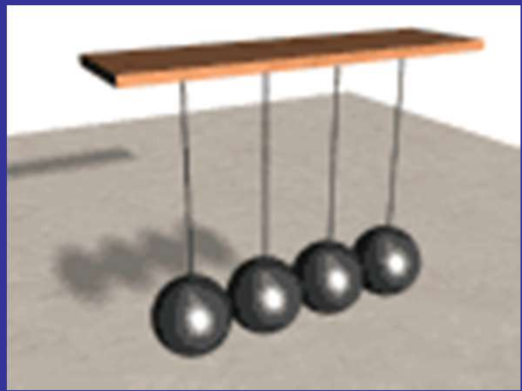
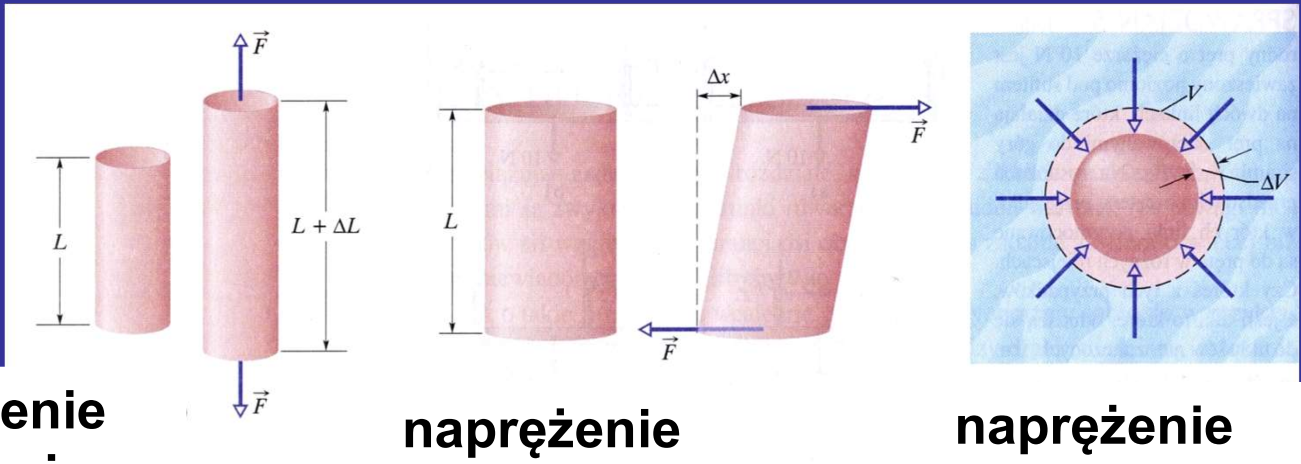
DRGANIA – OSCYLATOR HARMONICZNY



Własności sprężyste ciał stałych



naprężenie rozciągające

naprężenie ścinające

naprężenie objętościowe

Względne odkształcenie ciała zależy od naprężenia

naprężenie to siła odkształcająca odniesiona do jednostki pola powierzchni, na jaką działa

naprężenie = (moduł sprężystości) · (odkształcenie)

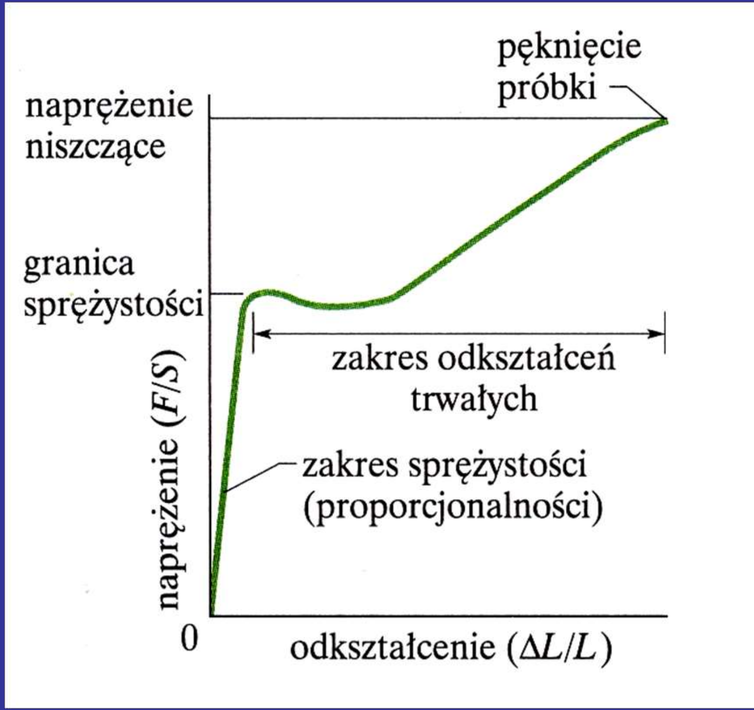
gdy próbka powraca do pierwotnych wymiarów po usunięciu naprężenia

Rozciąganie i ściskanie

Naprężenie σ definiuje się jako: $\sigma = \frac{F}{S}$

gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa ΔL/L – względna zmiana długości



W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje prawo Hooke’a

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

E- moduł Younga

Wybrane własności sprężyste pewnych materiałów

Materiał	Gęstość ρ (kg/cm^3)	Moduł Younga E (10^9 N/m^2)	Naprężenie niszczące (10^6 N/m^2)	Granice sprężystości (10^6 N/m^2)
Stal [a]	7860	200	400	250
Al	2710	70	110	95
Beton [c]	2320	30	40[b]	-
Kość	1900	9[b]	170[b]	-

[a] stal konstrukcyjna ASTM-A36, [b] przy ściskaniu, [c] o dużej wytrzymałości

Naprężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścinania) naprężenie σ definiuje się również jako:

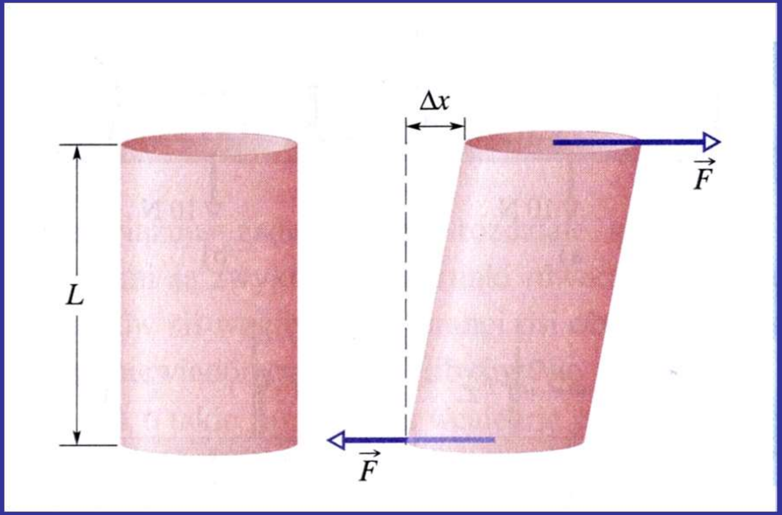
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ale siła działa równolegle do powierzchni S

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa Δx/L

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L}$$

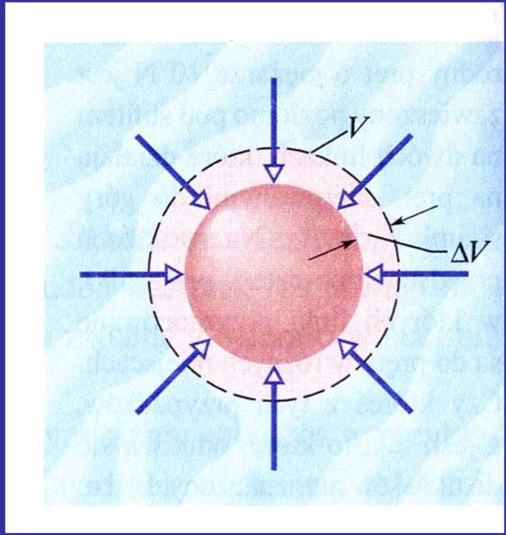
moduł ścinania



Naprężenie objętościowe

Naprężeniem jest ciśnienie p cieczy

$$p = \frac{F}{S}$$



Jednostką ciśnienia jest 1 Pa = 1N/m^2

Miarą odkształcenia jest względna zmiana objętości ΔV/V

$$p = K\frac{\Delta V}{V}$$

K - moduł sprężystości objętościowej lub moduł ściśliwości

Przykład 1 Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie $4{,}0 \cdot 10^7$ N/m^2. Ile wynosi, związana z tym ciśnieniem, względna zmiana objętości $\Delta V/V$ wody a ile kulki wykonanej ze stali? Moduł ściśliwości wynosi $2{,}2 \cdot 10^9$ N/m^2 dla wody, a dla stali $16 \cdot 10^{10}$ N/m^2.

Rozwiązanie:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

dla wody

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{2{,}2 \cdot 10^9} = 1{,}8\%$$

dla kuli stalowej

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{16 \cdot 10^{10}} = 0{,}025\%$$

Oscylator harmoniczny

siła harmoniczna

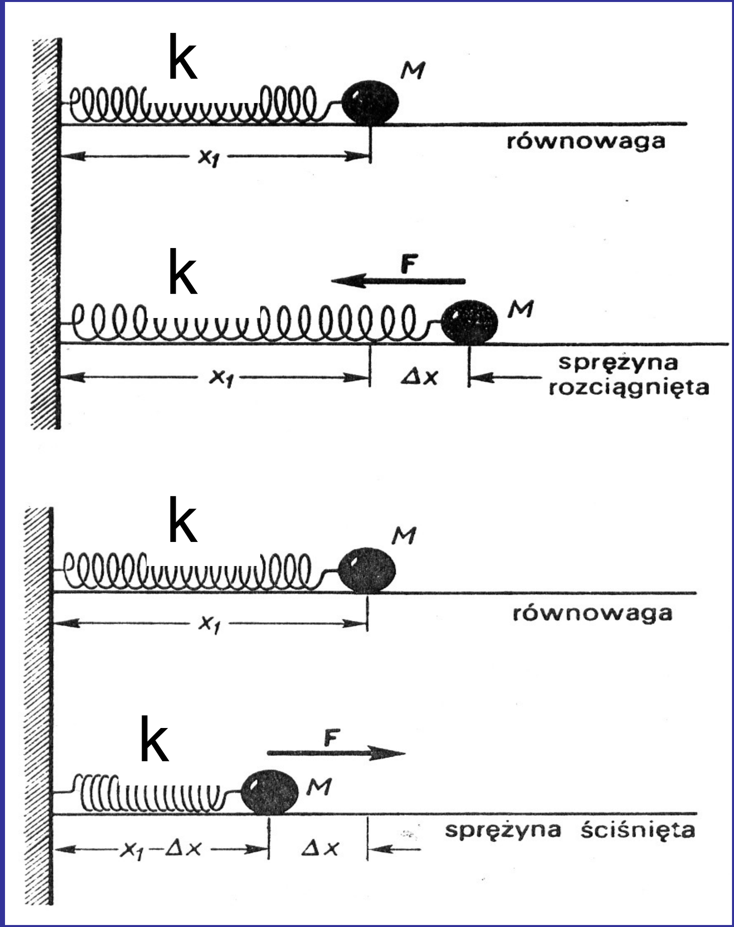
$$F = -kx$$

•siła F proporcjonalna do wychylenia x z położenia równowagi

•zwrot siły: do położenia równowagi

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

k = ES / L



Tylko dla małych wychyleń x z położenia równowagi !!!

Równanie ruchu otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona

$$F_{wyp} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{wyp} = F = -kx$$

porównując i przekształcając

otrzymujemy ogólne równanie różniczkowe oscylatora harmonicznego – równanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach, jednorodne

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Po podzieleniu przez m, przyjmując, że

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o{}^2 x = 0$$

Przypomnienie:

Równanie oscylatora harmonicznego

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

wyprowadziliśmy również z zasady zachowania energii mechanicznej oscylator harmoniczny prosty (bez tłumienia i bez wymuszenia)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o{}^2 x = 0$$

częstość drgań własnych

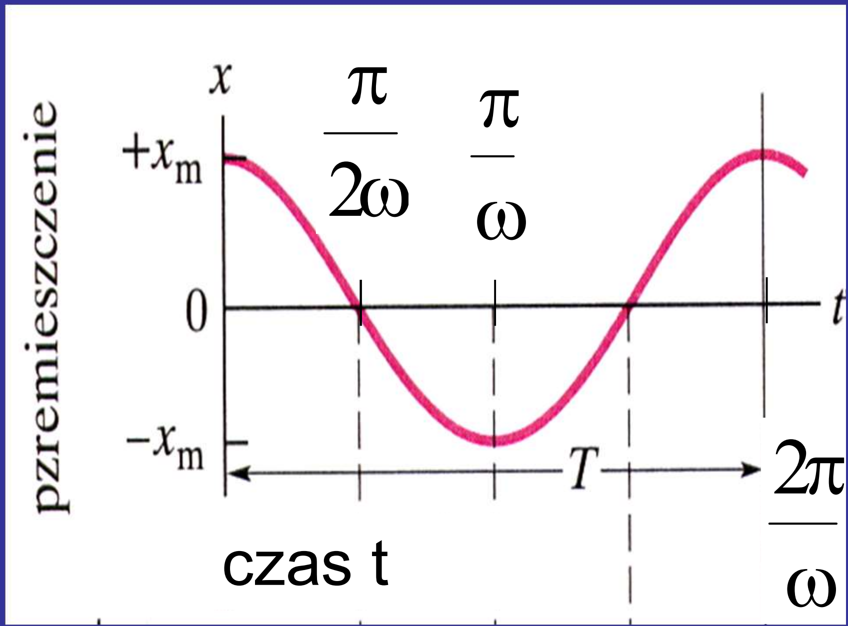
Częstość drgań własnych zależy wyłącznie od parametrów układu drgającego. Dla układu masa m – sprężyna o stałej sprężystości k:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wzór ten pozwala zawsze określić okres drgań T

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego prostego



faza

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

wychylenie z położenia równowagi

amplituda

częstość

faza początkowa

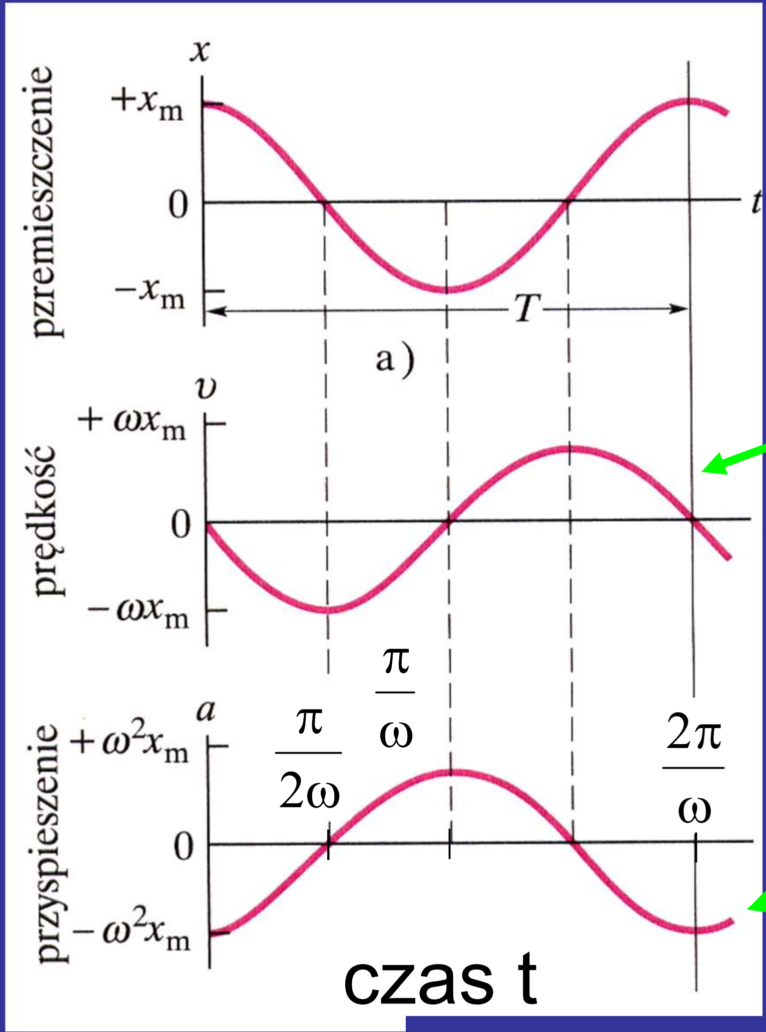
Okres ruchu T = czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

Amplituda = wartość bezwzględna maksymalnego wychylenia z położenia równowagi

$$T = \frac{1}{\nu}$$

częstotliwość = liczba drgań (cykli) na sekundę (jednostka 1Hz)

Prędkość w ruchu harmonicznym



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_m \cos(\omega t + \varphi)\right)$$

$$v(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Przyspieszenie

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)\right)$$

$$a(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

W ruchu harmonicznym przyspieszenie jest proporcjonalne do przemieszczenia ale ma przeciwny znak

Sprawdzenie czy proponowana funkcja

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

jest rozwiązaniem równania ogólnego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o{}^2 x = 0$$

Należy podstawić: $$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2 x$$ do równania ogólnego

Otrzymujemy: $$-\omega^2 x + \omega_o^2 x = 0$$ z czego wynika, że

Częstość drgań ω prostego oscylatora harmonicznego jest równa częstości drgań własnych ω_o

$$\omega = \omega_o$$

Siła w ruchu harmonicznym

przyspieszenie $a = -\omega^2 x$

Z II zasady dynamiki: $F_{wyp} = ma = -m\omega^2 x$

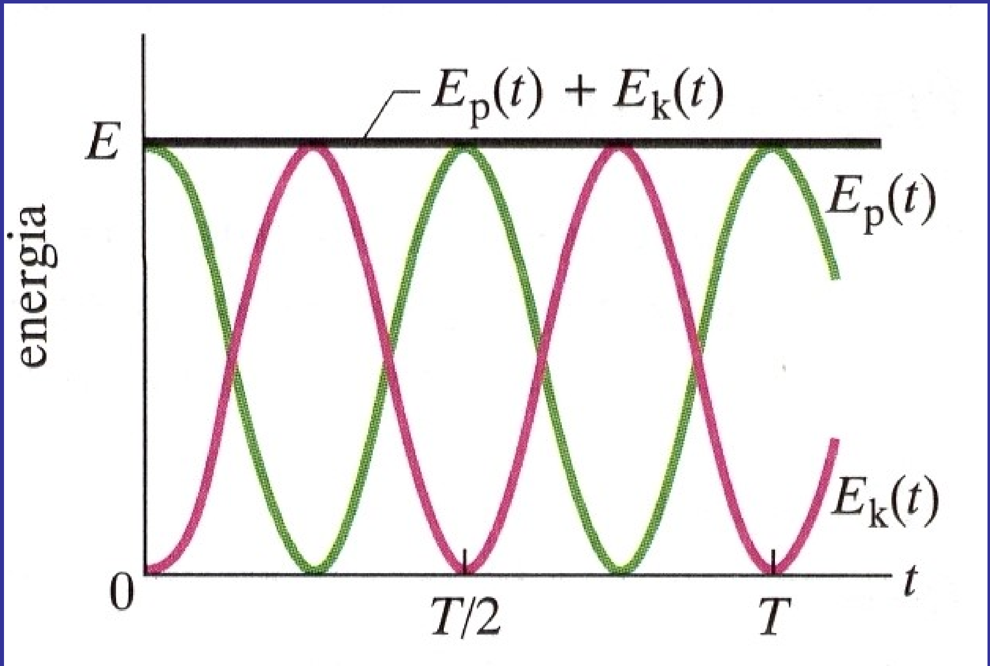
ale siła harmoniczna: $F = -kx$

$k = m\omega^2$

Wiemy, że $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ czyli jeszcze raz: $\omega = \omega_o$

Energia w ruchu harmonicznym

energia potencjalna sprężystości



$$E_p = k\frac{x^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

energia kinetyczna

$$E_k = m\frac{v^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

Całkowita energia w ruchu harmonicznym

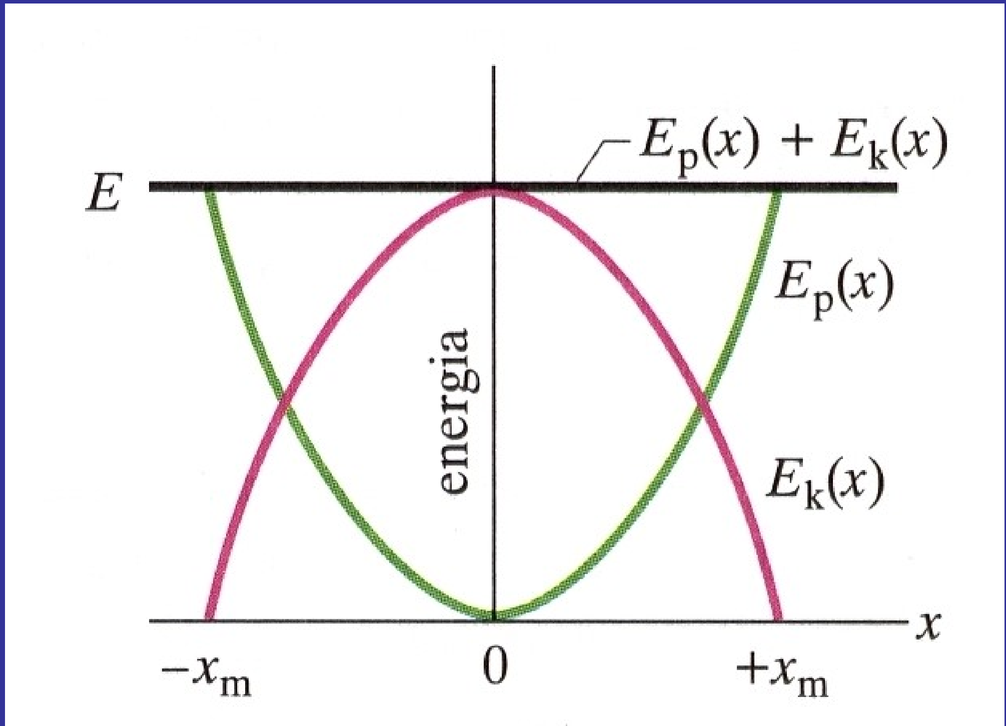
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

ale $k = m\omega^2$ czyli

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2\left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right) = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{const}$$

Całkowita energia mechaniczna prostego oscylatora harmonicznego jest zachowana

Zależność energii oscylatora od wychylenia z położenia równowagi



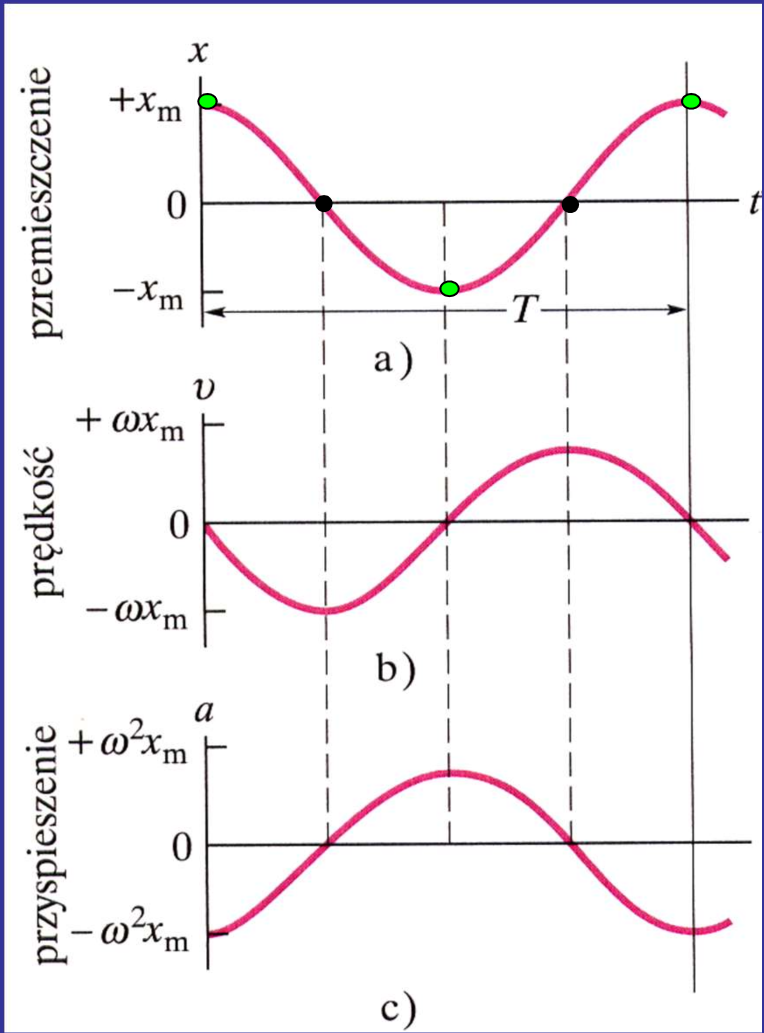
$$E_p = k\frac{x^2}{2}$$ parabola

$$E_k = E - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2}kx_m^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(x_m^2 - x^2)$$

odwrócona parabola



Przy przechodzeniu przez położenie równowagi:

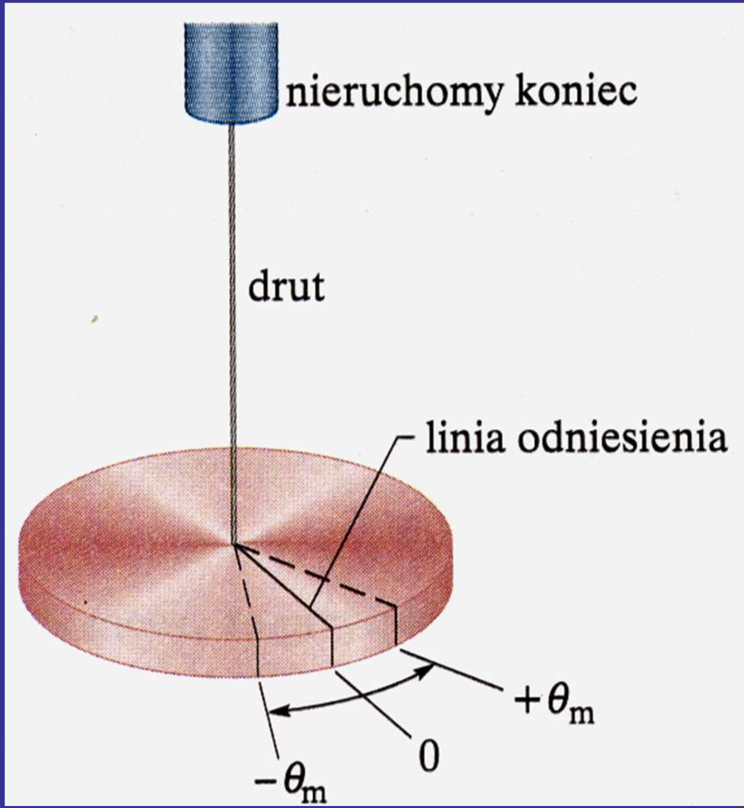
- prędkość jest największa
- przyspieszenie wynosi zero
- siła wynosi zero
- energia kinetyczna jest największa

Przy maksymalnym wychyleniu z położenia równowagi:

- prędkość wynosi zero i zmienia znak
- przyspieszenie jest największe
- siła jest maksymalna
- energia potencjalna jest największa

PRZYKŁADY OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH

Wahadło torsyjne



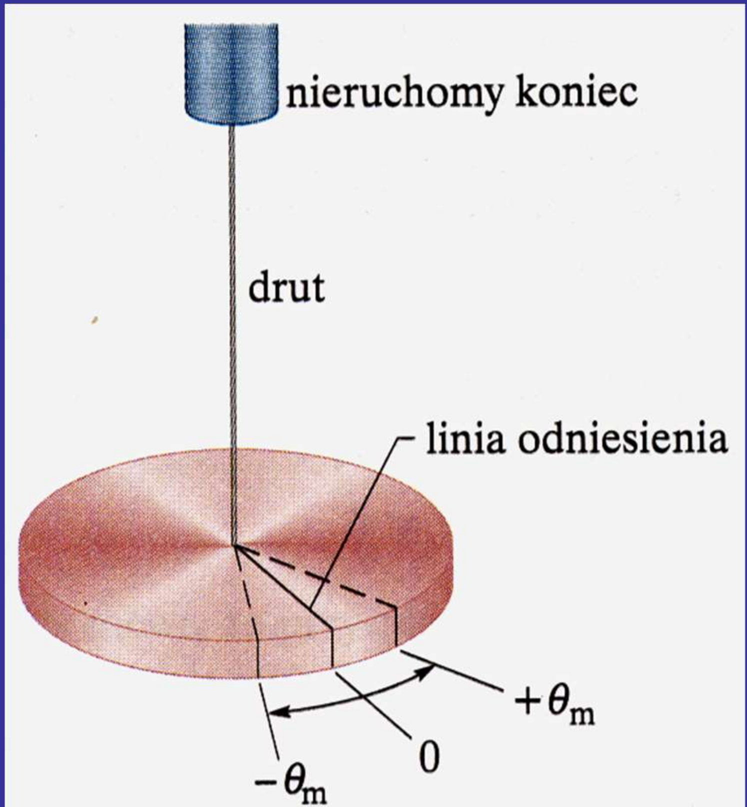
$$\tau = -\kappa\theta$$

moment kierujący κ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

równanie ruchu z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Wahadło torsyjne



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0$$

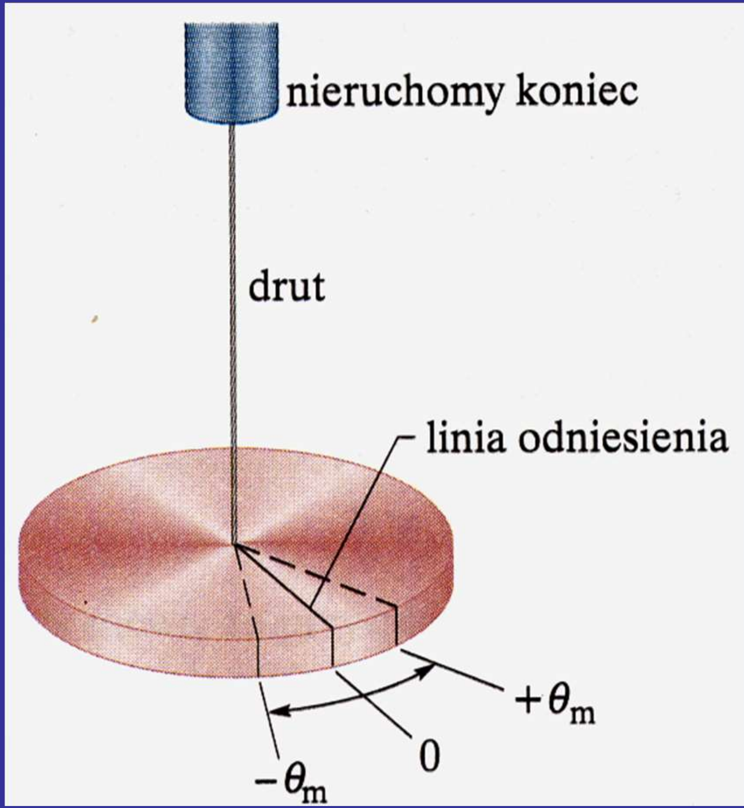
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0$$

równanie oscylatora harmonicznego

$$\omega_o^2 = \frac{\kappa}{I}$$

Wahadło torsyjne



$$\omega_o^2 = \frac{\kappa}{I}$$

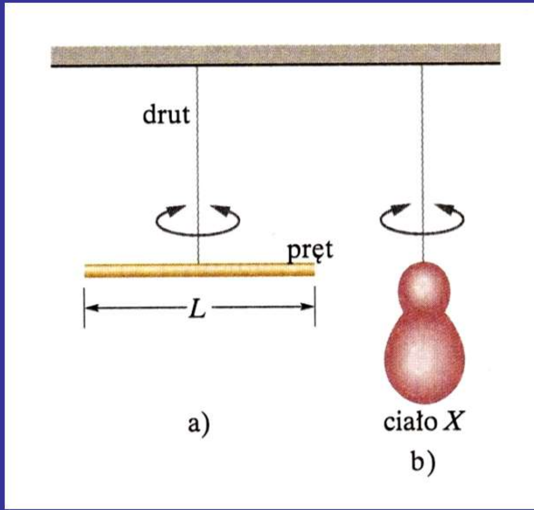
$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

okres drgań wahadła torsyjnego

Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach

Przykład 2. Na rysunku przedstawiono cienki pręt o o długości L=12,4 cm i masie m=135 g zawieszony w środku na długim drucie. Zmierzony okres T_a drgań torsyjnych pręta wynosi 2,53 s. Następnie na tym samym drucie zawieszono ciało X o nieregularnym kształcie i zmierzono okres T_b, który wynosi 4,76 s. Wyznaczyć moment bezwładności ciała X względem osi, wokół której zachodzą drgania.

Dane:
L=12,4 cm=0,124 m
m=135 g= 0,135 kg
T_a=2,53 s
T_b=4,76 s



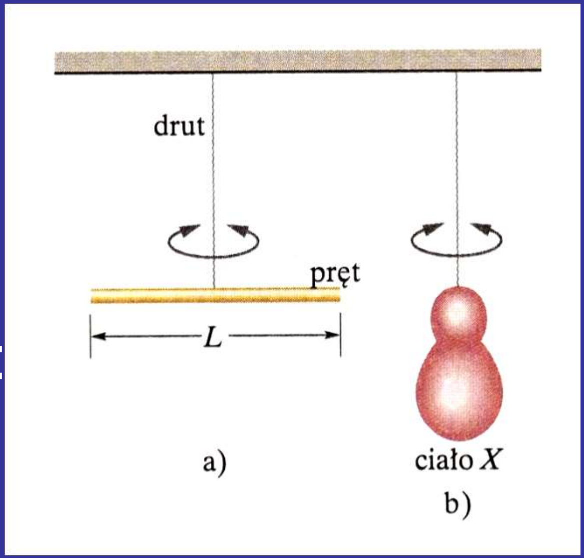
Szukane:
I_b

Rozwiązanie:

Okres drgań wahadła torsyjnego z prętem:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}}$$

Okres drgań wahadła torsyjnego z ciałem X:



$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}$$

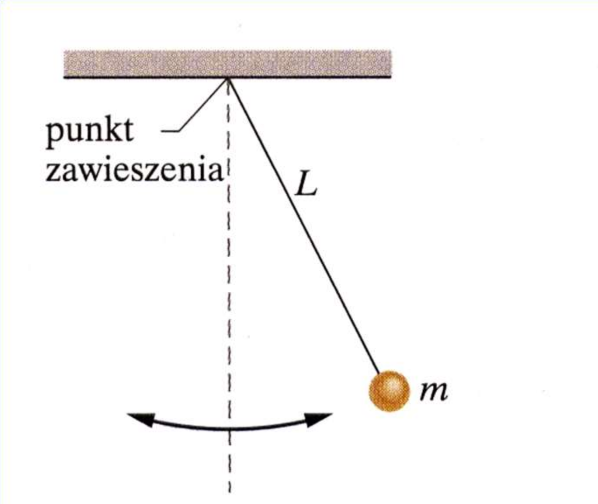
Szukany moment bezwładności:

$$I_b = I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = \frac{1}{12} mL^2 \frac{T_b^2}{T_a^2}$$

Odpowiedź:

$$I_b = 6{,}12 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

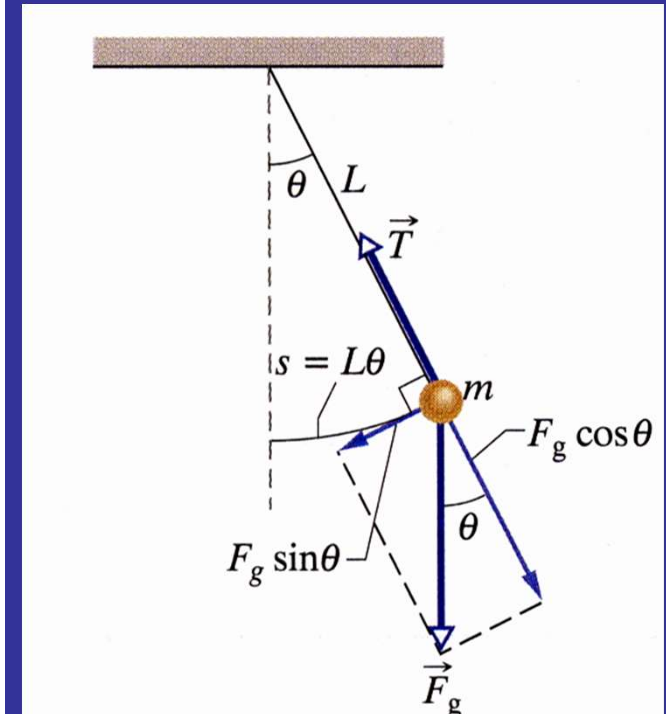
Wahadło matematyczne



Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$\tau = -L(F_g \sin\theta) = -Lmg\sin\theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ

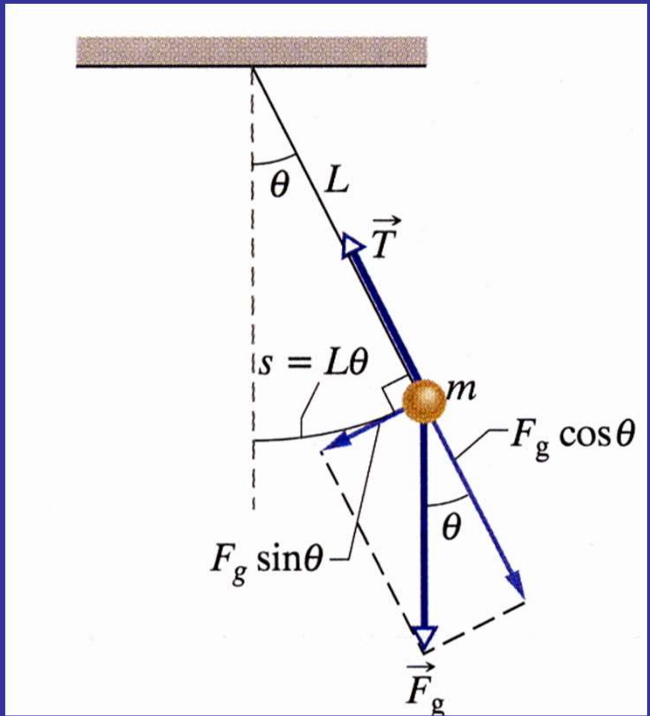


Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

I-moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia

$$\tau = I\varepsilon = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Wahadło matematyczne



Zakładamy, że kąt θ jest mały (małe drgania) czyli sin θ ≈ θ :

$$\tau = -Lmg\theta$$

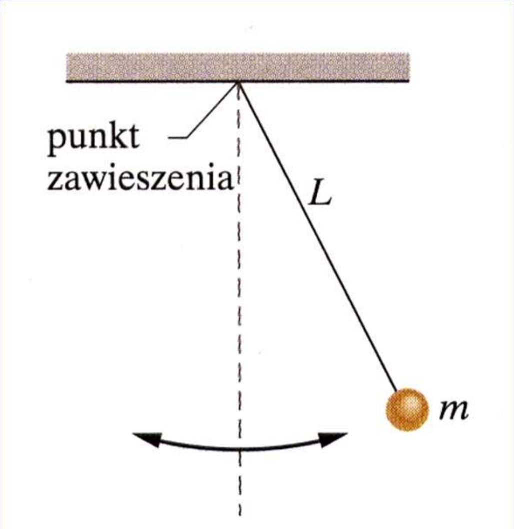
Równanie oscylatora harmonicznego:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\,\theta = 0$$

Częstość drgań:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

Wahadło matematyczne



$$\omega_o = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

ale

$$I = mL^2$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Częstość nie zależy od masy

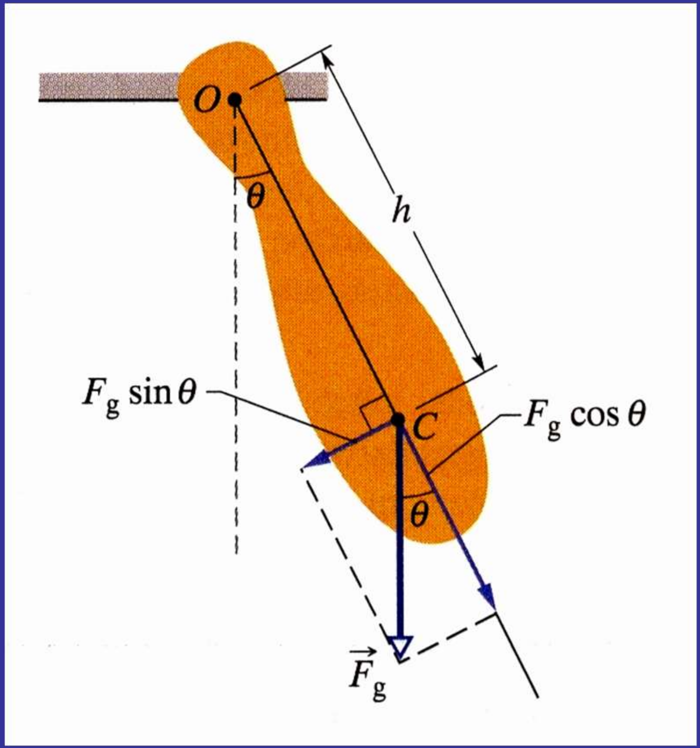
Okres T nie zależy od masy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań

Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym



$$\tau = -mgh\sin\theta$$

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta$$

dla małych kątów θ

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\,\theta = 0$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_{śm} + mh^2}}$$

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne służy do wyznaczania przyspieszenia grawitacyjnego g w różnych miejscach na Ziemi i nie tylko

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{śm} + mh^2}{mgh}}$$

Przykład 3. Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O, znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T, wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.

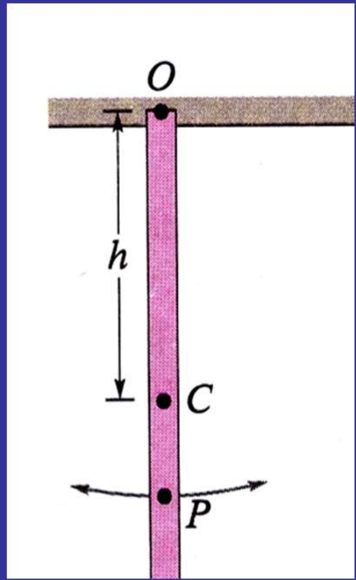
Rozwiązanie:

$$I_{śm} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2}{mg \frac{L}{2}}}$$

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



Wahadło fizyczne

Każdemu wahadłu fizycznemu, drgającemu wokół danego punktu zawieszenia O z okresem T odpowiada wahadło matematyczne o długości L_o drgające z tym samym okresem T. Wielkość L_o nazywamy *długością zredukowaną wahadła fizycznego.* Punkt znajdujący się w odległości L_o od punktu zawieszenia O nazywamy *środkiem wahań wahadła fizycznego* dla danego punktu zawieszenia.

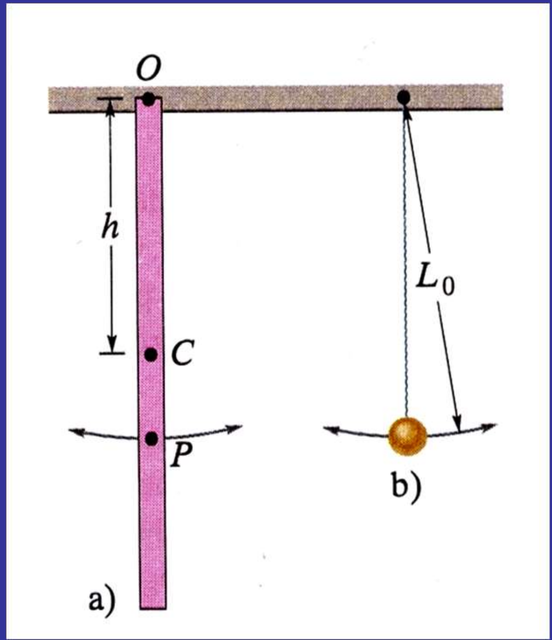
Przykład 4. Znaleźć długość zredukowaną wahadła z poprzedniego przykładu i wyznaczyć środek wahań.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}L}{g}}$$

czyli

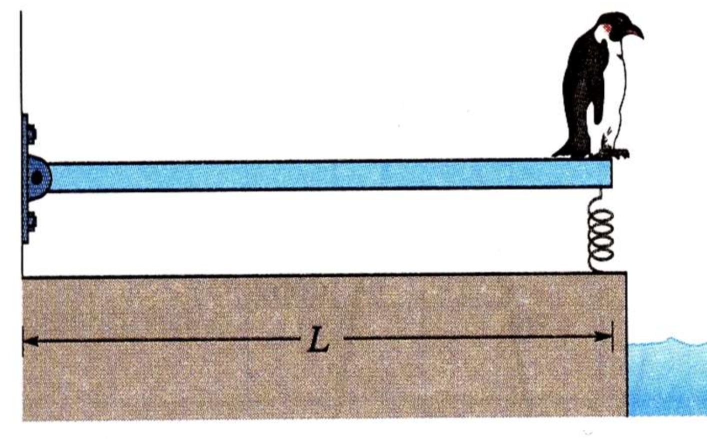
$$L_o = \frac{2}{3}L$$

środek wahań znajduje się w punkcie P



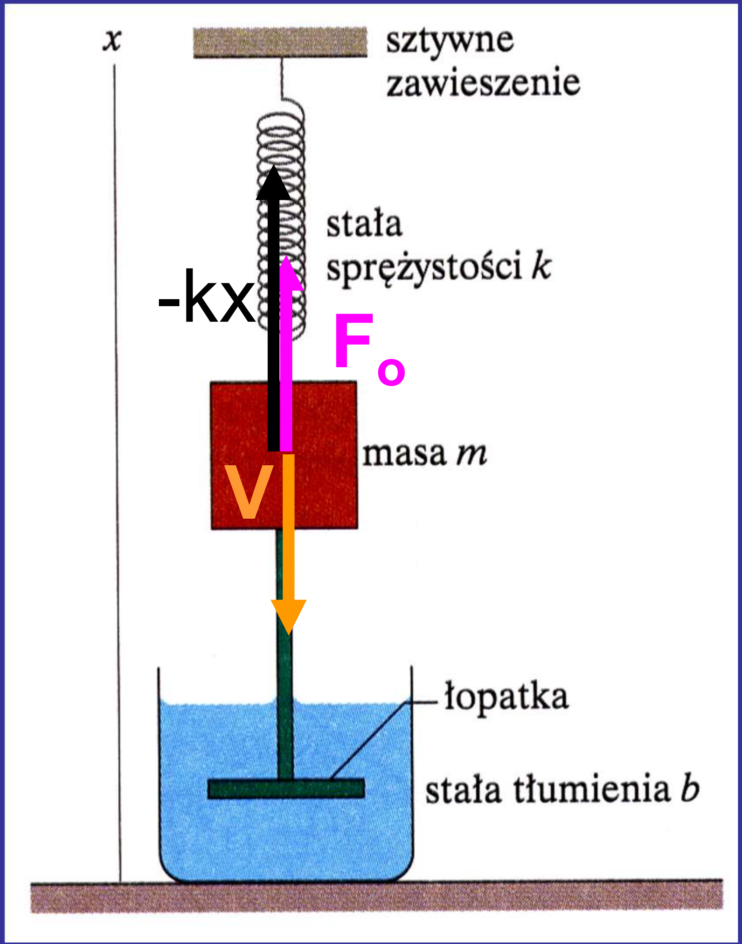
ZADANIE DOMOWE 7.1

Na rysunku przedstawiono pingwina skaczącego do wody z trampoliny mającej postać jednorodnej wąskiej deski, której lewy koniec jest zamocowany na zawiasie, a prawy jest oparty na sprężynie. Deska ma długość L=2m i masę m=12 kg; stała sprężystości k wynosi 1300 N/m. Gdy pingwin skacze do wody, deska i sprężyna zaczynają wykonywać drgania o małej amplitudzie. Zakładamy, że deska jest wystarczająco sztywna by się nie uginać. Wyznaczyć okres T drgań.



HRW, 2

Oscylator harmoniczny tłumiony



Siła oporu = siła Stokesa

$$F_o = -bv$$

stała tłumienia

siła wypadkowa $$F_w = -bv - kx$$

z II zasady dynamiki

$$ma = -bv - kx$$

czyli $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bv - kx$$

Równanie ogólne oscylatora harmonicznego tłumionego

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0$$

czas relaksacji

$$\beta=\frac{b}{2m}$$

$$\tau=\frac{1}{2\beta}=\frac{m}{b}$$

lub

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0$$

współczynnik tłumienia

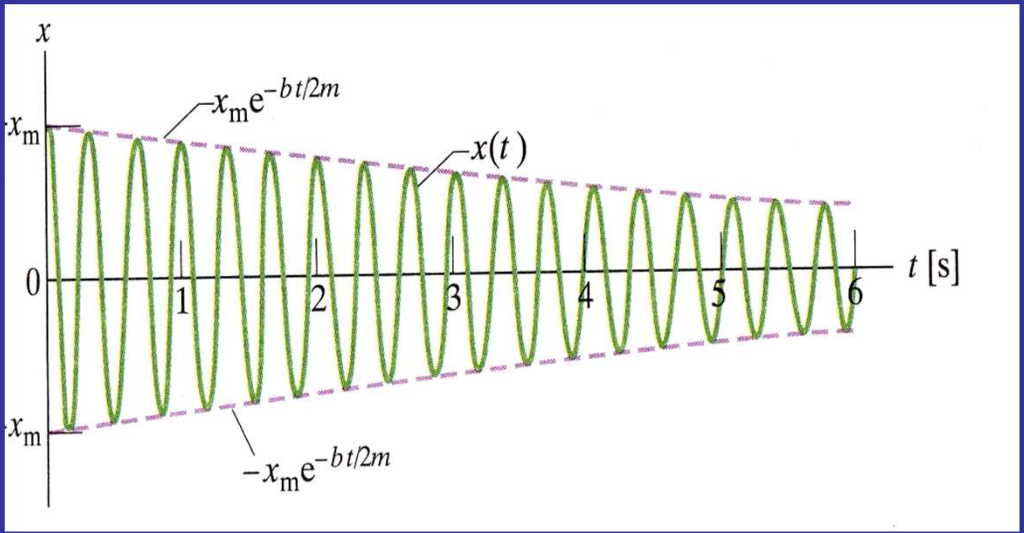
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

Dla małych wartości współczynnika tłumienia, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = e^{-\beta t} z(t)$$

a z(t) jest rozwiązaniem prostego oscylatora harmonicznego



Sprawdzamy, czy funkcja $x(t) = e^{-\beta t} z(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

Umowa:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \qquad \ddot{z}(t) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\beta e^{-\beta t} z(t) + e^{-\beta t}\dot{z}(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 e^{-\beta t} z - 2\beta e^{-\beta t}\dot{z}(t) + e^{-\beta t}\ddot{z}$$

Użyteczne twierdzenie:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$\ddot{z} + \underbrace{\left(\omega_o^2 - \beta^2\right)}_{\omega^2} z = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego prostego gdy $\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2$

wtedy $z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

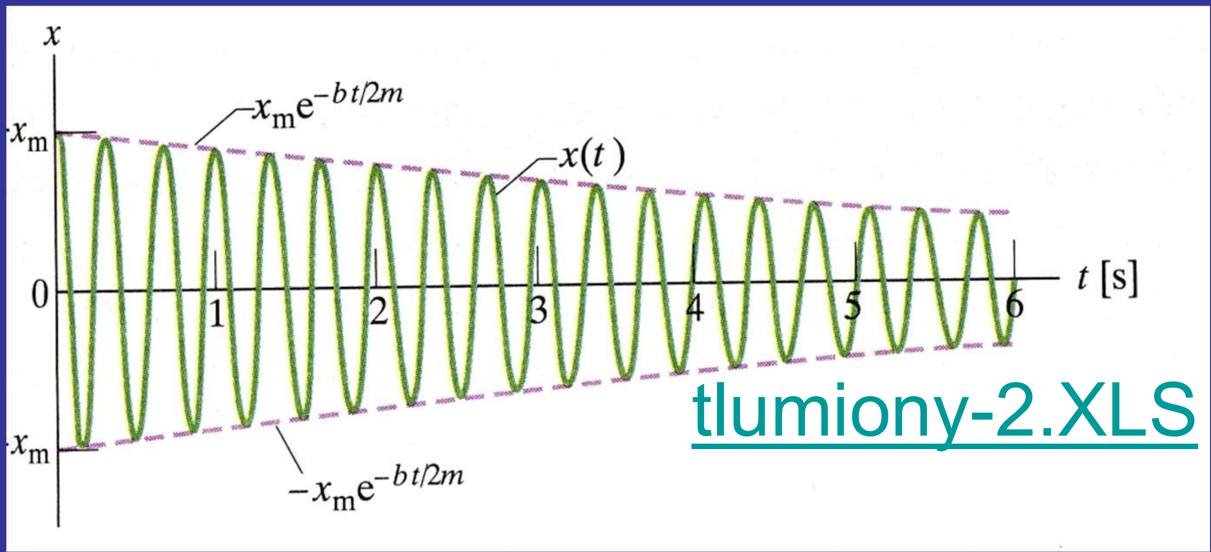
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$x(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right)\cos(\omega t + \phi)$$

amplituda zależna od czasu

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia



tlumiony-2.XLS

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego w postaci periodycznej $x(t) = A\exp(-\beta t)\cos(\omega t + \phi)$

jest możliwe tylko dla małych tłumień, tzn. gdy $\beta < \omega_o$

ze względu na warunek $\omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 > 0$

Przypadek $\beta = \omega_o$ nazywamy krytycznym

Dla $\beta > \omega_o$ mamy rozwiązanie aperiodyczne

Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$A(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) = A_o \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right)$$

$$A_o = A(t=0)$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia Λ jest to logarytm naturalny ze stosunku kolejnych amplitud

$$\Lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\Lambda = -\ln\frac{A(t+T)}{A(t)} = -\ln\frac{e^{-\beta(t+T)}}{e^{-\beta t}} = \beta T$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

współczynnik tłumienia

ZADANIE DOMOWE 7.2

Zastanowić się nad interpretacją fizyczną czasu relaksacji. Obliczyć ile razy zmaleje amplituda drgań oscylatora tłumionego w stosunku do amplitudy początkowej w czasie równym czasowi relaksacji.

Straty mocy a współczynnik dobroci Q

Współczynnik dobroci Q układu drgającego jest to z definicji iloczyn 2π i stosunku energii zmagazynowanej do średniej energii traconej w jednym okresie T

$$Q = 2\pi \frac{energia \quad zmagazynowana}{< energia \quad tracona \quad w \quad T >}$$

Dla słabo tłumionego oscylatora harmonicznego

$$Q \approx \omega_o \tau$$

Wielkość $\omega_o \tau$ lub Q jest odpowiednią miarą braku tłumienia oscylatora. Duże $\omega_o \tau$ lub duże Q oznacza, że oscylator jest słabo tłumiony, np. dla struny fortepianu $Q \approx 10^3$, dla atomu wzbudzonego $Q \approx 10^7$

ZADANIE DOMOWE 7.3

W jakim czasie energia oscylatora harmonicznego tłumionego zmniejsza się do e^{-1} swej wartości początkowej? Ile pełnych drgań wykona w tym czasie oscylator?

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem - rezonans

Zakładamy periodyczne wymuszenie w postaci siły wymuszającej danej jako:

$$F(t) = F_o \sin(\omega t)$$

częstość wymuszenia

Równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem i wymuszeniem ma postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin(\omega t)$$

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

lub po podzieleniu przez masę:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\sin(\omega t)$$

i wprowadzeniu standardowych oznaczeń:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t)$$

W stanie ustalonym drgania oscylatora zachodzą z częstością wymuszenia ω

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

Rozwiązaniem równania: $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=\alpha_0\sin(\omega t)$$

jest: $$x(t)=x_o(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega))$$

Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

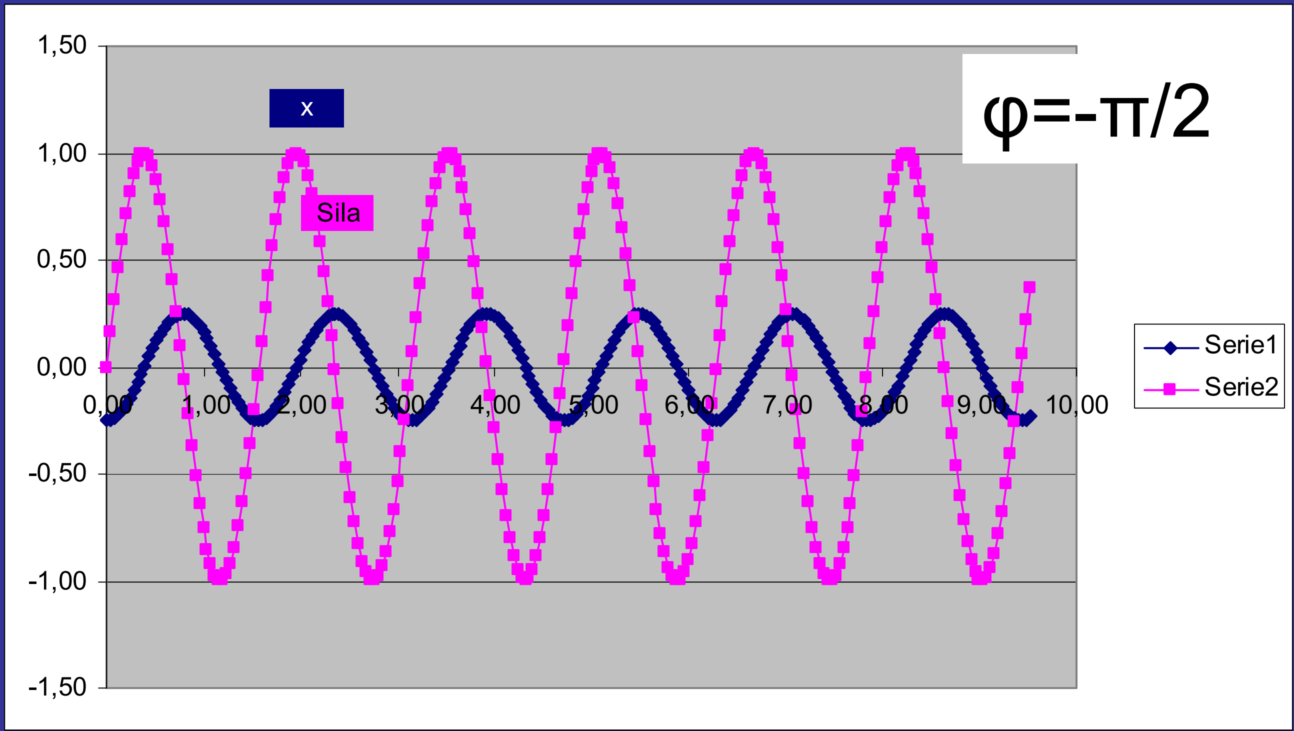
✓ amplituda x_o jest funkcją częstości wymuszenia

✓przesunięcie fazowe nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia

Przesunięcie fazowe φ(ω) mówi nam, o jaki kąt maksimum przemieszczenia x wyprzedza maksimum siły wymuszającej F.

$$x(t) = x_o(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$F(t) = F_o \sin(\omega t)$$



 wymuszony.XLS

Można pokazać, że:

amplituda drgań

$$x_o = \frac{\alpha_o}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega/\tau\right)^2\right)^{1/2}}$$

przesunięcie fazowe

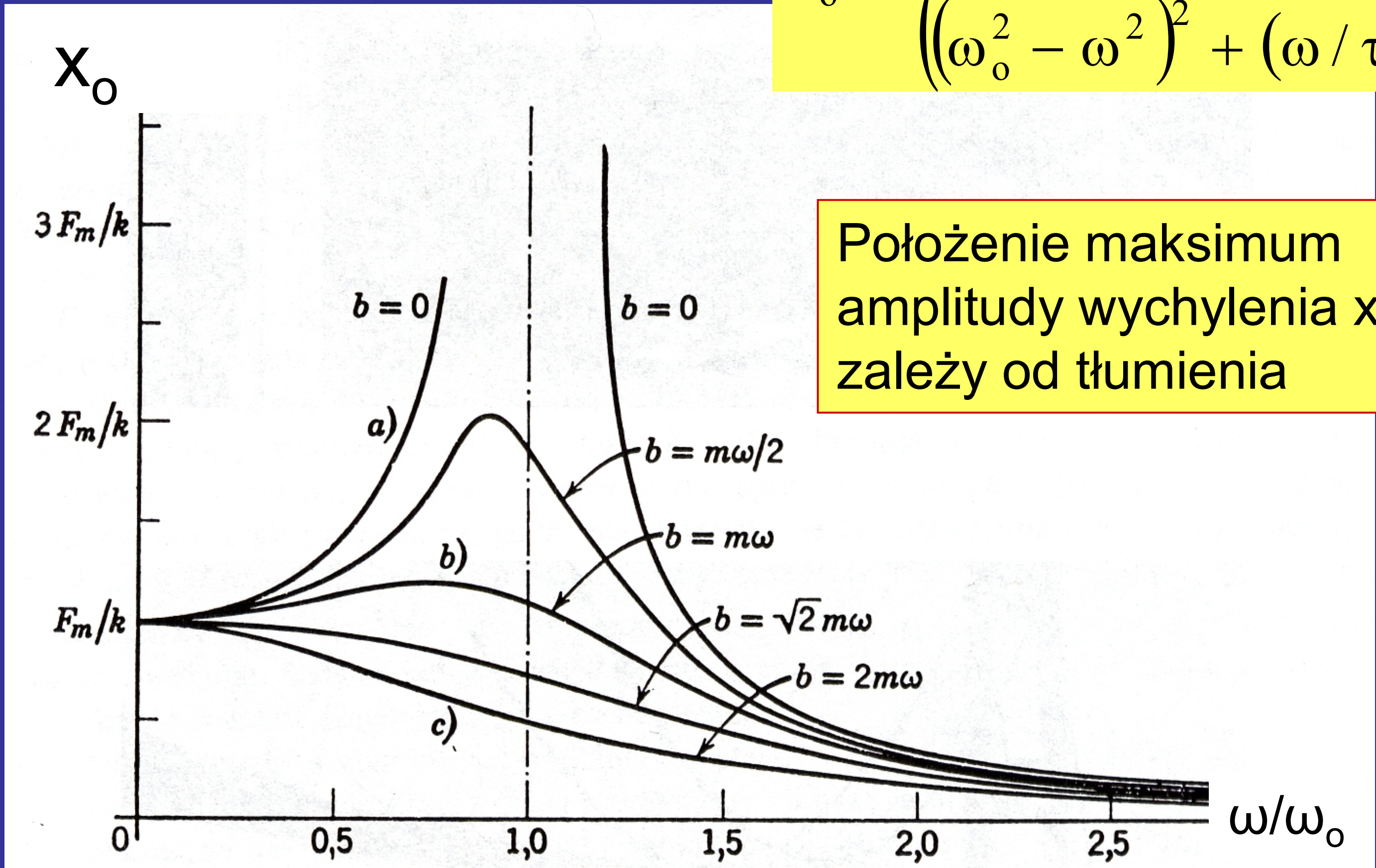
$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

zależą w określony sposób od częstości drgań

wymuszony2.XLS

Rezonans występuje amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza gdy częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych

$$x_o = \frac{\alpha_o}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega / \tau\right)^2\right)^{1/2}}$$



Położenie maksimum amplitudy wychylenia x_o zależy od tłumienia

Przykład 5. Znaleźć warunek rezonansu w przypadku gdy:

a) rozważamy maksymalną amplitudę wychylenia x_{max},

b) rozważamy maksymalną amplitudę prędkości v_{max}.

Rozwiązanie:

a)

$$x_o = \frac{\alpha_o}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dx_o}{d\omega} = ?$$

Wystarczy znaleźć minimum mianownika

$$f(\omega) = \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega) = 2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 2\left(\omega/\tau^2\right)$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega_{rez}) = 0$$

dla

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

Częstość rezonansu w przypadku (a) zależy od współczynnika tłumienia

Gdy $\tau \to \infty$ tzn. przy braku tłumienia: $\omega_{rez} = \omega_o$

Amplituda drgań

$$x_o(\omega_{rez}) = \frac{\alpha_o}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \underbrace{(\omega/\tau)^2}_{\to 0}\right)^{1/2}} \to \infty$$

b) amplituda prędkości

$$x(t) = x_o(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \omega x_o(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$v_{max} = \omega x_o(\omega)$$

$$v_{max} = \frac{\omega\alpha_o}{\left(\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dv_{max}}{d\omega} = ?$$

ZADANIE DOMOWE 7.4

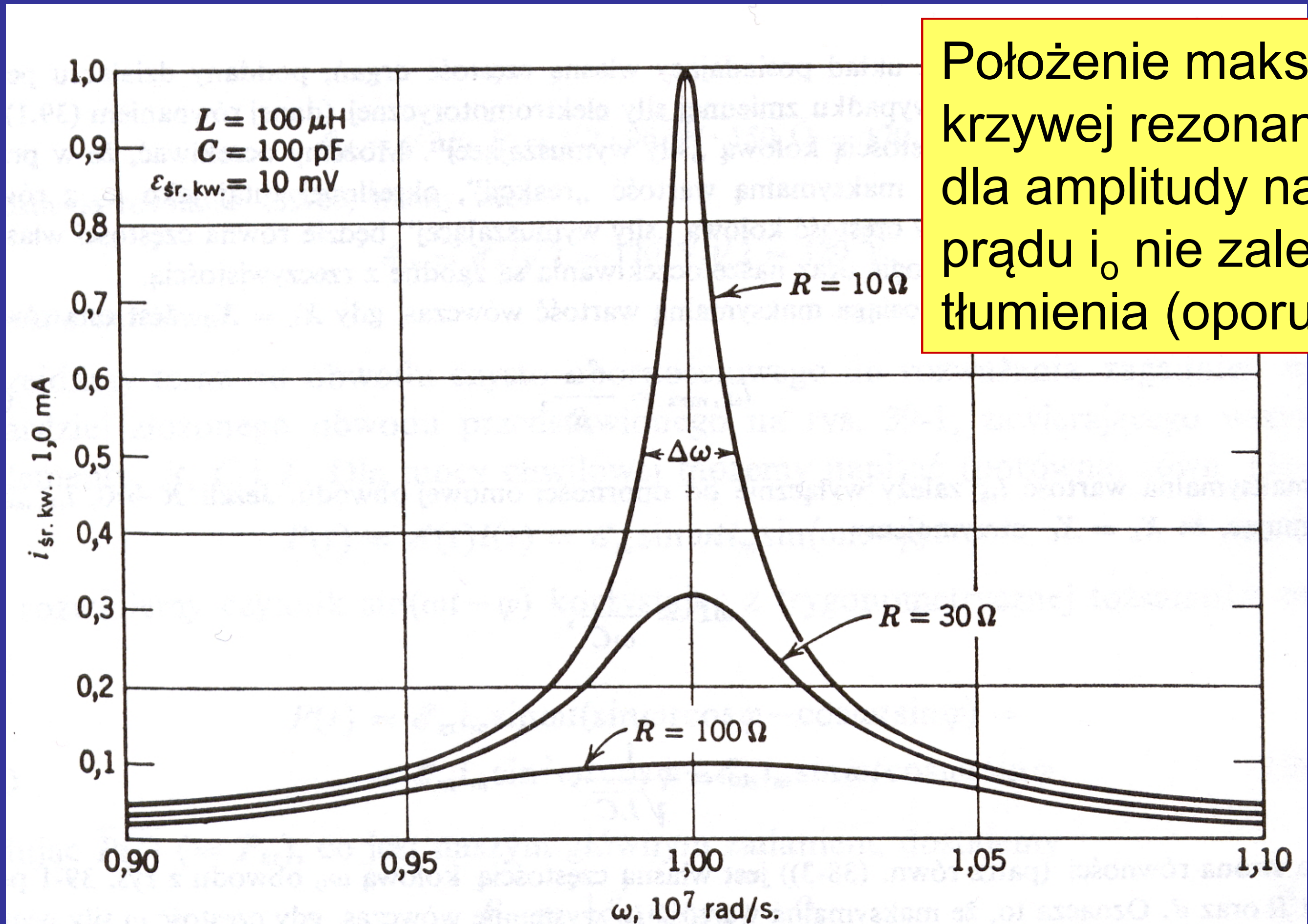
Znaleźć $\frac{dv_{max}}{d\omega}$ Pokazać, że częstość, przy której występuje maksimum amplitudy prędkości jest równa częstości drgań własnych, niezależnie od tłumienia.

Kiedy obserwujemy rezonans tego typu?

Najczęściej w obwodach LRC, mierząc natężenie w obwodzie.

Oscylator mechaniczny	Obwód LRC
wychylenie z położenia równowagi, x	ładunek elektryczny, q
prędkość v=dx/dt	natężenie prądu i=dq/dt
masa, m	indukcyjność, L
stała sprężystości, k	odwrotność pojemności, 1/C
stała tłumienia, b	rezystancja, R
siła, F	napięcie, U

Krzywa rezonansowa dla amplitudy prędkości



Położenie maksimum krzywej rezonansowej dla amplitudy natężenia prądu i_o nie zależy od tłumienia (oporu) R

Składanie drgań harmonicznych

✓zachodzących w tym samym kierunku

$x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$

$x_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

$x_w(t)=x_1(t)+x_2(t)$

✓zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

$x(t)=A_x\cos(\omega_x t+\varphi_x)$

$y(t)=A_y\cos(\omega_y t+\varphi_y)$

krzywa y(x)

Wygaszanie i wzmacnianie drgań zachodzących w jednym kierunku

Załóżmy: $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ $x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

drgania o tej samej amplitudzie A zachodzą z tą samą częstością ω, lecz mogą być przesunięte w fazie o φ

W wyniku złożenia otrzymujemy:

$$x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

drgania o amplitudzie zależnej od φ

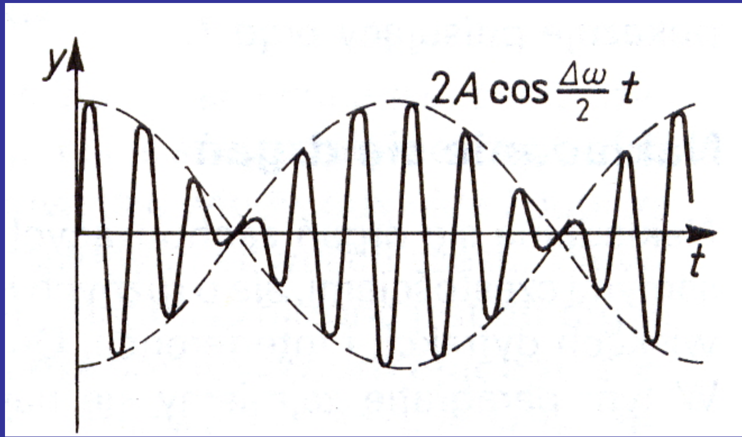
$$x_{wyp} = x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

dla $\varphi=\pi$, $x_{wyp}=0$ całkowite wygaszenie drgań

dla $\varphi=2\pi$, $x_{wyp}= 2A\cos(\omega t)$ dwukrotny wzrost amplitudy drgań - wzmocnienie

Dudnienia

Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach



$$y_1(t) = A\sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t$$

$$y_2(t) = A\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t + \sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t\right]$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Otrzymujemy:

$$y = 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)\sin\omega t$$

drgania o modulowanej amplitudzie

Składanie drgań harmonicznych w kierunkach wzajemnie prostopadłych

Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857

Przykład 6. Znaleźć wynik złożenia drgań prostopadłych opisanych równaniami:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

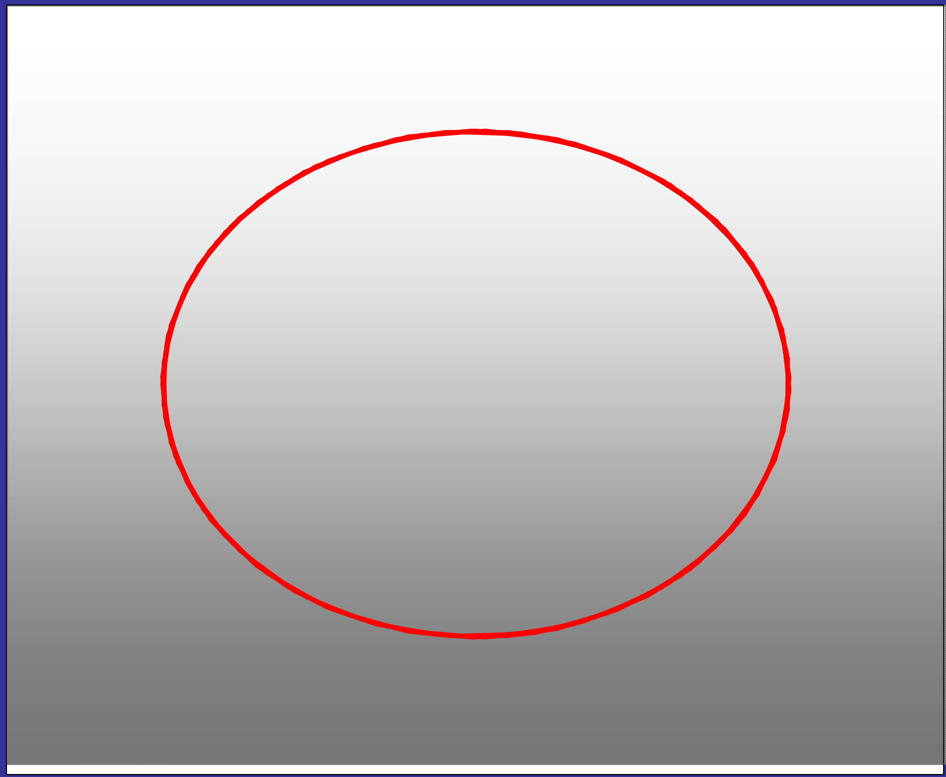
gdy: $\varphi=0$, $\varphi=90^o$, $\varphi=180^o$

liss-prez.XLS

Elipsa jest wynikiem złożenia drgań:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



Rozwiązanie analityczne:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A_y \cos(\omega t)$$

$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} = \sin^2 \omega t \qquad \frac{y^2(t)}{A_y^2} = \cos^2 \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1$$

równanie elipsy

PODSUMOWANIE

- Oscylator harmoniczny: małe drgania (mała amplituda drgań) oraz małe tłumienia
- Energia jest zachowana jeśli nie ma tłumienia
- Tłumienie powoduje spadek amplitudy w funkcji czasu i straty energii
- Oscylator wymuszony charakteryzuje się amplitudą zależną od częstości wymuszenia i może wykazywać rezonansowy wzrost amplitudy