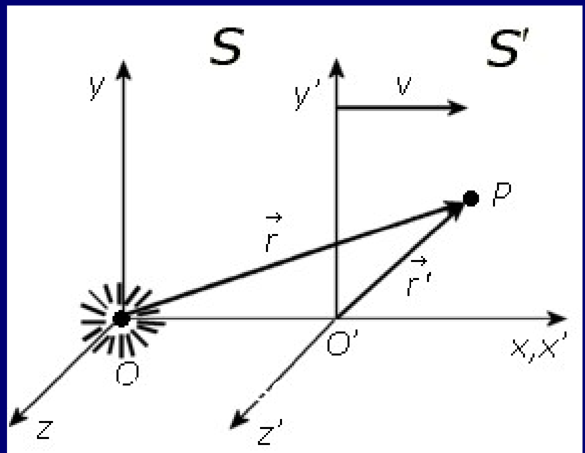
MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

TRANFORMACJA LORENTZA

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

Fizyka relatywistyczna jest związana z pomiarem miejsca i czasu zdarzeń w układach odniesienia, które poruszają się względem siebie. Stanowi nowe podejście do jednoczesności zdarzeń.

Teoria jest nazywana „szczególną” gdyż dotyczy inercjalnych układów odniesienia, w których spełnione są prawa dynamiki Newtona. Ogólna teoria względności dotyczy układów poruszających się z przyspieszeniem i stanowi inne spojrzenie na grawitację.



TRANSFORMACJA LORENTZA

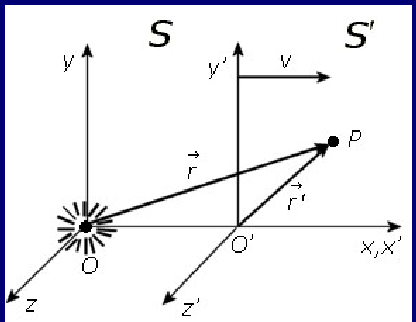
Założenia:

1. Prędkość światła nie zależy od ruchu źródła światła lub odbiornika czyli jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia, pozostających w ruchu jednostajnym prostoliniowym względem źródła.
2. Przestrzeń jest jednorodna i izotropowa.
3. Podstawowe prawa fizyki są identyczne dla każdej pary obserwatorów, znajdujących się względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym

(1,3) Postulaty Einsteina, 1905

Wyprowadzenie transformacji Lorentza

- Niech S będzie układem odniesienia, w którym znajduje się źródło światła w spoczynku.
- Źródło światła znajduje się w początku układu S i w chwili t=0 rozpoczyna się emisja.
- Równanie kulistego czoła fali przyjmuje postać:



$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

x, y, z – współrzędne przestrzenne, t – czas,

c – prędkość światła równa ok. $3 \cdot 10^8$ m/s

- Położenie i czas mierzone przez obserwatora w inercjalnym układzie S’ poruszającym się względem S z prędkością V oznaczmy x’,y’,z’,t’
- Załóżmy dla t=0, t’=0 i początek układu S’ znajduje się w tym samym punkcie co źródło w układzie S w chwili początkowej
- Dla obserwatora w układzie S’ równanie kulistego czoła fali ma postać:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

ZADANIE DOMOWE

Wykazać, że transformacja Galileusza w postaci:

$$\boxed{x' = x - Vt; \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t}$$

przestaje być słuszna, tj. nie pozwala na zachowanie niezmienniczości czoła fali

- Szukamy transformacji, która byłaby prosta dla y' i z' oraz liniowa względem x i t.
- Musimy odrzucić założenie, że t=t'
- Propozycja: $x' = x - Vt; \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t + fx$
- Gdy podstawimy do: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

otrzymamy: $x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ftx + c^2f^2x^2$

gdy $f = -\frac{V}{c^2}$ wyrazy zawierające xt znikają

- Otrzymujemy wyrażenie:

$$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+y^2+z^2=c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$$

- Aby usunąć niepożądany mnożnik ($1-v^2/c^2$) przyjmujemy transformację w postaci:

$$x'=\frac{x-Vt}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\frac{t-(V/c^2)x}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Transformacja Lorentza

Postać transformacji Lorentza

Obowiązuje dla wszystkich prędkości

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

$$\frac{v}{c} \equiv \beta, \quad (\beta \le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma, \quad (\gamma \ge 1)$$

Postać transformacji Lorentza

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

Transformacja prosta

$$x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right)$$

Transformacja odwrotna

Dla $v/c \to 0$ otrzymujemy klasyczną transformację Galileusza

Konsekwencje transformacji Lorentza

- Skrócenie długości pręta poruszającego się równolegle do swej długości

$$L = L_o\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

L_o – długość własna

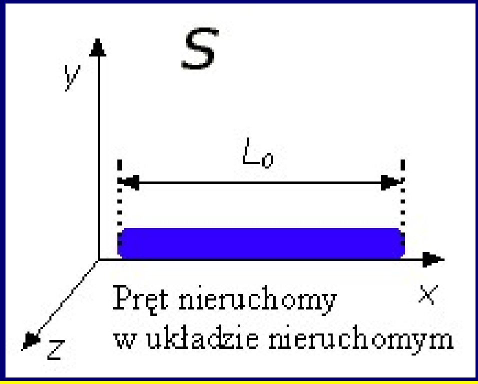
- Dylatacja czasu tj wydłużenie odstępów czasu mierzonych przez zegar będący w ruchu

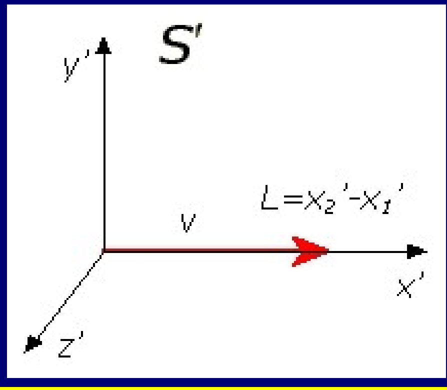
$$t' = \frac{\tau}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

τ – czas własny

SKRÓCENIE DŁUGOŚCI

Mierzymy długość pręta poruszającego się w kierunku swojej długości.





Obserwator w układzie S mierzy współrzędne końców pręta, które są niezależne od czasu.
Długość: $L_o = x_2 - x_1$

Obserwator w S' musi zmierzyć położenie końców pręta w tej samej chwili czasu t'.
Należy zastosować odwrotną transformację Lorentza:

$$x_1 = \gamma\left(x_1' + \beta ct'\right)$$
$$x_2 = \gamma\left(x_2' + \beta ct'\right)$$

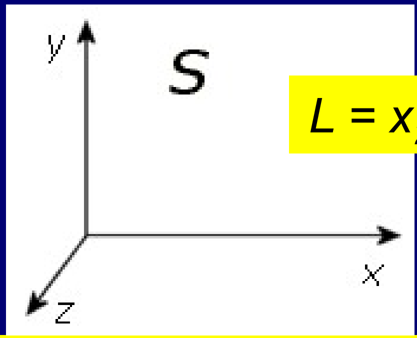
Odejmując stronami $x_2 - x_1 = \gamma\left(x_2' - x_1'\right) = \gamma L = L_0$

Ponieważ $\gamma > 1$ $L = L_0 / \gamma < L_0$

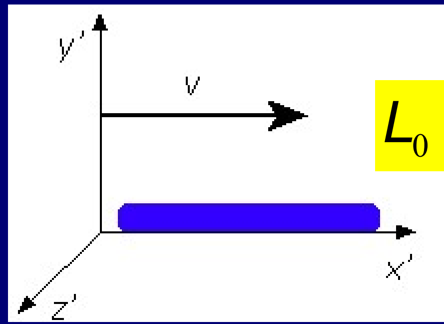
Długość L poruszającego się pręta zmiejsza się (kontrakcja=skrócenie długości). Pomiar w kierunku poprzecznym y lub z daje wynik niezależny od prędkości.

Skrócenie długości, cd.

Ten sam wynik można otrzymać, gdy pręt spoczywa w poruszającym się układzie S’



$L = x_2 - x_1$



$L_0 = x_2' - x_1'$

Obserwator w układzie S musi zmierzyć współrzędne końców pręta w tej samej chwili t.

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= \gamma(x_2 - \beta ct) \\ x_1' &= \gamma(x_1 - \beta ct) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) = L_0 = \gamma L$$

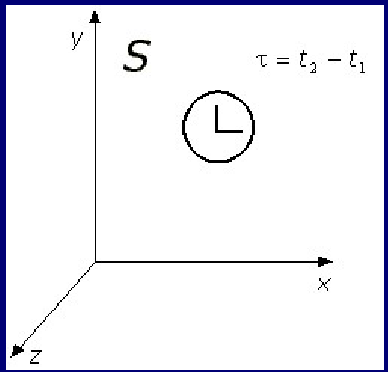
Obserwator w układzie S’ mierzy współrzędne końców pręta, których położenie nie zmienia się w czasie

Nie jest ważne, w którym układzie odniesienia umieścimy pręt. Znaczenie ma jedynie to czy porusza się on względem obserwatora czy nie (równolegle do swojej długości). Pomiar długości poruszających się obiektów daje wartość mniejszą. Istotną rolę odgrywa **jednoczesność** zdarzeń. Dwa zdarzenia jednoczesne w S ($\Delta t=0$) zachodzące w różnych miejscach w odległości $\Delta x \neq 0$, nie są jednoczesne w S’ ($\Delta t' \neq 0$). Ze wzorów transformacji Lorentza otrzymujemy:

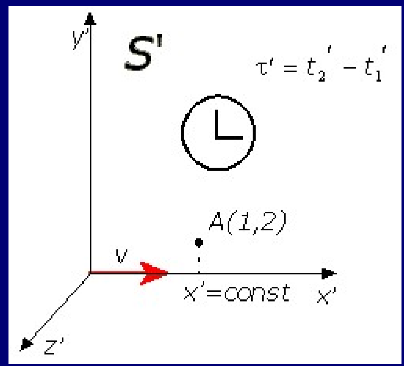
$$\Delta x' = \gamma \Delta x, \qquad c \cdot \Delta t' = -\beta\gamma\Delta x$$

Wydłużenie interwałów czasowych (dylatacja czasu)

Problem dotyczy wydłużenia odstępów czasowych mierzonych przez poruszające się zegary. Odstęp czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym miejscu i mierzony przez zegar znajdujący się w miejscu zdarzenia, nazywamy czasem własnym. Pomiar tego samego przedziału czasu przez obserwatora znajdującego się w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia daje wynik większy.



Zegar w S porusza się względem punktu A(1,2), w którym zachodzi zdarzenie.



Zdarzenia zachodzą w punkcie A, w spoczynku względem S'. Zegar umieszczono w tym samym punkcie, tj. w spoczynku względem punktu A(1,2).

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \Rightarrow$$

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

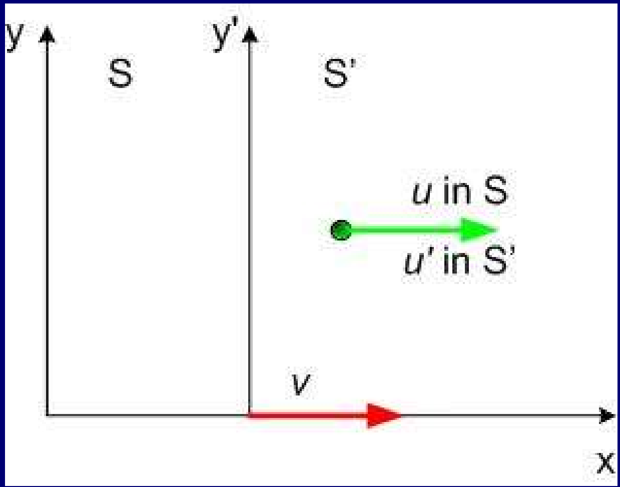
$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right)$$

$$t = \gamma t' = \gamma\tau$$

τ - czas własny

Czas własny jest najkrótszym czasem pomiędzy zdarzeniami.

Relatywistyczne składanie prędkości



Cząstka ma prędkość *u* w układzie odniesienia S. Jaką prędkość zmierzy obserwator w układzie S' jeśli porusza się z prędkością *v* względem S?

Z transformacji Lorentza otrzymujemy:

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta dx}{c}\right)$$

Relatywistyczna transformacja prędkości

Z definicji prędkości *u'* mamy:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta dx}{c}\right)} = \frac{u - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}u} = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}u}$$

Dla $v/c \to 0$ otrzymamy $u' = u - v$

Klasyczna transformacja prędkości (Galileusz)

Przykład relatywistycznego dodawania prędkości

Jaka jest prędkość fotonu w układzie odniesienia S (w spoczynku względem laboratorium)
jeżeli ma on prędkość c w układzie odniesienia S' poruszającym się z prędkością v względem układu S? $u' = c$
Zakładamy, że foton porusza się równolegle do osi OX.

Rozwiązanie:
Zgodnie z transformację Galileusza otrzymalibyśmy $u = v + c$
co jest niezgodne z postulatami Einsteina.
Zgodnie z transformacją relatywistyczną prędkości:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = \frac{c(c+v)}{c+v} = c$$

Otrzymany wynik wskazuje, że nie istnieje taki układ odniesienia, w którym foton byłby w spoczynku. Nawet dla $v = -c$, $u = c$.

Relatywistyczny efekt Dopplera

W przypadku klasycznym dla fal mechanicznych, częstotliwość *f'* rejestrowana przez obserwatora wynosi

$$f' = f\frac{v - v_0}{v - v_z}$$

gdzie *f* jest częstotliwością nadajnika, v prędkością fali w ośrodku, v_o prędkością obserwatora , v_z prędkością źródła (znak prędkości jest dodatni, gdy są zgodne ze znakiem prędkości v).

W przypadku fali elektromagnetycznej spodziewamy się, że zmiana częstotliwości będzie zależała od względnej prędkości źródła względem obserwatora.

$$f' = f\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}$$

Dla małych prędkości ($\beta \ll 1$) można to wyrażenie rozwinąć w szereg Taylora i otrzymać wzór przybliżony:

$$f' = f(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2) \approx f(1-\beta)$$

Relatywistyczne przesunięcie ku czerwieni

Biorąc pod uwagę, że f = c/λ, z równania: $f' = f(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2) \approx f(1-\beta)$

otrzymujemy: $\frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda}(1-\beta)$

Wprowadzając dopplerowskie przesunięcie wyrażone w długościach fali:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

otrzymujemy $\Delta\lambda = \frac{\lambda'}{c} v$

Teoria rozszerzającego się Wszechświata uzyskała potwierdzenie w obserwacji tzw. przesunięcia ku czerwieni:

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} c$$

(λ'> λ)

Dynamika relatywistyczna

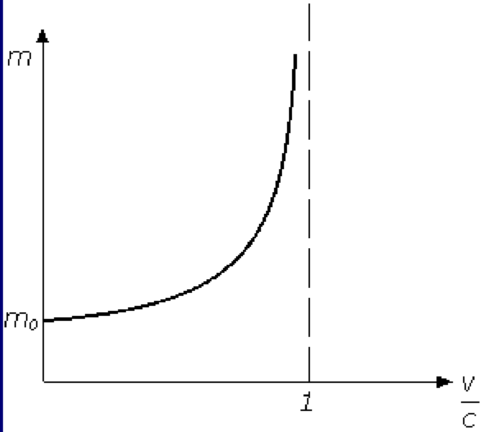
Pęd relatywistyczny

Pęd zdefiniowany w mechanice klasycznej $\vec{p} = m_0 \vec{v}$

nie jest zachowany w zderzeniach cząstek poruszających się z bardzo dużymi prędkościami. Jeżeli zdefiniujemy pęd jako: $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$

to staje się on niezmiennikiem transformacji Lorentza. Pęd relatywistyczny można zapisać jako: $\vec{p} = m(v)\vec{v}$

gdzie: $m(v) = m_0\gamma$ m jest relatywistyczną masą cząstki o masie spoczynkowej m_0 i prędkości v



Zależność masy od prędkości została udowodniona eksperymentalnie; w praktyce:

$$v / c \leq 0{,}2 \qquad m \approx m_0$$

Energia relatywistyczna

Można pokazać, że całkowita energia E (energia relatywistyczna jest sumą energii kinetycznej K i energii spoczynkowej $m_o c^2$ gdzie m_o jest masą spoczynkową cząstki

$$E = K + m_o c^2$$

Energia spoczynkowa: $m_o c^2$ dla elektronu $m_o = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg odpowiada 511 keV

Energia relatywistyczna:

$$E = mc^2$$

gdzie: m jest masą relatywistyczną zależną od prędkości

Można pokazać, że:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_o^2 c^4}$$

Dla fotonu $m_o = 0$;

$$E = pc$$

Równoważność masy i energii

Zasada zachowania masy i energii jest najlepiej zilustrowana w reakcjach jądrowych.

Rozważmy reakcję, w której cząstka *a* zderza się z jądrem X i powstaje nowe jądro Y oraz emitowana jest cząstka *b*

$$a + X \rightarrow Y + b$$

W reakcji tego typu całkowita energia (masa) jest zachowana:

$$m_{01} + \frac{E_{k1}}{c^2} + m_{02} + \frac{E_{k2}}{c^2} = m_{03} + \frac{E_{k3}}{c^2} + m_{04} + \frac{E_{k4}}{c^2}$$

$$m_{01} + m_{02} - (m_{03} + m_{04}) = \frac{(E_{k3} + E_{k4}) - (E_{k1} + E_{k2})}{c^2}$$

$$m_{01} + m_{02} - (m_{03} + m_{04}) = \frac{Q}{c^2}$$

Q – energia reakcji

Jeżeli Q > 0 energia się wydziela (reakcja egzotermiczna)

Jeżeli Q < 0 energia jest pochłaniana (reakcja endotermiczna)

PODSUMOWANIE

- Transformacja Lorentza zakłada, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Dla małych prędkości transformacja ta sprowadza się do klasycznej transformacji Galileusza
- Konsekwencjami transformacji Lorentza są między innymi: nowe spojrzenie na równoczesność zjawisk, skrócenie długości, dylatacja czasu oraz inne zasady składania prędkości
- W mechanice relatywistycznej zarówno pęd jak i energia są zdefiniowane inaczej niż w mechanice klasycznej. Wynika to z zależności masy od prędkości
- Masa jest równoważna energii. Obowiązuje zasada zachowania energii-masy