$

a) Przy pomocy dwu-punktowej metody Gaussa znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

b) Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Metoda Gaussa

Najpierw zmieniamy granice całkowania z [8,30] na [-1,1]

$$\int_{8}^{30} f(t)dt = \frac{30-8}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{30-8}{2}x + \frac{30+8}{2}\right)dx$$

$$= 11\int_{-1}^{1} f(11x+19)dx$$

Następnie odczytujemy z tablic dla n=2

$$c_1 = 1.000000000$$

$$x_1 = -0.577350269$$

$$c_2 = 1.000000000$$

$$x_2 = 0.577350269$$

Metoda Gaussa

Korzystamy ze wzoru kwadratury Gaussa

$$11\int_{-1}^{1} f\left(11x+19\right)dx \approx 11c_1 f\left(11x_1+19\right)+11c_2 f\left(11x_2+19\right)$$

$$=11f\left(11(-0.5773503)+19\right)+11f\left(11(0.5773503)+19\right)$$

$$=11f(12.64915)+11f(25.35085)$$

$$=11(296.8317)+11(708.4811)$$

$$=11058.44\ m$$

Metoda Gaussa

Skorzystaliśmy z tego, że:

$$f(12.64915) = 2000 ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100(12.64915)}\right] - 9.8(12.64915)$$

$$= 296.8317$$

$$f(25.35085) = 2000 ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100(25.35085)}\right] - 9.8(25.35085)$$

$$= 708.4811$$

Metoda Gaussa

b) Błąd bezwzględny (true error) E_t

$$E_t = 11061.34 - 11058.44$$

$$= 2.9000\ m$$

c) Błąd względny, $|\in_t|$

$$|\in_t| = \left|\frac{11061.34 - 11058.44}{11061.34}\right| \times 100\%$$

$$= 0.0262\%$$