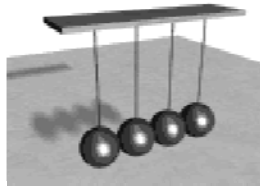
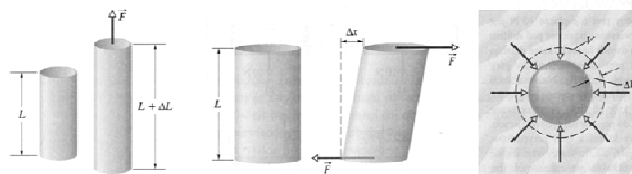


## DRGANIA – OSCYLATOR HARMONICZNY



## Własności sprężyste ciał stałych



naprężenie  
rozciągające

naprężenie  
ścinające

naprężenie  
objętościowe

Względne odkształcenie ciała zależy od naprężenia  
naprężenie to siła odkształcająca odniesiona do jednostki pola powierzchni,  
na jaką działa

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie})$$

gdy próbka powraca do pierwotnych wymiarów po usunięciu naprężenia

## Rozciąganie i ściskanie

Naprężenie  $\sigma$  definiuje się jako:  $\sigma = \frac{F}{S}$

gdzie  $F$  jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole  $S$  przekroju prostopadłego do kierunku działania siły

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa  $\Delta L/L$  – względna zmiana długości

W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje prawo Hooke'a

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

E- moduł Younga

wyklad8

2011/2012, zima



3

## Wybrane własności sprężyste pewnych materiałów

Materiał	Gęstość $\rho$ (kg/cm <sup>3</sup> )	Moduł Younga $E$ (10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Naprężenie niszczące (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )	Granice sprężystości (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )
Stal <sup>a</sup>	7860	200	400	250
Al	2710	70	110	95
Beton <sup>c</sup>	2320	30	40 <sup>b</sup>	-
Kość	1900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	-

<sup>a</sup> stal konstrukcyjna ASTM-A36, <sup>b</sup> przy ściskaniu, <sup>c</sup> o dużej wytrzymałości

wyklad8

4

## Napężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścianania) napężenie  $\sigma$  definiuje się również jako:

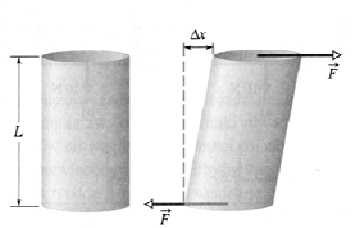
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ale siła działa równoległe do powierzchni S

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa  $\Delta x/L$

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L}$$

moduł ścianania



## Napężenie objętościowe

Napężeniem jest ciśnienie p ciecży

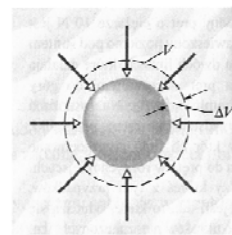
$$p = \frac{F}{S}$$

Jednostką ciśnienia jest 1 Pa = 1N/m<sup>2</sup>

Miarą odkształcenia jest względna zmiana objętości  $\Delta V/V$

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

K - moduł sprężystości objętościowej lub moduł ściśliwości



**Przykład 1** Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie  $4,0 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>. Ile wynosi, związana z tym ciśnieniem, względna zmiana objętości  $\Delta V/V$  wody a ile kulki wykonanej ze stali? Moduł ściśliwości wynosi  $2,2 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> dla wody, a dla stali  $16 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>.

Rozwiązanie:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

dla wody

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^9} = 1,8\%$$

dla kuli stalowej

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{16 \cdot 10^{10}} = 0,025\%$$

## Oscylator harmoniczny

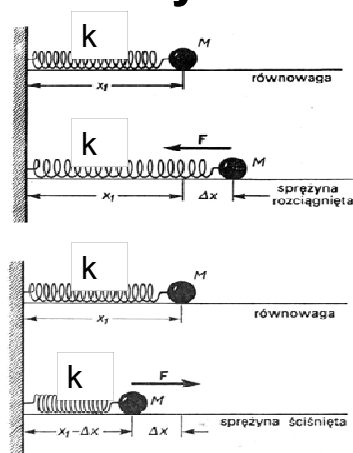
siła harmoniczna

$$F = -kx$$

- siła  $F$  proporcjonalna do wychYLENIA  $x$  z położenia równowagi

- zwrot siły: do położenia równowagi

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad k = ES / L$$



**Tylko dla małych wychyleń  $x$  z położenia równowagi !!!**

## Równanie ruchu otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona

$$F_{\text{wyp}} = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{\text{wyp}} = F = -kx$$

porównując i przekształcając

otrzymujemy ogólne równanie różniczkowe oscylatora harmonicznego – równanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach, jednorodne

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Po podzieleniu przez  $m$ , przyjmując, że

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

### Przypomnienie:

#### Równanie oscylatora harmonicznego

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

wyprowadziliśmy również z zasady zachowania energii mechanicznej

oscylator harmoniczny  
prosty (bez tłumienia i  
bez wymuszenia)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

częstość drgań własnych

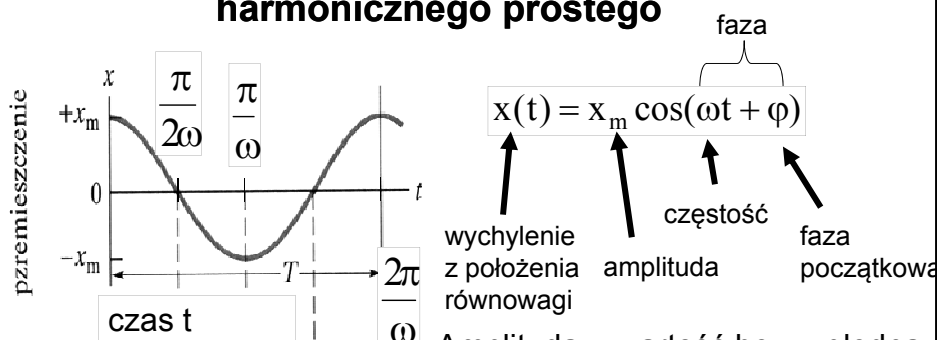
Częstość drgań własnych zależy wyłącznie od parametrów układu drgającego. Dla układu masa  $m$  – sprężyna o stałej sprężystości  $k$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wzór ten pozwala zawsze określić okres drgań  $T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

## Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego prostego



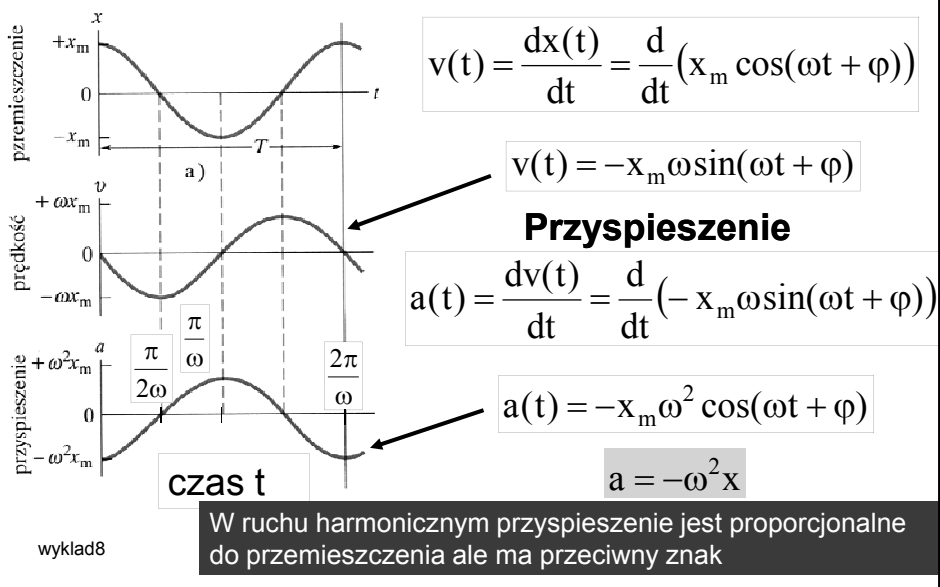
Okres ruchu  $T$  = czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

Amplituda = wartość bezwzględna maksymalnego wychylenia z położenia równowagi

$$T = \frac{1}{\nu}$$

częstotliwość = liczba drgań (cykli) na sekundę (jednostka 1Hz)

## Prędkość w ruchu harmonicznym



## Sprawdzenie czy proponowana funkcja

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

jest rozwiązaniem równania ogólnego:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Należy podstawić:  $\frac{d^2 x}{dt^2} = a = -\omega^2 x$

do równania ogólnego

Otrzymujemy:  $-\omega^2 x + \omega_0^2 x = 0$  z czego wynika, że

Częstość drgań  $\omega$  prostego oscylatora harmonicznego jest równa częstości drgań własnych  $\omega_0$

$$\omega = \omega_0$$

## Siła w ruchu harmonicznym

przyspieszenie  $a = -\omega^2 x$

Z II zasady dynamiki:  $F_{\text{wyp}} = ma = -m\omega^2 x$

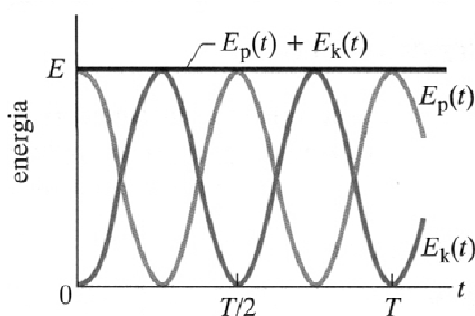
ale siła harmoniczna:  $F = -kx$

$$k = m\omega^2$$

Wiemy, że  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  czyli jeszcze raz:  $\omega = \omega_0$

## Energia w ruchu harmonicznym

energia potencjalna sprężystości



$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = m \frac{v^2}{2}$$



## Całkowita energia w ruchu harmonicznym

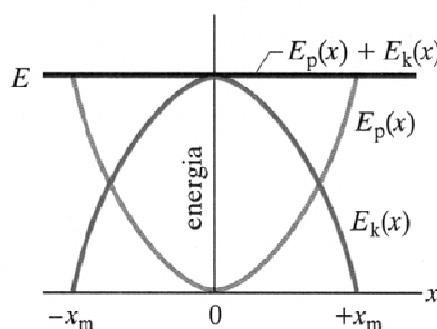
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

ale  $k = m\omega^2$  czyli

$$E = \frac{1}{2} kx_m^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2} kx_m^2 = \text{const}$$

Całkowita energia mechaniczna prostego oscylatora harmonicznego jest zachowana

## Zależność energii oscylatora od wychylenia z położenia równowagi



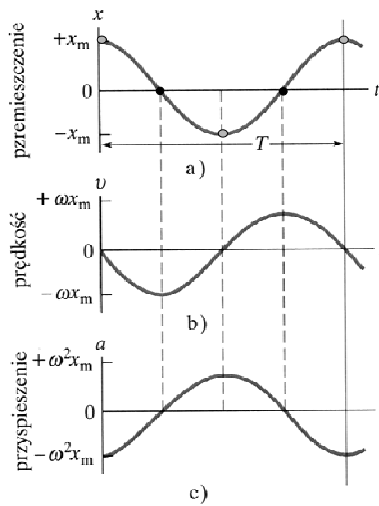
$$E_p = k \frac{x^2}{2} \quad \text{parabola}$$

$$E_k = E - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} kx_m^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} k(x_m^2 - x^2)$$

odwrócona parabola



wyklad8

Przy przechodzeniu przez położenie równowagi:

- prędkość jest największa
- przyspieszenie wynosi zero
- siła wynosi zero
- energia kinetyczna jest największa

Przy maksymalnym wychyleniu z położenia równowagi:

- prędkość wynosi zero i zmienia znak
- przyspieszenie jest największe
- siła jest maksymalna
- energia potencjalna jest największa

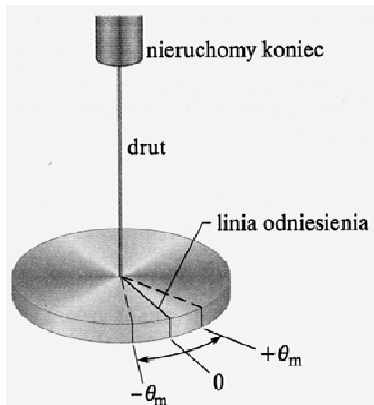
## PRZYKŁADY OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH

wyklad8

2011/2012, zima

20

## Wahadło torsyjne



$$\tau = -\kappa\theta$$

moment kierujący  $\kappa$  zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

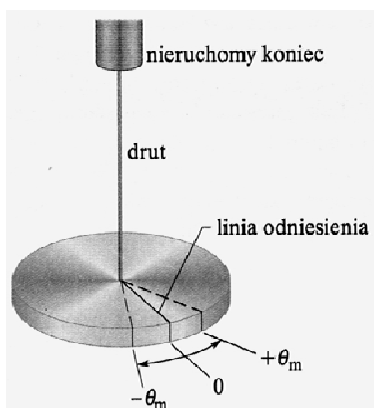
$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

wykład8

równanie ruchu z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

21

## Wahadło torsyjne



$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

równanie oscylatora harmonicznego

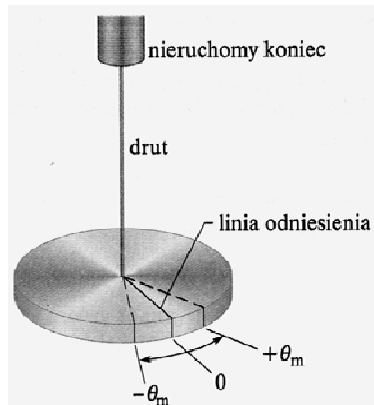
$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

wykład8

2011/2012, zima

22

## Wahadło torsyjne



$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

okres drgań wahadła torsyjnego

## Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach

**Przykład 2.** Na rysunku przedstawiono cienki pręt o długości  $L=12,4$  cm i masie  $m=135$  g zawieszony w środku na długim drucie. Zmierzony okres  $T_a$  drgań torsyjnych pręta wynosi 2,53 s. Następnie na tym samym drucie zawieszono ciało X o nieregularnym kształcie i zmierzono okres  $T_b$ , który wynosi 4,76 s. Wyznaczyć moment bezwładności ciała X względem osi, wokół której zachodzą drgania.

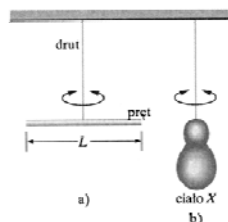
Dane:

$$L=12,4 \text{ cm}=0,124 \text{ m}$$

$$m=135 \text{ g}=0,135 \text{ kg}$$

$$T_a=2,53 \text{ s}$$

$$T_b=4,76 \text{ s}$$



Szukane:

$$I_b$$

**Rozwiązanie:**

Okres drgań wahadła torsyjnego z prętem:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}}$$

Okres drgań wahadła torsyjnego z ciałem X:

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}$$

Szukany moment bezwładności:

$$I_b = I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = \frac{1}{12} mL^2 \frac{T_b^2}{T_a^2}$$

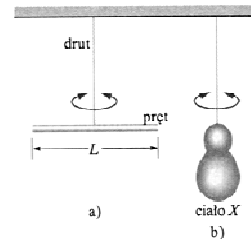
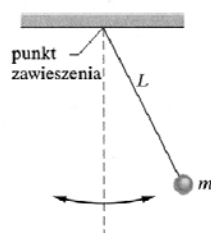
Odpowiedź:

$$I_b = 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

wykład8

2011/2012, zima

25

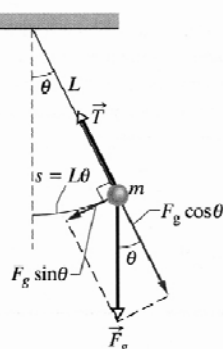
**Wahadło matematyczne**

Ruch powoduje moment siły ciężkości:

$$\tau = -L(F_g \sin \theta) = -Lmg \sin \theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta  $\theta$ 

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:



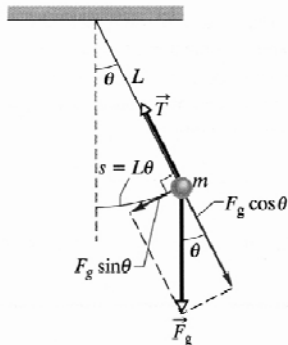
I-moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia

$$\tau = I\varepsilon = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

2011/2012, zima

26

## Wahadło matematyczne



Zakładamy, że kąt  $\theta$  jest mały (małe drgania) czyli  $\sin \theta \approx \theta$  :

$$\tau = -Lmg\theta$$

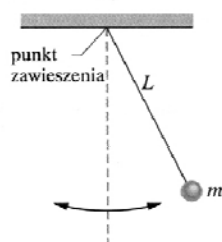
Równanie oscylatora harmonicznego:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\theta = 0$$

Częstość drgań:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

## Wahadło matematyczne



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

ale  $I = mL^2$

Częstość nie zależy od masy

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

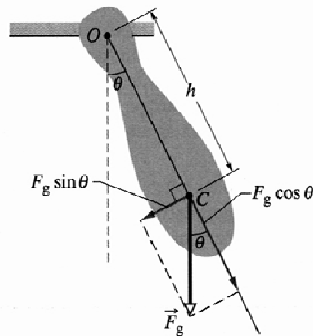
Okres T nie zależy od masy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

**wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań**

## Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym



$$\tau = -mgh \sin \theta$$

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

dla małych kątów  $\theta$

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgh \theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_{\text{cm}} + mh^2}}$$

wykład8

2011/2012, zima

29

## Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne służy do wyznaczania przyspieszenia grawitacyjnego  $g$  w różnych miejscach na Ziemi i nie tylko

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{cm}} + mh^2}{mgh}}$$

**Przykład 3.** Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia  $O$ , znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości  $h$  od jego środka masy  $C$  jak na rysunku. Mierząc okres drgań  $T$ , wyznaczyć przyspieszenie  $g$  w tym punkcie na Ziemi.

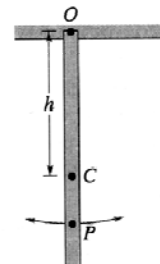
Rozwiązanie:

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2}{mg \frac{L}{2}}}$$

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



wykład8

2011/2012, zima

30

## Wahadło fizyczne

Każdemu wahadłu fizycznemu, drgającemu wokół danego punktu zawieszenia O z okresem T odpowiada wahadło matematyczne o długości  $L_0$  drgające z tym samym okresem T. Wielkość  $L_0$  nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Punkt znajdujący się w odległości  $L_0$  od punktu zawieszenia O nazywamy środkiem wahań wahadła fizycznego dla danego punktu zawieszenia.

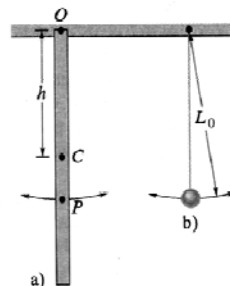
**Przykład 4.** Znaleźć długość zredukowaną wahadła z poprzedniego przykładu i wyznaczyć środek wahań.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$$

czyli

$$L_0 = \frac{2}{3}L$$

środek wahań znajduje się w punkcie P



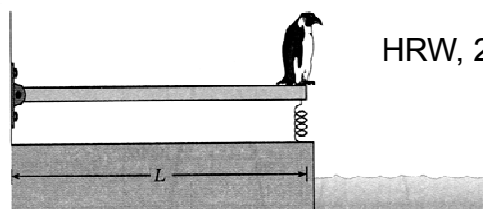
wykład8

2011/2012, zima

31

## ZADANIE DOMOWE 8.1

Na rysunku przedstawiono pingwina skaczącego do wody z trampoliny mającej postać jednorodnej wąskiej deski, której lewy koniec jest zamocowany na zawiasie, a prawy jest oparty na sprężynie. Deska ma długość  $L=2\text{m}$  i masę  $m=12\text{ kg}$ ; stała sprężystości  $k$  wynosi  $1300\text{ N/m}$ . Gdy pingwin skacze do wody, deska i sprężyna zaczynają wykonywać drgania o małej amplitudzie. Zakładamy, że deska jest wystarczająco sztywna by się nie ugiąć. Wyznaczyć okres T drgań.



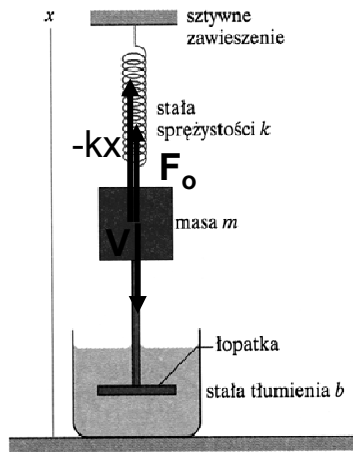
wykład8

2011/2012, zima

32



## Oscylator harmoniczny tłumiony



Siła oporu = siła Stokesa

$$F_o = -bv$$

stała tłumienia

$$\text{siła wypadkowa } F_w = -bv - kx$$

z II zasady dynamiki

$$ma = -bv - kx$$

czyli

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -bv - kx$$

wyklad8

2011/2012, zima

33

## Równanie ogólne oscylatora harmonicznego tłumionego

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$$

czas relaksacji

$$\text{lub } \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

współczynnik tłumienia

wyklad8

2011/2012, zima

34

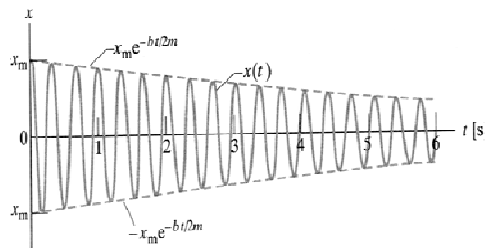
## Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Dla małych wartości współczynnika tłumienia, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = e^{-\beta t} z(t)$$

a  $z(t)$  jest rozwiązaniem prostego oscylatora harmonicznego



wyklad8

35

Sprawdzamy, czy funkcja  $x(t) = e^{-\beta t} z(t)$  jest rozwiązaniem równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\beta e^{-\beta t} z(t) + e^{-\beta t} \dot{z}(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 e^{-\beta t} z - 2\beta e^{-\beta t} \dot{z}(t) + e^{-\beta t} \ddot{z}$$

Umowa:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \quad \ddot{z}(t) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Użyteczne twierdzenie:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$\ddot{z} + \underbrace{(\omega_0^2 - \beta^2)}_{\omega^2} z = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego prostego gdy

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

wtedy  $z(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

wyklad8

2011/2012, zima

36

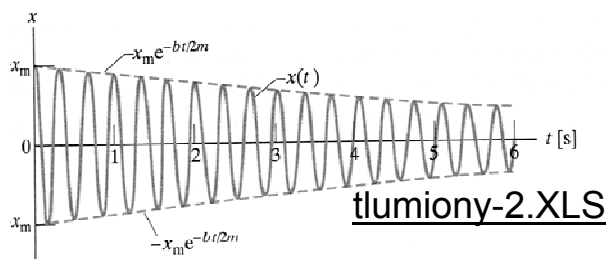
## Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$x(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) \cos(\omega t + \phi)$$

amplituda zależna od czasu

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia



wyklad8

37

## Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego w postaci periodycznej $x(t) = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \phi)$

jest możliwe tylko dla małych tłumień, tzn. gdy  $\beta < \omega_0$

ze względu na warunek  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$

Przypadek  $\beta = \omega_0$  nazywamy krytycznym

Dla  $\beta > \omega_0$  mamy rozwiązanie aperiodyczne

wyklad8

2011/2012, zima

38

## Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$A(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) = A_0 \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) \quad A_0 = A(t=0)$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia  $\Lambda$  jest to logarytm naturalny ze stosunku kolejnych amplitud

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\Lambda = -\ln \frac{A(t+T)}{A(t)} = -\ln \frac{e^{-\beta(t+T)}}{e^{-\beta t}} = \beta T \quad \beta = \frac{b}{2m}$$

## ZADANIE DOMOWE 8.2

Zastanowić się nad interpretacją fizyczną czasu relaksacji. Obliczyć ile razy zmaleje amplituda drgań oscylatora tłumionego w stosunku do amplitudy początkowej w czasie równym czasowi relaksacji.

### Straty mocy a współczynnik dobroci Q

Współczynnik dobroci Q układu drgającego jest to z definicji iloczyn  $2\pi$  i stosunku energii zmagazynowanej do średniej energii traconej w jednym okresie T

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia zmagazynowana}}{\langle \text{energia tracona w } T \rangle}$$

Dla słabo tłumionego oscylatora harmonicznego

$$Q \approx \omega_0 \tau$$

Wielkość  $\omega_0 \tau$  lub Q jest odpowiednią miarą braku tłumienia oscylatora. Duże  $\omega_0 \tau$  lub duże Q oznacza, że oscylator jest słabo tłumiony, np. dla struny fortepianu  $Q \approx 10^3$ , dla atomu wzbudzonego  $Q \approx 10^7$

### ZADANIE DOMOWE 8.3

W jakim czasie energia oscylatora harmonicznego tłumionego zmniejsza się do  $e^{-1}$  swej wartości początkowej? Ile pełnych drgań wykona w tym czasie oscylator?

## Oscylator harmoniczny z wymuszeniem - rezonans

Zakładamy periodyczne wymuszenie w postaci siły wymuszającej danej jako:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

↑  
częstość wymuszenia

Równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem i wymuszeniem ma postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

## Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

lub po podzieleniu przez masę:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

i wprowadzeniu standardowych oznaczeń:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t)$$

W stanie ustalonym drgania oscylatora zachodzą z częstością wymuszenia  $\omega$

## Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

Rozwiązaniem równania: 
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t)$$

jest: 
$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

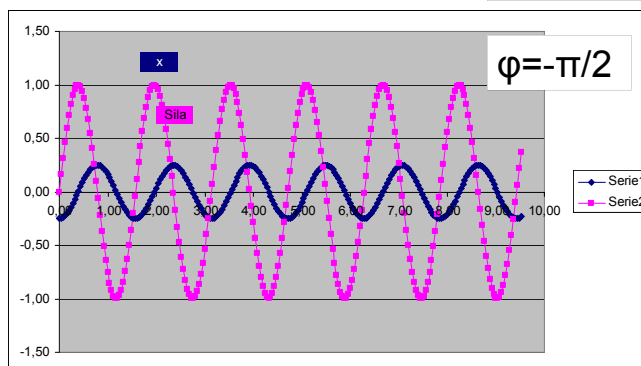
Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

- ✓ amplituda  $x_0$  jest funkcją częstości wymuszenia
- ✓ przesunięcie fazowe nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia

Przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  mówi nam, o jaki kąt maksimum przemieszczenia  $x$  wyprzedza maksimum siły wymuszającej  $F$ .

$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$



Można pokazać, że:

amplituda drgań

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2 \right)^{1/2}}$$

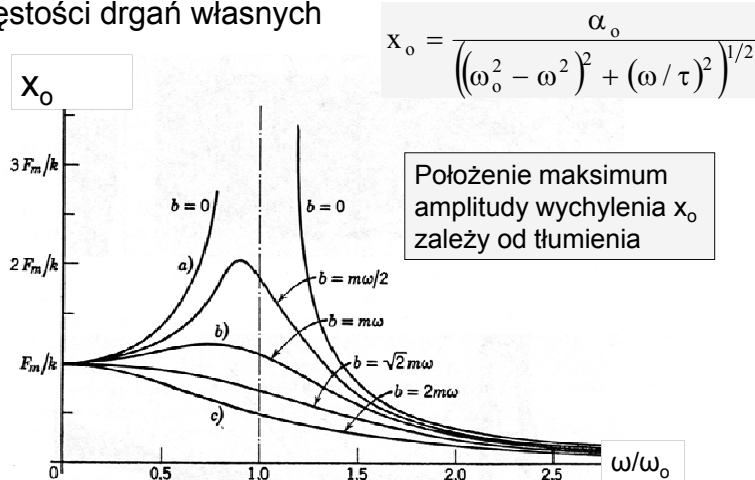
przesunięcie fazowe

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

zależą w określony sposób od częstości drgań

wymuszony2.XLS

Rezonans występuje amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza gdy częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych





**Przykład 5.** Znaleźć warunek rezonansu w przypadku gdy:

a) rozważamy maksymalną amplitudę wychylenia  $x_{\max}$ ,

b) rozważamy maksymalną amplitudę prędkości  $v_{\max}$ .

Rozwiązanie:

a)

$$x_o = \frac{\alpha_o}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dx_o}{d\omega} = ?$$

Wystarczy znaleźć minimum mianownika

$$f(\omega) = (\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega) = 2(\omega_o^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2(\omega/\tau^2)$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega_{\text{rez}}) = 0$$

dla

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

Częstość rezonansu w przypadku (a) zależy od współczynnika tłumienia

Gdy  $\tau \rightarrow \infty$  tzn. przy braku tłumienia:  $\omega_{\text{rez}} = \omega_o$

Amplituda drgań

$$x_o(\omega_{\text{rez}}) = \frac{\alpha_o}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2\right)^{1/2}} \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow 0$$

## b) amplituda prędkości

$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \omega x_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$V_{\max} = \omega X_0(\omega)$$

$$V_{\max} = \frac{\omega \alpha_0}{\left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2 \right)^{1/2}}$$

$$\frac{dv_{\max}}{d\omega} = ?$$

**ZADANIE DOMOWE 8.4**

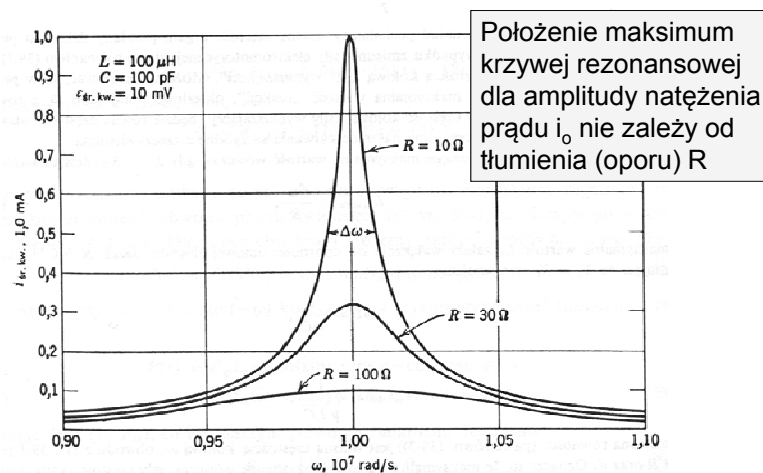
Znaleźć  $\frac{dv_{\max}}{d\omega}$  Pokazać, że częstość, przy której występuje maksimum amplitudy prędkości jest równa częstości drgań własnych, niezależnie od tłumienia.

Kiedy obserwujemy rezonans tego typu?

Najczęściej w obwodach LRC, mierząc natężenie w obwodzie.

Oscylator mechaniczny	Obwód LRC
wychylenie z położenia równowagi, $x$	ładunek elektryczny, $q$
prędkość $v=dx/dt$	natężenie prądu $i=dq/dt$
masa, $m$	indukcyjność, $L$
stała sprężystości, $k$	odwrotność pojemności, $1/C$
stała tłumienia, $b$	rezystancja, $R$
siła, $F$	napięcie, $U$

Krzywa rezonansowa dla amplitudy prędkości



## Składanie drgań harmoniczych

✓ zachodzących w tym samym kierunku

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

✓ zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

krzywa  $y(x)$

## Wygaszanie i wzmacnianie drgań zachodzących w jednym kierunku

Założmy:  $x_1(t) = A \cos(\omega t)$        $x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

drgania o tej samej amplitudzie  $A$  zachodzą z tą samą częstotliwością  $\omega$ , lecz mogą być przesunięte w fazie o  $\varphi$

W wyniku złożenia otrzymujemy:

$$x_{\text{wyp}} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

drgania o amplitudzie zależnej od  $\varphi$

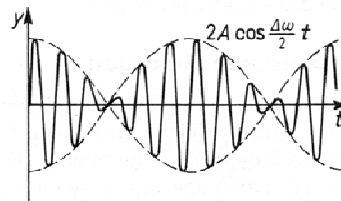
$$x_{\text{wyp}} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)$$

dla  $\varphi = \pi$ ,  $x_{\text{wyp}} = 0$  całkowite wygaszenie drgań

dla  $\varphi = 2\pi$ ,  $x_{\text{wyp}} = 2A \cos(\omega t)$  dwukrotny wzrost amplitudy drgań - wzmocnienie

## Dudnienia

Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach



$$y_1(t) = A \sin \left( \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t$$

$$y_2(t) = A \sin \left( \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t$$

$$y = y_1 + y_2 = A \left[ \sin \left( \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t + \sin \left( \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right]$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Otrzymujemy:

$$y = 2A \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \sin \omega t$$

drgania o modulowanej amplitudzie

## Składanie drgań harmoniczných w kierunkach wzajemnie prostopadłych

Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857

*Przykład 6.* Znaleźć wynik złożenia drgań prostopadłych opisanych równaniami:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

gdę:  $\varphi=0$ ,  $\varphi=90^\circ$ ,  $\varphi=180^\circ$

[liss-prez.XLS](#)

Elipsa jest wynikiem złożenia drgań:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rozwiązanie analityczne:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

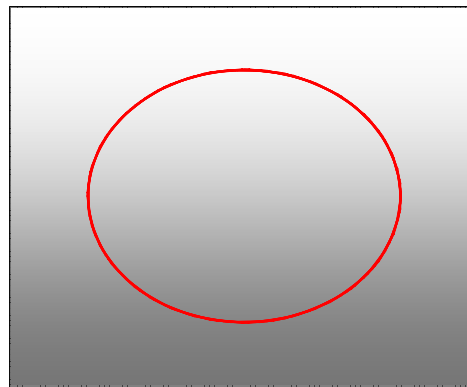
$$y(t) = A_y \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_y \cos(\omega t)$$

$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} = \sin^2 \omega t$$

$$\frac{y^2(t)}{A_y^2} = \cos^2 \omega t$$



$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1$$



równanie elipsy

## PODSUMOWANIE

- Oscylator harmoniczny: małe drgania (mała amplituda drgań) oraz małe tłumienia
- Energia jest zachowana jeśli nie ma tłumienia
- Tłumienie powoduje spadek amplitudy w funkcji czasu i straty energii
- Oscylator wymuszony charakteryzuje się amplitudą zależną od częstości wymuszenia i może wykazywać rezonansowy wzrost amplitudy