



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Statystyki klasyczne i kwantowe

Problem wielu cząstek

Ze wzrostem liczby elementów układu fizycznego, przechodząc od atomów jednoelektronowych, poprzez wieloelektronowe, aż do cząsteczek i ciał stałych, szczegółowy opis zachowania układu staje się coraz bardziej złożony.

Jeden mol zawiera liczbę Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ cząsteczek.

Jeżeli dodatkowo cząsteczki oddziałują ze sobą, to opis zachowania takiego układu zarówno klasycznie poprzez korzystanie z zasad mechaniki Newtona jak i kwantowo rozwiązując równanie Schrödingera aby znaleźć funkcje falowe dla każdej cząsteczki **nie jest możliwy**.

W takim przypadku stosuje się podejście **statystyczne**.

Elementy fizyki statystycznej

Izolowany układ zawiera wielką liczbę **klasycznych** cząstek w **stanie równowagi termodynamicznej** w temperaturze T .

Aby osiągnąć i utrzymać ten stan równowagi cząstki muszą wymieniać między sobą energię. Podczas tych wymian energia będzie fluktuować wokół **średniej** wartości.

Będziemy mogli obliczać **średnią** prędkość cząsteczek, **średnią** energię kinetyczną jeżeli znana jest określona funkcja rozkładu prawdopodobieństwa.

Fizycznie mierzalne wielkości, które charakteryzują układ wielu cząstek mogą zostać obliczone jeśli znane jest prawdopodobieństwo, że w danej temperaturze T układ ma konkretną energię E .

Elementy fizyki statystycznej

W ujęciu statystycznym bierzemy pod uwagę, że cząsteczki mają różne prędkości i energie – rozkład prędkości lub energii.

$f(\vec{v})$ funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(\vec{v}) = \frac{n(\vec{v})}{n}$$

$n(\vec{v})$ liczba atomów lub cząsteczek (w jednostce objętości) o prędkościach zawartych w przedziale od \vec{v} do $\vec{v} + d^3\vec{v}$

całkowita ilość $n = \int n(\vec{v}) d^3\vec{v}$

Znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa (funkcji rozkładu) pozwala obliczać wartości średnie

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \int \vec{v}^2 f(\vec{v}) d^3\vec{v}$$

Klasyczne rozkłady prawdopodobieństwa to:

- rozkład Maxwella dla prędkości cząsteczek w gazie doskonałym
- rozkład Boltzmanna dla energii

Kwantowe rozkłady prawdopodobieństwa to:

- rozkład Bosego-Einsteina dla cząstek o spinie całkowitym
- rozkład Fermiego-Diraca dla cząstek o spinie połówkowym

Efekty kwantowe dominują w układach wielu cząstek, w tym ciał stałych w temperaturze pokojowej.

Klasyczna i kwantowa fizyka statystyczna zbliżają się do siebie gdy temperatura układu rośnie.

Rozkład Maxwella

W 1860 **James Clerk Maxwell** wyprowadził wzór na gęstość prawdopodobieństwa dla klasycznego gazu cząsteczek nie oddziaływujących ze sobą, traktowanych jako punktowe.

Założenie: funkcja rozkładu f zależy tylko od wartości prędkości v :

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Żaden kierunek nie jest uprzywilejowany, ruch w każdym z kierunków x, y i z odbywa się niezależnie co oznacza, że prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki o składowej prędkości w kierunku x w przedziale od v_x do $v_x + dv_x$ jest niezależne od prawdopodobieństwa znalezienia składowej prędkości w kierunku y w przedziale od v_y do $v_y + dv_y$, itd.

$$f(v_x, v_y, v_z) = h(v_x)h(v_y)h(v_z)$$

Rozkład Maxwella

$$h(v_x)h(v_y)h(v_z) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Funkcja rozkładu h jest taka sama dla każdego kierunku co wynika z symetrii.

$$\ln[h(v_x)] + \ln[h(v_y)] + \ln[h(v_z)] = \ln[f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]$$

stąd:
$$h(v_x) = \text{const} \times \exp(-Bv_x^2)$$

$$f(v) = C \exp[-B(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] = C \exp(-Bv^2)$$

Stałe C i B znajdujemy z warunku normalizacji

Rozkład Maxwella

Ostateczna forma rozkładu Maxwella:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

- Funkcja rozkładu zależy tylko od wartości prędkości, a nie od jej kierunku
- Dla ustalonej temperatury, funkcja rozkładu maleje eksponencjalnie gdy energia kinetyczna cząsteczki $K=mv^2/2$ rośnie, maleje e razy gdy K rośnie $k_B T$ -razy

Rozkład Maxwella

- rozkład Maxwella pozwala znaleźć wartości średnie:

$$\langle v^n \rangle = \int v^n f(v) d^3\vec{v}$$

- Rozkład Maxwella wyprowadza się dla prędkości ale można również obliczyć rozkład szybkości $g(v)$

$$g(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

$g(v)dv$ opisuje prawdopodobieństwo, że cząsteczka będzie miała prędkość zawartą pomiędzy v i $v+dv$

Rozkład Maxwella

Wykres rozkładu szybkości cząsteczek w gazie



- Prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki o zerowej prędkości jest małe; podobnie dla bardzo dużych prędkości

- Maksimum rozkładu występuje dla szybkości zbliżonej do średniej

Rozkład Boltzmannna

Rozkład Maxwella jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej zasady:

Prawdopodobieństwo, że pojedyncza cząsteczka ze zbioru cząsteczek w równowadze w temperaturze T ma energię E jest proporcjonalna do:

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

czynnik Boltzmannna

Energia E może być funkcją prędkości cząsteczki (energia kinetyczna dla punktów materialnych), ale może zawierać energię rotacyjną ($E=I\omega^2/2$) lub oscylacyjną ($E=kx^2/2$) dla cząsteczek o określonym kształcie.

Rozkład Boltzmannna

Dla gazu w równowadze, możemy rozważać liczbę cząsteczek (lub gęstość) o energiach w przedziale od E do $E+dE$.

Cząsteczki wymieniają energię w zderzeniach.

$$n(E) = n(0) \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

$n(0)$ jest stałą

Całkowita ilość (lub gęstość) molekuł wynosi: $n = \sum n(E)$

sumowanie występuje po wszystkich możliwych energiach

- Fermiego-Diraca dla fermionów
- Bosego-Einsteina dla bozonów

Najbardziej zadziwiająca własności mikroświata jest **nierozróżnialność** cząstek. W skali atomowej nie można rozróżnić składników tego samego rodzaju np. dwóch elektronów. Każdy elektron ma taką samą masę, ładunek, spin.

Spektroskopia dostarcza dowodów, że nawet jeżeli istnieje nieskończona liczba stanów wzbudzonych dla atomu wodoru, to wszystkie atomy wodoru mają taki sam zestaw stanów wzbudzonych i takie samo widmo emisyjne.

Nierozróżnialność cząstek

Identyczne cząstki znajdują się w polu o tym samym potencjale (w przeciwnym przypadku można by jej rozróżnić). Przy braku oddziaływania pomiędzy cząstkami:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N) = V(x_1) + V(x_2) + \dots + V(x_N)$$

Z tych samych powodów istnieją dwie klasy funkcji niezależnych od czasu: symetryczne u_S i antysymetryczne u_A


Dla układu dwóch cząstek:

$$u_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{N_S}} [u_m(x_1)u_n(x_2) + u_m(x_2)u_n(x_1)]$$

$$u_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{N_S}} [u_m(x_1)u_n(x_2) - u_m(x_2)u_n(x_1)]$$

Nierozróżnialność cząstek

Symetryczne funkcje falowe są niezmiennicze względem zamiany cząstek i opisują bozony:

$$u_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{N_S}} [u_m(x_1)u_n(x_2) + u_m(x_2)u_n(x_1)]$$



$$u_S(x_2, x_1) = +u_S(x_1, x_2)$$

Bozonami są cząstki, których całkowity moment pędu z uwzględnieniem spinu jest liczbą całkowitą.

Bozonami są: foton, cząstka α , atom wodoru.

Nierozróżnialność cząstek

Antysymetryczna funkcja falowa zmienia znak przy zamianie cząstek i ma zastosowanie do fermionów:

$$u_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{N_S}} [u_m(x_1)u_n(x_2) - u_m(x_2)u_n(x_1)]$$


$$u_S(x_2, x_1) = -u_S(x_1, x_2)$$

Fermionami są cząstki, których całkowity moment pędu z uwzględnieniem spinu wynosi $1/2, 3/2, 5/2$

Fermionami są: elektron, proton, neutron.

Zakaz Pauliego

Wolfgang Pauli (1900-1958), sformułował tę zasadę w 1925 r.

W atomie wieloelektronowym w tym samym stanie kwantowym może znajdować się co najwyżej jeden elektron.

Później stwierdził, że zakaz ten reprezentuje ogólną własność elektronów, a nie tylko elektronów w atomach.

Uogólniony zakaz Pauliego (**symetria wymiany**):

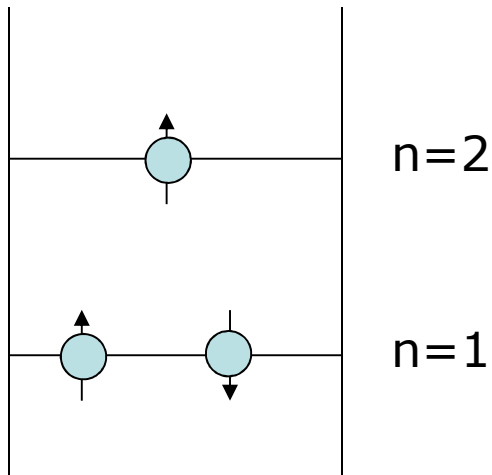
Funkcja falowa układu wielu cząstek jest antysymetryczna ze względu na zamianę dwóch identycznych fermionów i symetryczna ze względu na zamianę dwóch identycznych bozonów.



Dwa identyczne fermiony nie mogą być w tym samym stanie kwantowo-mechanicznym (nie mogą mieć jednakowych wszystkich liczb kwantowych z uwzględnieniem spinu).

Konsekwencje zakazu Pauliego

Elektrony w nieskończonej studni potencjału



Poziom energetyczny $n=1$ odpowiada najniższej energii i jest stanem podstawowym pojedynczego elektronu.

Uwzględniając spin, można umieścić *dwa* elektrony w każdym stanie o danym n ($n=1$), jeden elektron o spinie „do góry”, i jeden o spinie „w dół”. Trzeci elektron musi znaleźć się na poziomie o $n=2$ na podstawie zakazu Pauliego.

Zakaz ten odgrywa istotną rolę w budowie atomów, cząsteczek i jąder oraz w technologii urządzeń półprzewodnikowych i laserów. Metale zawierają wiele „swobodnych” elektronów. Występowanie wielu identycznych cząstek nazywamy *materiał zdegenerowaną*.

Konsekwencje zakazu Pauliego

Przykłady degeneracji

W fizyce spotykamy się z tym zjawiskiem dla metalach. Elektrony walencyjne w metalu zachowują się jak zdegenerowany system fermionów w niskich temperaturach. To zachowanie tłumaczy wiele doświadczalnie obserwowanych własności metali: przewodnictwa cieplnego, przewodnictwa elektrycznego i ich zależności temperaturowych.

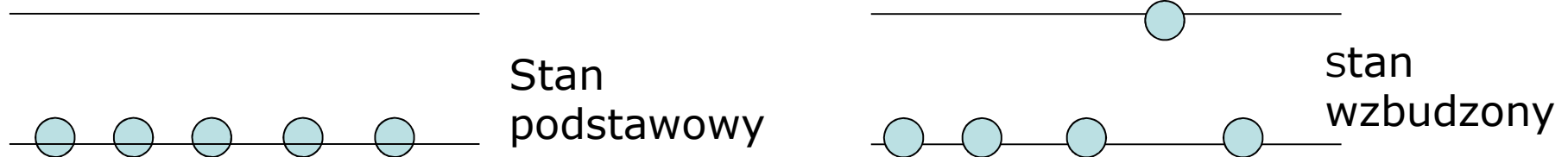
Przeciwdziałanie ścisłaniu (ciśnienie kompresji), będące konsekwencją zakazu Pauliego odgrywa istotną rolę w astrofizyce tłumacząc ewolucje gwiazd (mechanizm powstawania białych karłów, gwiazd neutronowych i czarnych dziur)

Energia Fermiego

Energia Fermiego ma zastosowanie do fermionów i jest konsekwencją zakazu Pauliego.

Przypadek 1D dla nieskończonej studni potencjału

N bozonów – nie stosuje się zakaz Pauliego.



N bozonów zajmuje poziom $n=1$

Całkowita energia stanu podstawowego:

$$E_g = NE_1$$

średnia energia na cząsteczkę:

$$\frac{E_g}{N} = E_1$$

W pierwszym stanie wzbudzonym N-1 bozonów zajmuje poziom $n=1$ i jeden bozon jest w stanie $n=2$.

Energia stanu wzbudzonego

$$E^* = (N-1)E_1 + E_2$$

Energia Fermiego

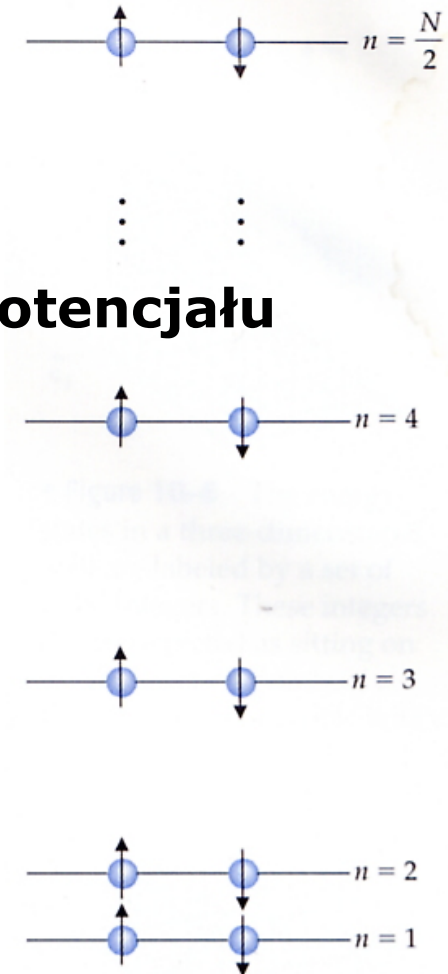
Energia Fermiego E_F jest ważnym parametrem struktury elektronowej półprzewodników i metali.

Jest zdefiniowana jako energia najwyższego poziomu energetycznego wypełnionego elektronami w stanie podstawowym .

Przypadek 1D dla nieskończonej studni potencjału

Z powodu zakazu Pauliego nie można umieścić wszystkich N -fermionów (elektronów) w jednym stanie. Wszystkie poziomy do $n=N/2$ są obsadzone w stanie podstawowym. Biorąc pod uwagę fakt, że energie pojedynczych elektronów $E_n=n^2E_1$, energia N -cząstek w stanie podstawowym wynosi:

$$E_g = E_1 \left[2(1^2) + 2(2^2) + \dots + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 \right] = 2E_1 \sum_{j=1}^{N/2} j^2$$



Energia Fermiego

Suma może zostać obliczona jako $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

dla dużych n przybliżamy jako $n^3/3$

Gdy n jest duże i równe $N/2$: $E_g \approx \frac{N^3}{24}$

Średnia energia na cząstkę w stanie podstawowym: $\frac{E_g}{N} \approx \frac{N^2}{12} E_1$

W przypadku bozonów średnia energia przypadająca na cząsteczkę była stała, dla fermionów rośnie ona z liczbą cząstek jak N^2

Przy konstrukcji stanu podstawowego o N fermionach, najwyższy zajęty poziom energetyczny, czyli energia Fermiego E_F odpowiada $n=N/2$ i w przypadku jednowymiarowym wynosi:

$$E_F = \frac{\pi^2 \hbar^2 N^2}{8mL^2}$$

Energia Fermiego

Przypadek trójwymiarowy

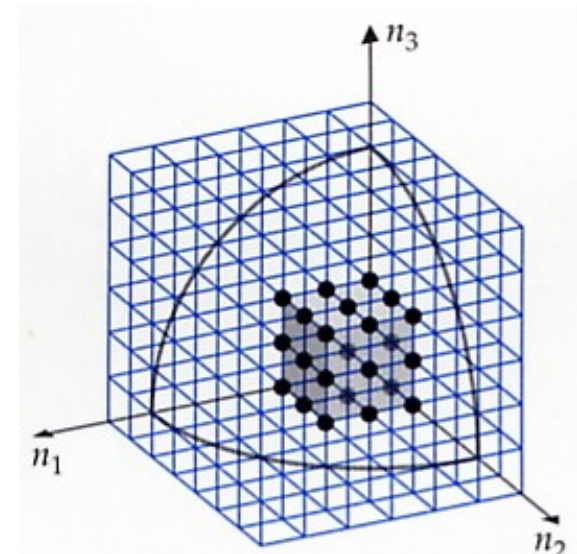
Wyliczamy wszystkie możliwe stany energetyczne pojedynczej cząstki w trójwymiarowej nieskończonej studni, którą tworzy sześcian o długości boku L .

Energia pojedynczej cząstki w 3D jest sumą energii dozwolonych w każdym kierunku:

$$E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = E_1 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Dozwolone stany energetyczne odpowiadają każdej trójce liczb całkowitych (n_1, n_2, n_3)

Możliwość wystąpienia degeneracji energetycznej jest podstawową różnicą pomiędzy przypadkiem trójwymiarowym a jednowymiarowym.



Energia Fermiego

Przypadek trójwymiarowy

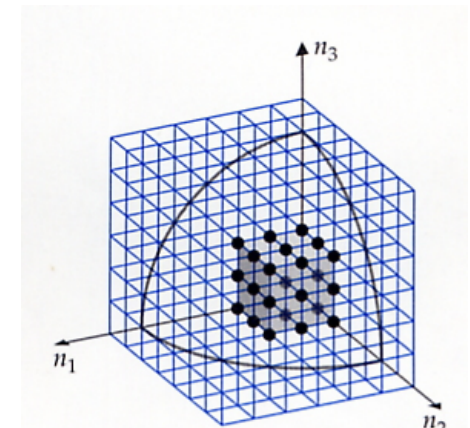
Mając N fermionów (N jest duże) wypełniamy poziomy energetyczne w sześcianie (2 fermiony w danym stanie) zaczynając od najniższej energii. Energia ostatniego fermionu, który umieścimy w strukturze energetycznej będzie energią Fermiego E_F

Jaka jest liczba stanów o energii mniejszej od pewnej ustalonej wartości E ?



Ile jest takich trójek liczb całkowitych n_1, n_2, n_3 , które spełniają warunek:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \frac{E}{E_1}$$

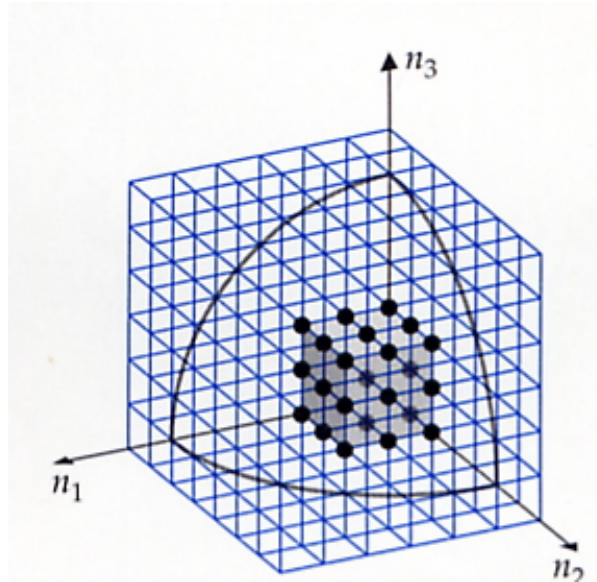


Jak będziemy to wiedzieć, to przyjmiemy, że liczba stanów jest równa $N/2$ co odpowiadać będzie $E = E_F$

Energia Fermiego

Przypadek trójwymiarowy

Trójki liczb całkowitych (n_1, n_2, n_3) przedstawiamy graficznie jako punkty w sieci regularnej (sześcián)



Dla dużej liczby N (oraz E_F) zakładamy, że: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq R^2$

gdzie R jest promieniem kuli Fermiego

$$R^2 = \frac{E_F}{E_1}$$

Energia Fermiego

Przypadek trójwymiarowy

Każdy punkt sieci sześciiennej jest oddalony od kolejnego punktu wzdłuż jednej osi o odległość jednostkową. Sieć jest utworzona z sześcianów o jednostkowej objętości. Liczbę punktów sieci można obliczyć porównując z objętością kuli Fermiego.

$$\frac{N}{2} = \frac{1}{8} \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{E_F}{E_1} \right)^{3/2}$$

Ostatecznie:

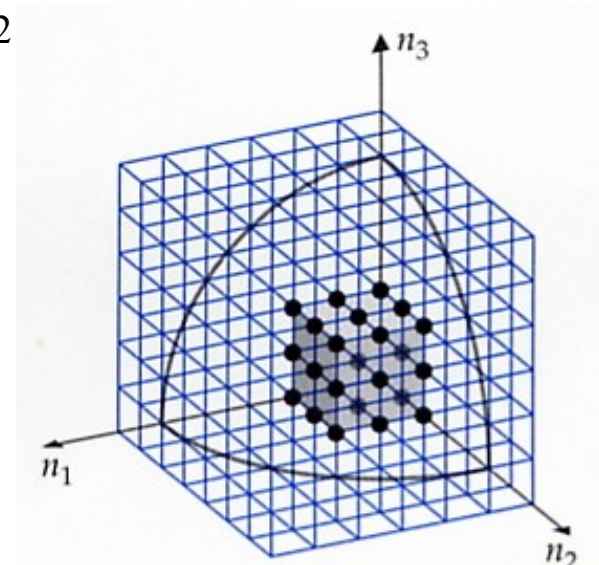
$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{L^3} \right)^{2/3}$$

Definiując gęstość lub koncentrację elektronów:

$$n_f = N / L^3$$

otrzymujemy:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 n_f \right)^{2/3}$$



tylko dodatnie n więc
1/8 objętości

Energia Fermiego

Przypadek trójwymiarowy

Wielkość momentu pędu elektronu dla energii Fermiego (pęd Fermiego)

$$p_F = \sqrt{2mE_F} = \hbar(3\pi^2 n_f)^{1/3}$$

Długość fali de Broglie odpowiadająca pędowi Fermiego wynosi:

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F} = 2 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/3} \underbrace{n_f^{-1/3}}$$

średnia odległość między fermionami a

Najmniejsza odległość na jaką mogą się zbliżyć dwa fermiony jest w przybliżeniu równa połowie długości fali de Broglie'a odpowiadającej energii Fermiego:

$$a \cong \frac{\lambda_F}{2}$$

Założenia:

- cząstki są nierozróżnialne
- cząstki nie oddziałują ze sobą
- spełniony jest zakaz Pauliego

w jednym stanie energetycznym opisanym przez zespół liczb kwantowych może znajdować się jedna cząstka (dwie ze względu na spinową liczbę kwantową)

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Rozkład Fermiego-Diraca

Średnia liczba $N(E)$ cząstek o spinie $1/2$ o danej energii E jest dana wzorem:

$$N(E) = 2n(E) = \frac{2}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1}$$

Aby wyjaśnić znaczenie fizyczne stałych β i μ trzeba rozważyć znane przypadki szczególne.

W granicy dużych energii, rozkład musi przechodzić w rozkład klasyczny Boltzmann. Dla bardzo dużych energii E , średnie obsadzenie poziomów jest tak małe, że wpływ drugiej cząstki a zatem i zakaz Pauliego nie odgrywają dużego znaczenia. Zatem:

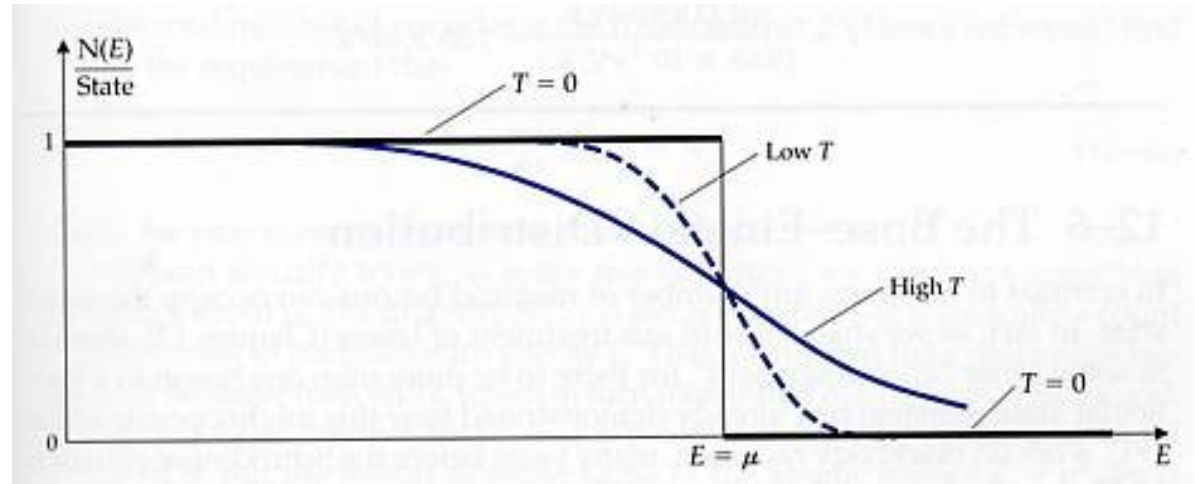
$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Rozkład Fermiego-Diraca

dla różnych temperatur T

$$N(E) = \frac{2}{\exp[\beta(E - \mu)] + 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$



W niskich temperaturach czyli dla $\beta \rightarrow \infty$, $N(E)$ może przyjąć tylko dwie wartości. Jeżeli $E > \mu$ to $N(E) = 0$, jeżeli $E < \mu$ to $N(E) = 2$.

Jest to zgodne z oczekiwaniami dla dużej liczby fermionów w stanie podstawowym: dwa elektrony dla każdej energii do poziomu Fermiego i zero elektronów powyżej energii Fermiego E_F . Dlatego utożsamiamy μ z E_F :

$$\mu = E_F$$

Rozkład Fermiego-Diraca

$$N(E) = \frac{2}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

Przyjmując: i – liczba poziomów (przedziałów energii),

n_i – liczba cząstek na i -tym poziomie, g_i – liczba dostępnych stanów, E_i – energia i -tego stanu, N – całkowita liczba cząstek, E – całkowita energia układu N cząstek w danej temperaturze T

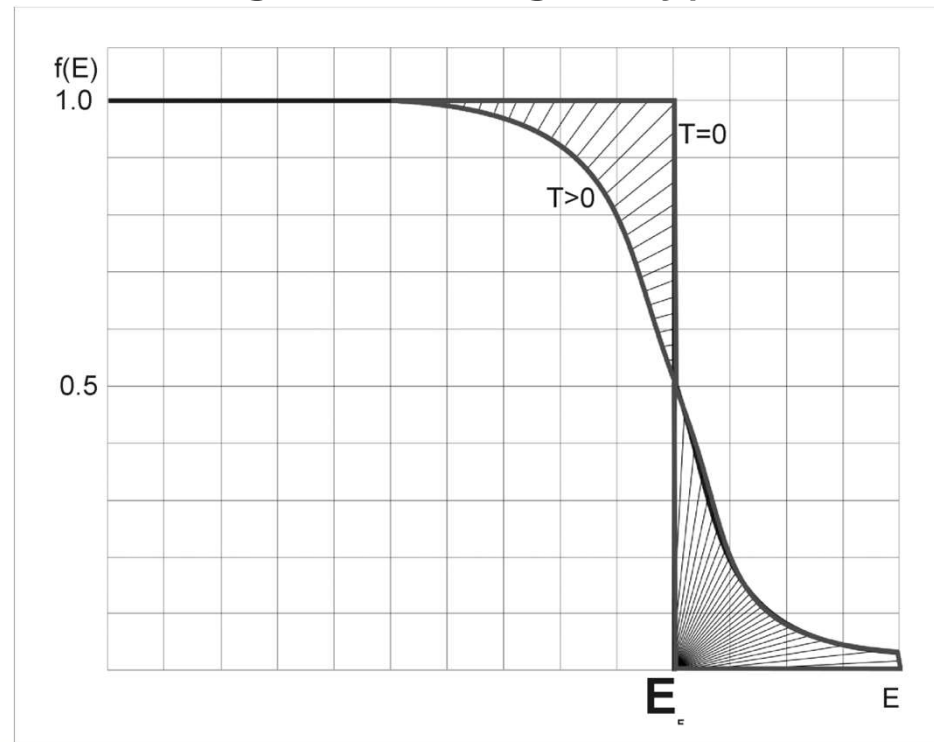
$$f_i(E) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_i - E_F}{k_B T}\right)}$$

funkcja rozkładu Fermiego-Diraca

Rozkład Fermiego-Diraca

Interpretacja energii Fermiego:

W temperaturze $T=0\text{K}$ poziom energii Fermiego jest to poziom **odcięcia**. Oznacza to, że wszystkie poziomy o energii mniejszej od energii Fermiego są na pewno obsadzone; natomiast poziomy o energii większej niż energia Fermiego są puste.



Rozkład Fermiego-Diraca

$$f_i(E) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_i - E_F}{k_B T}\right)}$$

a) przypadek $E < E_F$
 $T=0K$:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp(-\infty)} \Rightarrow 1$$

b) przypadek $E > E_F$
 $T=0K$:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp(+\infty)} \Rightarrow 0$$

Dla $T > 0$ oraz dla $E=E_F$ funkcja rozkładu $f(E_F) = 1/2$.

Rozkład Fermiego-Diraca

$$f_i(E) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_i - E_F}{k_B T}\right)}$$

Funkcja rozkładu Fermiego-Diraca określa prawdopodobieństwo obsadzenia poziomu E_i w temperaturze T

Celem opisu jest znalezienie odpowiedzi na pytanie jaki jest rozkład cząstek między różnymi poziomami E_i , tak aby energia całkowita była stała, czyli aby spełnione były warunki:

$$N = \sum_i n_i = \text{const}$$

$$E = \sum_i n_i E_i = \text{const}$$

Określmy funkcje gęstości stanów ρ_i , określa ona liczbę stanów w jednostkowym przedziale energii:

$$\rho_i = \frac{g_i}{\Delta E_i} \quad n_i = f_i g_i = f_i(E_i) \rho_i \Delta E_i$$

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(E) \rho(E) dE$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(E) E \rho(E) dE$$

Rozkład Bosego-Einsteina

Założenia:

- cząstki są nierozróżnialne
- cząstki nie oddziałują ze sobą
- nie jest spełniony zakaz Pauliego

Funkcja rozkładu Bosego- Einsteina ma postać:

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$

Rozkład Bosego-Einsteina

W przeciwieństwie do fermionów, dowolna liczba bozonów może znajdować się w tym samym stanie kwantowym. Występuje tendencja do gromadzenia się bozonów w danym stanie kwantowym.

Einstein przewidział to zjawisko w pracy o promieniowaniu ciała doskonale czarnego (1917), na wiele lat przed sformułowaniem równania Schrödingera i zanim pojawiła się koncepcja symetrycznych funkcji falowych. Einstein pokazał, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu zawierającego n fotonów do stanu zawierającego $n+1$ fotonów jest proporcjonalne do $n+1$.

Rozkład Bosego-Einsteina

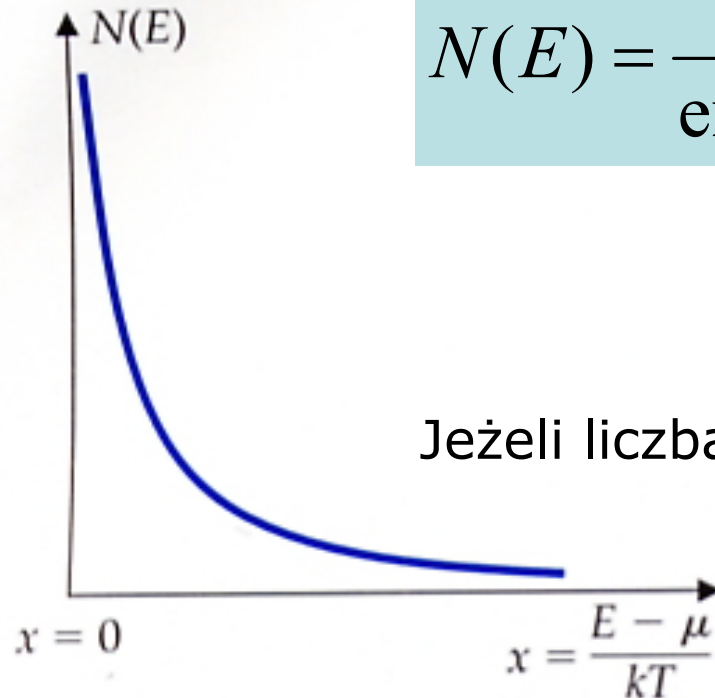
$$N(E) = \frac{2s + 1}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$N = \sum N(E)$$

Jeżeli liczba N bozonów ma być stała to:

$$\mu \leq 0$$

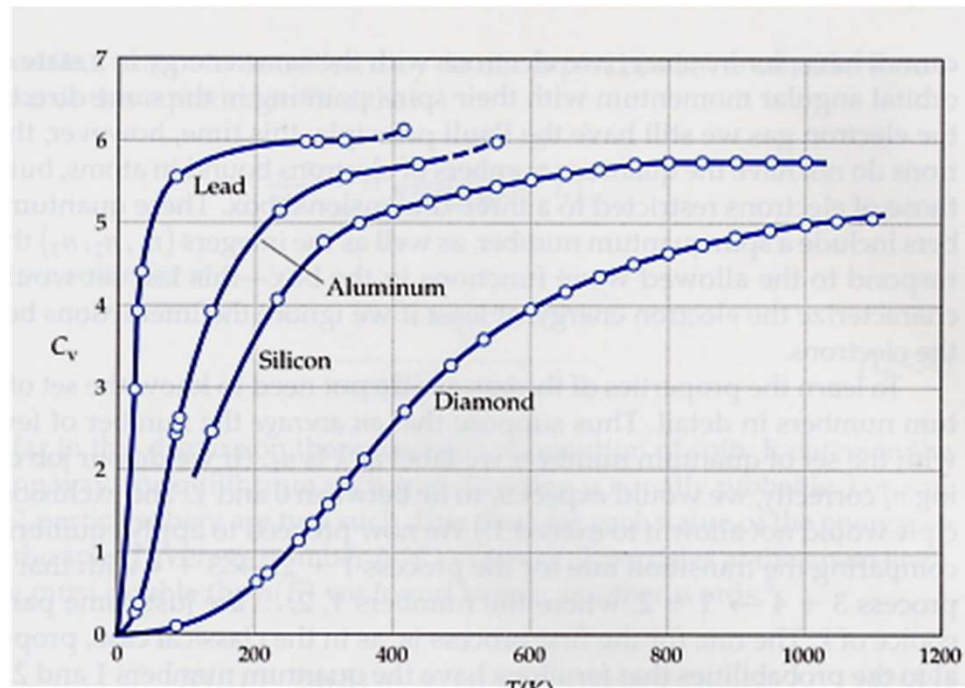


Dla fotonów $\mu=0$, bo ich liczba nie zawsze jest zachowana

Zastosowania teorii

Elektronowe ciepło właściwe dla metali

Prawo Dulonga i Petita przewiduje dla ciał stałych, że molowe ciepło właściwe w stałej objętości jest stałe i wynosi $c_v = 3R = 6 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$ gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Zależność od temperatury, dla niższych temperatur przewiduje teoria Debye'a (przyczynki atomowy, drgania sieci, fonony)



Zastosowania teorii

Elektronowe ciepło właściwe dla metali

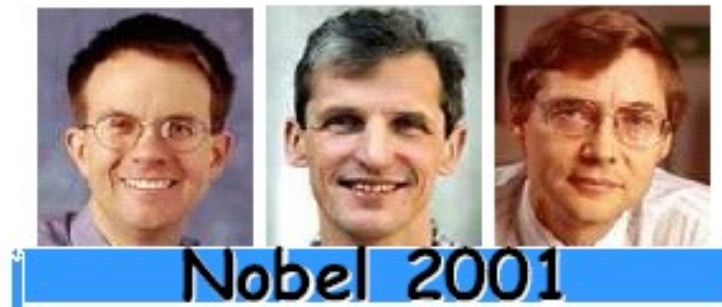
W metalach, elektrony wnoszą przyczynek do ciepła właściwego tylko w niskich temperaturach a w normalnych temperaturach przyczynek elektronowy jest zbyt mały w porównaniu z wkładem atomowym aby ten efekt zaobserwować. Dzieje się tak dlatego, że tylko część elektronów (o energii bliskiej energii Fermiego) bierze udział w przewodnictwie. Jest to całkowicie kwantowy efekt.

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F}$$

T_F -temperatura Fermiego jest rzędu 60 000 K

Kondensacja **Bosego-Einsteina**

Gdy temperatura spada poniżej temperatury krytycznej T_c coraz większa liczba bozonów „kondensuje” do stanu podstawowego. W temperaturze zera bezwzględnego wszystkie cząstki kondensują do stanu podstawowego. Ten efekt, który występuje nawet gdy nie występuje bezpośrednie oddziaływanie między bozonami, nazywa się kondensacją **Bosego-Einsteina**.



Cornell, Ketterle, Weiman

Zastosowania Nadciekłość helu

W 1908, Heike Kamerlingh Onnes skroplił hel w temperaturze 4.2 K. W 1928 Willem Hendrik Keesom odkrył, że w $T_c=2.17$ K występuje przejście do nowej fazy helu.

Własności nowej fazy:

- Ciekły hel wrze gdy jest oziębiany powyżej T_c . Gdy temperatura spada poniżej T_c , wrzenie ustaje.
- Powyżej T_c ciekły hel zachowuje się jak każdy lepki płyn. Poniżej T_c przepływ przez wąskie kanały nie napotyka na przeszkody jakby lepkość ciekłego helu była zerowa.
- Poniżej T_c ciekły hel „wspina” się po ścianach naczynia; tworzy fontanny

Zastosowania Nadciekłość helu

W temperaturze T_c atomy helu zaczynają tworzyć kondensat. Dokładnie w temperaturze T_c udział atomów w kondensacie jest mały. Gdy T maleje do zera, udział ten wzrasta do jedności. Kondensat wykazuje **nadciekłość**.

Poniżej T_c można potraktować hel jako mieszaninę dwóch cieczy:

- normalnej
- nadciekłej

Względna gęstość zmienia się z temperaturą pomiędzy $T=0$ i $T=T_c$.