

**1924- Louis de Broglie – teoria fal materii,  
1929- nagroda Nobla**

**Hipoteza de Broglie** głosi, że dwoiste korpuskularno – falowe zachowanie jest cechą nie tylko promieniowania, lecz również materii.

W przypadku materii i promieniowania całkowita energia **E** dowolnego obiektu fizycznego jest związaną z częstotliwością  $\nu$  fali stowarzyszonej, opisującej jego ruch, następującą relacją:

$$E = h \nu$$

gdzie  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  jest stałą Plancka.

Pęd tego obiektu związany jest z długością przypisanej mu fali następującą relacją:

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

Definiujemy:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

gdzie  $\vec{k}$  jest wektorem falowym o kierunku zgodnym z kierunkiem propagacji fali o długości  $\lambda$ . Wówczas związek (1) ma postać:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Wielkości charakterystyczne dla cząstki : **energia E**, oraz **pęd p** są związane poprzez stałą Plancka **h** z wielkościami charakterystycznymi dla ruchu falowego: **częstotliwość  $\nu$** , oraz **długość fali  $\lambda$** .

Wyrażenie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

opisuje długość **fali de Broglie**. czyli długość fali materii stowarzyszonej z ruchem cząstki o pędzie p.

Przykłady:

a) obiekt makroskopowy

piłka o masie  $m = 1 \text{ kg}$ , porusza się z prędkością  $v = 10 \text{ m/s}$ ,  
długość fali de Broglie stowarzyszonej z tym obiektem wynosi:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{1.0 \cdot 10 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6.6 \times 10^{-35} \text{ m} = 6.6 \times 10^{-25} \text{ \AA}$$

**Długość fali stowarzyszonej z ruchem piłki jest tak mała, że nie istnieje układ fizyczny, który umożliwiłby zaobserwować aspekty falowe (interferencja, dyfrakcja) związane z tym ruchem.**

### b) obiekt mikroskopowy

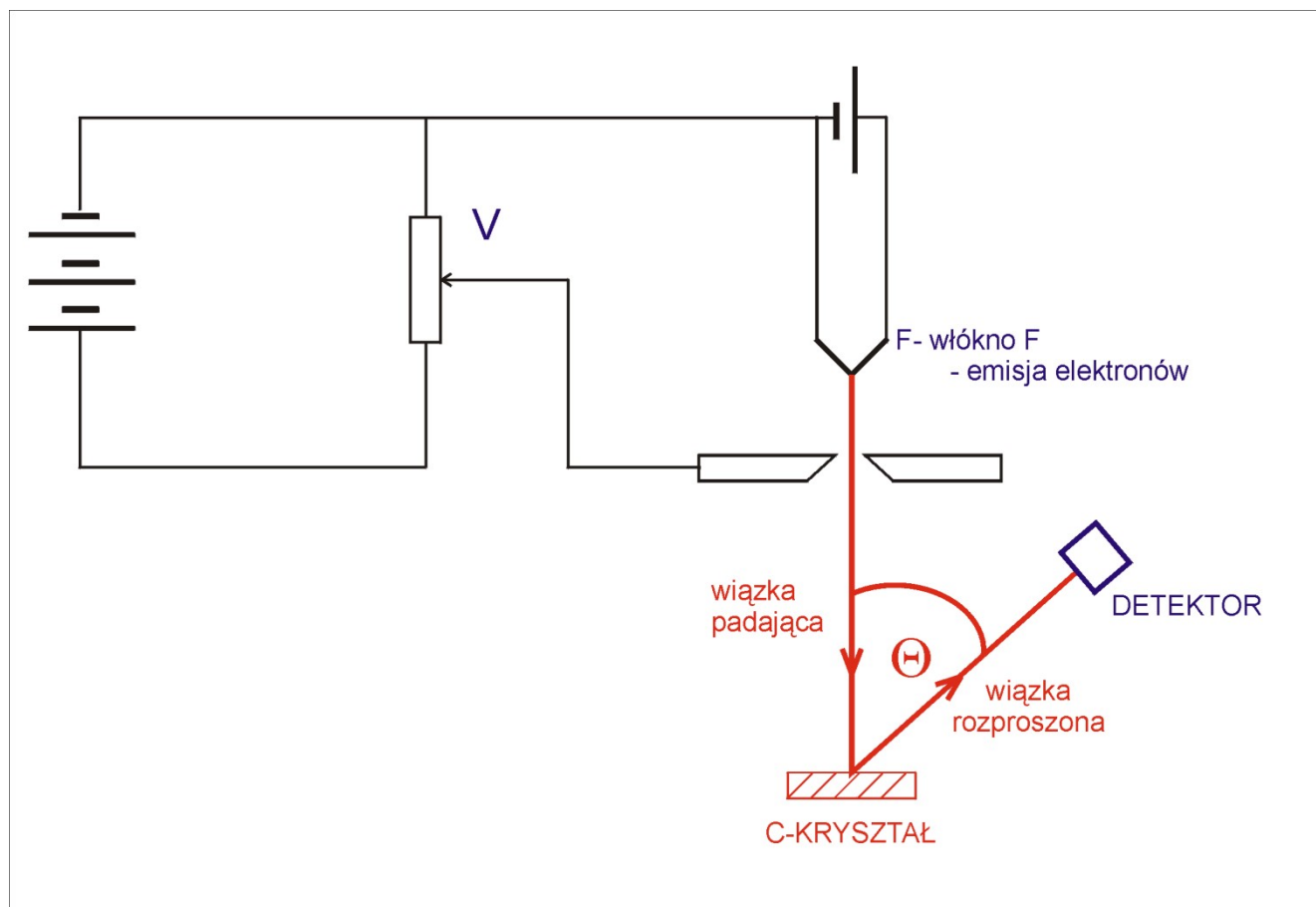
elektron o masie  $m=9.1\times 10^{-31}\text{kg}$  posiada energię kinetyczną  $E_k = 100 \text{ eV}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.2 \text{ \AA}$$

$\lambda$  jest małe i dlatego w celu zaobserwowania falowych aspektów związanych z ruchem elektronów należy dysponować układem o przesłonach posiadających rozmiary porównywalne z  $\lambda \approx 0.1 \text{ nm}$

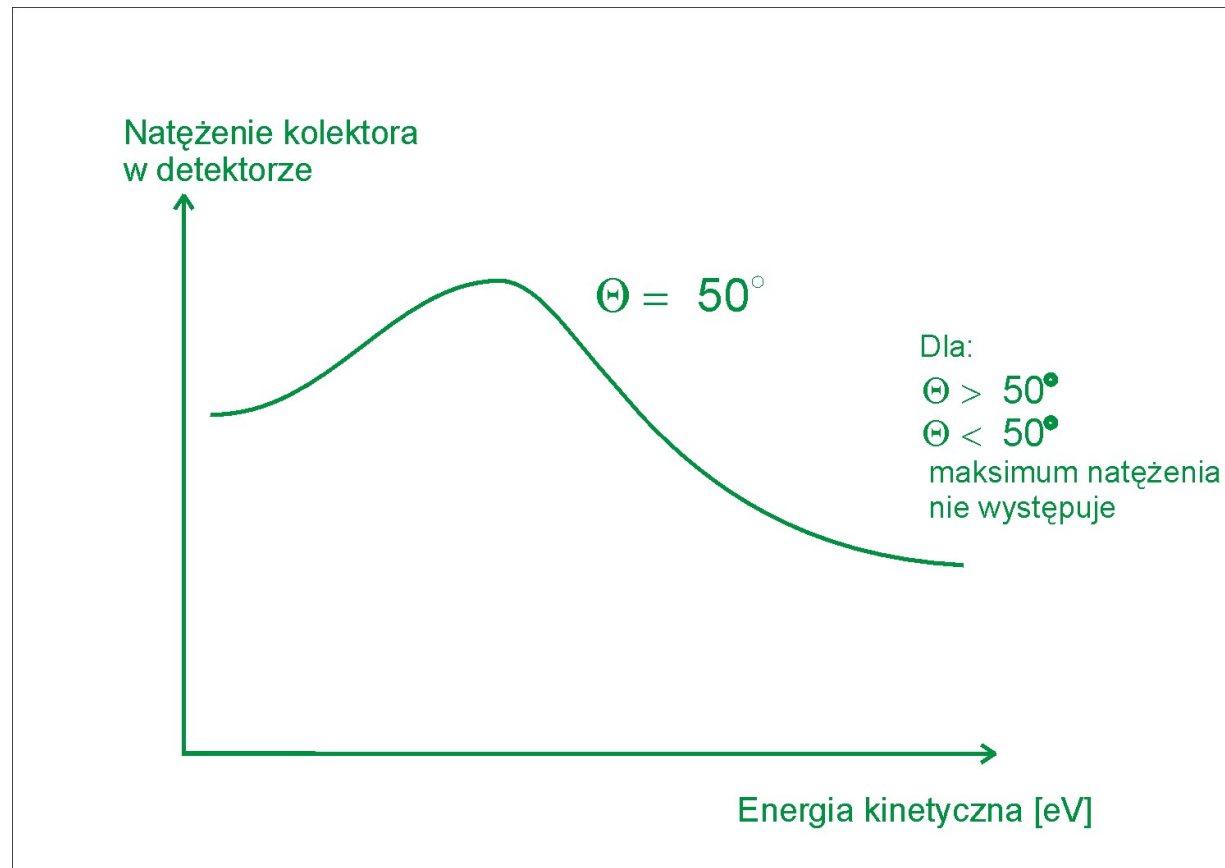
Takim układem jest **sieć krystaliczna**.

## Doświadczenie Davissona – Germera



$e$  (elektrony) - są przyspieszane regulowaną różnicą potencjałów

## Doświadczenie Davissona – Germera



## Doświadczenie Davissona – Germera

Kryształ powinien silnie rozpraszać wiązkę elektronów:  
atomy kryształu stanowią trójwymiarową siatkę dyfrakcyjną.  
W obrazie detekcyjnym widać maksimum dla  $\Theta = 50^\circ$ .

Istnienie tego maksimum można wytłumaczyć jedynie jako wynik konstruktywnej interferencji fal rozproszonych na periodycznie rozmieszczonych atomach tworzących płaszczyzny kryształu.

Nie tylko elektrony, lecz wszystkie poruszające się materialne obiekty naładowane i elektrycznie obojętne wykazują cechy falowe w warunkach charakterystycznych dla optyki falowej.

Np. wiązki atomów wodoru i helu ulegają rozproszeniu na monokryształach fluorku litu, natomiast powolne neutrony na kryształach chlorku sodu (sól kuchenna).



## Fale materii

**Cechy korpuskularne** staja się bardzo wyraźne, gdy badamy zjawiska emisji lub absorpcji.

**Cechy falowe** staja się wyraźne, gdy badamy rozchodzenie się materii i promieniowania.

### **Dwoistość falowo – korpuskularna :**

Np. stosunek  $\frac{e}{m}$  (ładunek elektronu/masa elektronu) wyznaczony

z eksperymentu pomiaru śladu jonizacji wskazuje na stosowalność modelu korpuskularnego, natomiast zjawisko dyfrakcji sugeruje model falowy.

Modele falowy i korpuskularny wzajemnie się uzupełniają: jeżeli dany pomiar dostarcza dowodu falowego, to w tym samym pomiarze nie da się wykryć cech korpuskularnych i na odwrót.

W obrazie **falowym** natężenie promieniowania:

$I \propto \overline{E^2}$  czyli średnia wartość wektora Poyntinga jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali.

W obrazie **fotonowym – korpuskularnym**:

$I = N h \nu$  gdzie  $N$  jest średnią liczbą fotonów przechodzących w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku ruchu fotonów.

**Einstein** sugerował, że średnią wartość kwadratu amplitudy fali, która w teorii elektromagnetyzmu jest proporcjonalna do energii przypadającej na jednostkę objętości, można interpretować, jako miarę średniej liczby fotonów znajdujących się w jednostce objętości.

Uogólnienie hipotezy de Broglie przez **Schrödingera** dało początek mechanice kwantowej.

Fale de Broglie jest reprezentowana przez funkcje falową, która dla przypadku jednowymiarowego ma postać:

$$\psi(x, t) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2)$$

Wyrażenie (2) jest analogiczne do wyrażenia na natężenie pola elektrycznego fali elektromagnetycznej.

$$E(x, t) = E_o \sin(kx - \omega t)$$

Fala de Broglie jest reprezentowana przez funkcje falową, która dla przypadku jednowymiarowego ma postać:

$$\psi(x, t) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) = A \sin(kx - \omega t) \quad (2)$$

Podstawiając do (2):  $\hbar k = p$        $\hbar \omega = E$

Otrzymujemy:

$$\psi(x, t) = A \sin \frac{1}{\hbar} (px - Et)$$

## Zasada nieoznaczoności

$$\psi(x, t) = A \sin \frac{1}{\hbar} (px - Et)$$

Czy można, przeprowadzając odpowiedni pomiar, jednocześnie określić zarówno pęd  $\mathbf{p}$  jak i położenie  $\mathbf{x}$  cząstki ?

Nie można ich określić dokładniej niż na to pozwala **zasada nieoznaczoności Heisenberga**.

## Zasada nieoznaczoności

Zasada ta stanowi odpowiedź daną przez mechanikę kwantową, w postaci analitycznej jest zapisana, np. dla przypadku jednowymiarowego:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie :  $\Delta p_x$  jest dokładnością pomiaru x-owej składowej pędu

$\Delta x$  jest dokładnością pomiaru położenia

Zasada ta nie jest wynikiem niedokładności przyrządów pomiarowych, ale odnosi się do samego procesu pomiaru. Uwzględnia ona oddziaływanie między obserwatorem i mierzonym obiektem, oddziaływanie to zawsze występuje.

Przykład:

- a) Obiekt makroskopowy; kula o masie  $m=50$  g
- b) Obiekt mikroskopowy; elektron o masie  $m=9.1 \times 10^{-28}$  g

poruszają się z taką samą prędkością  $v=300$  m/s, prędkość ta jest wyznaczona z dokładnością 0,01%.

Pytanie: jak dokładnie możemy wyznaczyć położenie kuli i elektronu?



## Zasada nieoznaczoności

a)  $p = 15 \text{ kg m/s}$ ,  $\Delta p = 0,0001 \times 15 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 3 \times 10^{-32} \text{ m} = 3 \times 10^{-22} \text{ \AA}$$

wielkość ta stanowi  $10^{-17}$  średnicy jądra atomowego, jest więc wielkością niemierzalną. Czyli dla obiektów makroskopowych istnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga nie nakłada na procedurę pomiarową żadnych ograniczeń.

## Zasada nieoznaczoności

$$\text{b) } p=2,7 \times 10^{-28} \text{ kg m/s} \quad \Delta p = m \Delta v = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kg m/s}$$

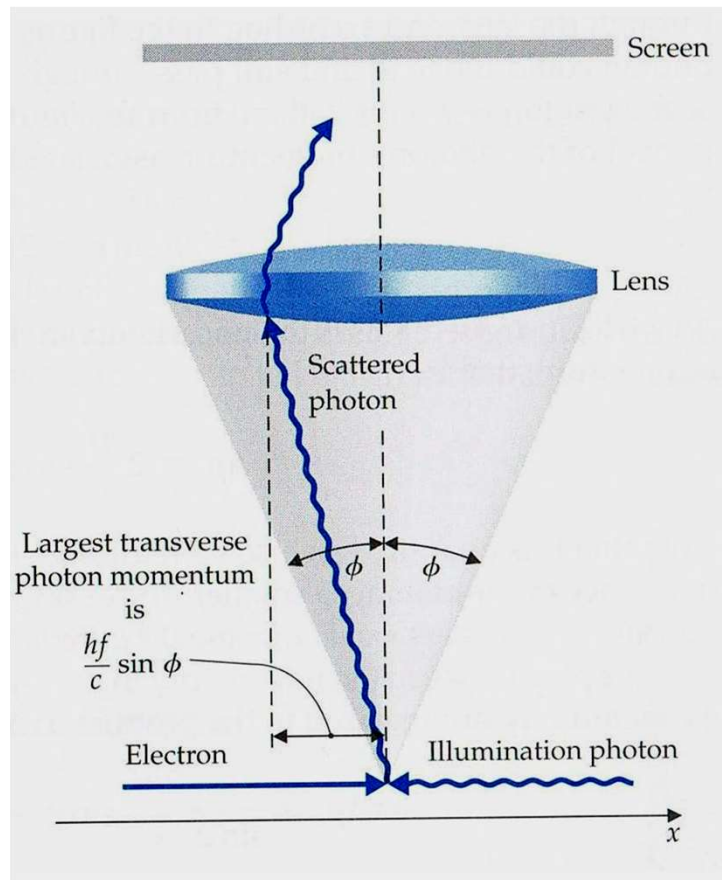
$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 0.2 \text{ cm} = 2 \times 10^7 \text{ \AA}$$

wielkość ta stanowi  $10^7$  średnicy jądra atomu.

Dla obiektów mikroskopowych występują w praktyce zawsze ograniczenia w procedurze pomiarowej.

## Mikroskop Heisenberga

Eksperyment myślowy: wyobraźmy sobie mikroskop, który ma mierzyć jednocześnie położenie  $x$  elektronu i składową  $p_x$  pędu elektronu.

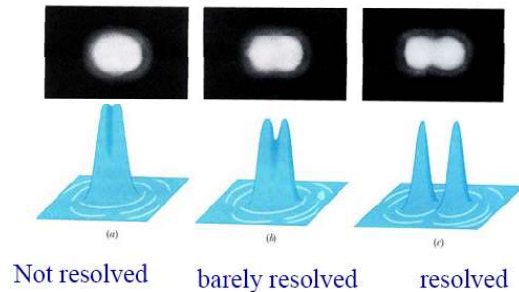


Zakładamy, że elektron porusza się od lewej do prawej ze ściśle zdefiniowanym pędem początkowym  $p_x$ . Położenie elektronu jest rejestrowane poprzez obserwację fotonu rozproszonego.

Pojedynczy foton o dobrze określonym pędzie (dokładnie znanej długości fali) pada na układ z prawej strony. Moment zderzenia elektronu z fotonem jest tak dobrany, że ma ono miejsce dokładnie pod soczewką mikroskopu. Zderzenie będzie obserwowane, jeżeli foton rozprasza się na elektronie, jest zbierany przez soczewkę i jest rejestrowany na ekranie.

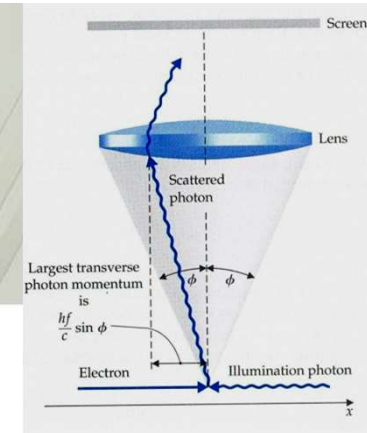
# Mikroskop Heisenberga

W klasycznej optyce rozdzielczość mikroskopu dana jest:



$$\Delta x \cong \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

$\lambda$ -długość fali po rozproszeniu



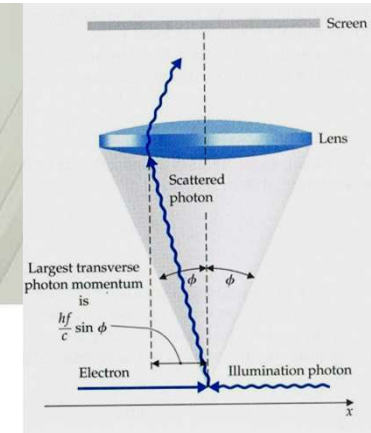
$\Delta x$  określa jednocześnie możliwość lokalizacji elektronu w przestrzeni i niepewność pomiaru położenia elektronu; aby zmniejszyć tę wielkość, trzeba użyć fali krótszej lub zwiększyć aperturę mikroskopu, tj. kąt  $\theta$

Niepewność pędu elektronu (jego składowej  $x$ )  $\Delta p_x$  po zderzeniu, kiedy mierzone jest jego położenie jest taka sama jak niepewność określenia pędu fotonu. Niepewność w wyznaczeniu pędu fotonu wynika z nieznaności dokładnego kierunku fotonu przy przechodzeniu przez soczewkę.

$$\Delta p_x \cong 2 \frac{hf}{c} \sin \theta$$

W przeciwieństwie do  $\Delta x$ , mniejsza długość fali (większa częstotliwość  $f$ ) i większy kąt  $\theta$  zwiększają  $\Delta p_x$

# Mikroskop Heisenberga



Iloczyn  $\Delta x$  i  $\Delta p_x$  wynosi:

$$\Delta x \Delta p_x \cong \frac{\lambda}{\sin \theta} \frac{2hf}{c} \sin \theta = 2h = 4\pi\hbar$$

Niezależnie od szczególnej konstrukcji urządzenia, wynik ten ma ogólną formę relacji Heisenberga

Zasada nieoznaczoności pozwala nam uniknąć pozornych paradoksów.

## Eksperyment z dwoma szczelinami

Elektrony przechodząc przez układ złożony z pary szczelin dają na ekranie obraz interferencyjny nawet wtedy gdy jest ich tak mało, że w danej chwili czasu przez szczeliny przechodzi tylko jeden elektron. Obraz interferencyjny ulega zniszczeniu przy jakiegokolwiek próbie ustalenia przez którą szczelinę przeszedł elektron.

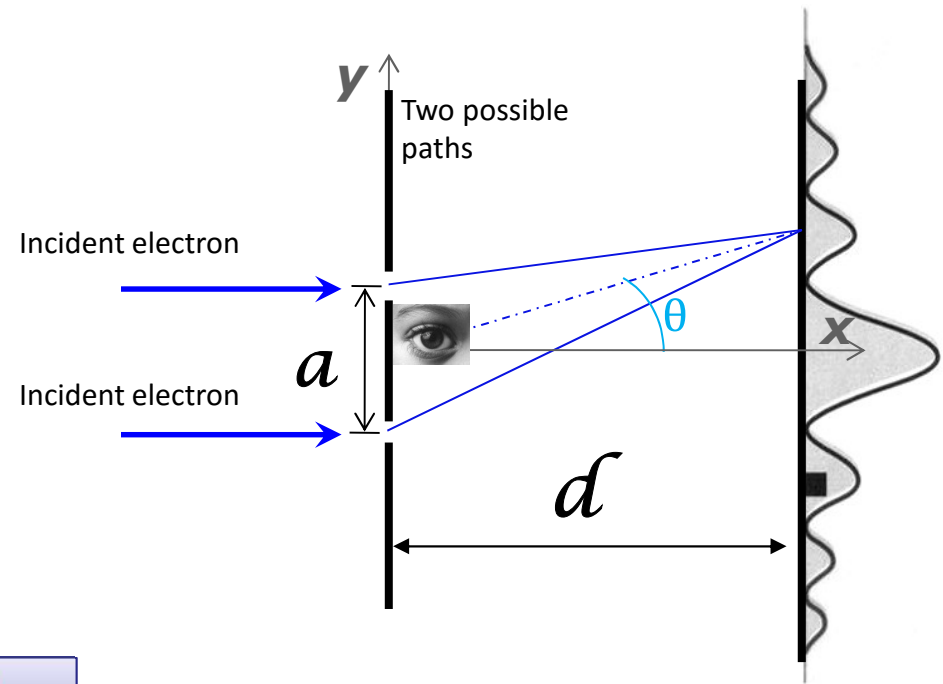
Warunek interferencji konstruktywnej

$$a \sin \theta_n = n\lambda$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Odległość sąsiednich maksimum na ekranie:

$$d \sin \theta_{n+1} - d \sin \theta_n = \frac{\lambda d}{a}$$



## Eksperyment z dwoma szczelinami

Detektor (nawet oko) ustawiony za szczelinami określa położenie elektronu z dokładnością wystarczającą aby określić przez którą szczelinę przeszedł elektron. Jest to równoważne pomiarowi składowej  $y$  położenia elektronu z niepewnością mniejszą niż odległość między szczelinami:

$$\Delta y < \frac{a}{2}$$

Każdy pomiar położenia elektronu (przez rozpraszanie fotonu na elektronie) powoduje przekaz pędu i wprowadza niepewność  $\Delta p_y$  w wyznaczeniu pędu elektronu. Z zasady Heisenberga mamy:

$$\Delta p_y > \frac{(\hbar/2)}{(a/2)} = \hbar/a$$

## Eksperyment z dwoma szczelinami

Wprowadzając niepewność pomiaru składowej poprzecznej pędu, automatycznie wprowadziliśmy niepewność miejsca przybycia elektronu na ekranie. Jeżeli elektron przeszedł przez układ szczelin mając pęd podłużny  $p$ , wtedy zostanie rozproszony pod kątem:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta p_y}{p} = \frac{\hbar}{ap} = \frac{\lambda}{2\pi a}$$

Ostatecznie, niepewność kątowa przenosi się na niepewność położenia poprzecznego na ekranie:

$$\Delta y = d\Delta\theta = \frac{d\lambda}{2\pi a}$$

Porównując ten wynik z odległością pomiędzy dwoma sąsiednimi maksimumi interferencyjnymi:

$$d\Delta\theta = \frac{\lambda d}{a}$$

**widzimy, że detektor zaburzył pomiar i zniszczył obraz interferencyjny**



## Zasada nieoznaczoności czas-energia

Zasada ta wynika z hipotezy de Broglie oraz z pewnych prostych, wspólnych dla wszystkich fal, własności. Odnosi się ona również do pomiaru energii i czasu życia na danym poziomie energetycznym:

$$\Delta E \Delta \tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie:

$\Delta E$  jest dokładnością pomiaru energii E

$\Delta \tau$  jest dokładnością pomiaru czasu życia  $\tau$

## Zasada nieoznaczoności czas-energia

Dla  $E=p^2/2m$

otrzymujemy: 
$$\Delta E = \frac{(2p\Delta p)}{2m} = \frac{p\Delta p}{m} = v\Delta p$$

$$\Delta E = v\Delta p \geq v \frac{\hbar/2}{\Delta x} = \frac{\hbar/2}{(\Delta x/v)} = \frac{\hbar/2}{\Delta t}$$



$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

**Time-energy uncertainty relation**

Stan o określonym czasie życia  $\Delta t$  nie może mieć dokładnie określonej energii.

## Zasada nieoznaczoności czas-energia

Jeżeli stan wzbudzony atomu ma czas życia  $\tau$ , to jego energia nie wynosi dokładnie  $E_1$ ; nieoznaczoność energii wynosi:

$$\Delta E_1 = \frac{\hbar}{\tau}$$

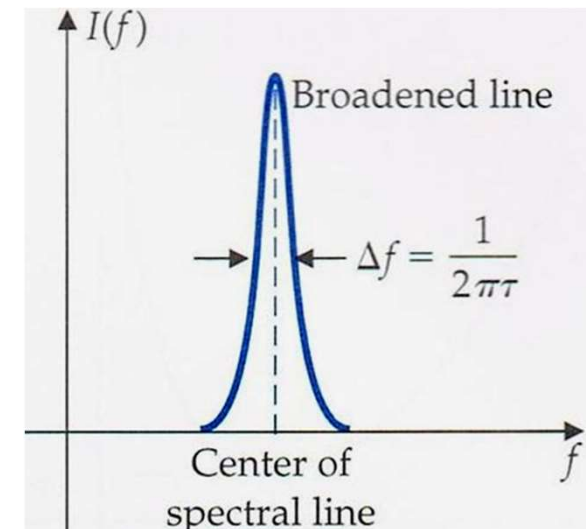
Ta nieoznaczoność energii ujawnia się gdy podczas przejścia do stanu podstawowego o energii  $E_0$ ; częstotliwość promieniowania emitowanego w wyniku tego procesu:

$$f = \frac{E_1 - E_0}{h}$$

nie jest dokładnie określona

$$\Delta f = \frac{\Delta E_1}{h} \cong \frac{1}{2\pi\tau}$$

*Poszerzenie* linii spektralnych jest zjawiskiem wynikającym z mechaniki kwantowej



## Energia stanu podstawowego

W pobliżu najniższej energii, gdzie klasycznie  $p=0$

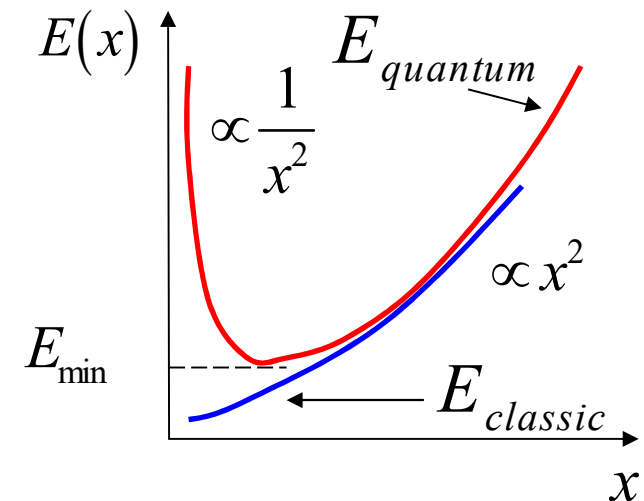
$$\Delta p = p$$

Energia oscylatora

$$E(x) = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2$$

i

$$E(a) = \frac{\hbar^2}{8ma^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$



Najmniejsza energia nie jest zero

$$E_{min} = \frac{\hbar \omega}{2}$$

Konsekwencją zasady Heisenberga jest występowanie resztkowego ruchu w każdym systemie fizycznym.