

POLE MAGNETYCZNE

ŹRÓDŁA POLA MAGNETYCZNEGO

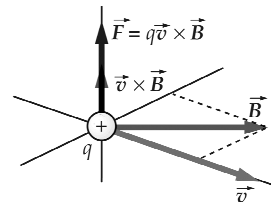
Wykład 2

lato 2011

1

Definicja wektora indukcji pola
magnetycznego

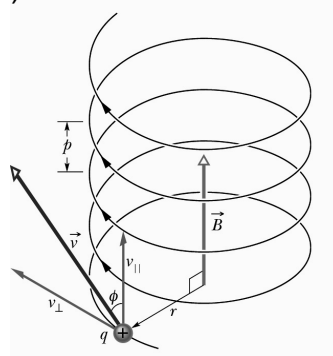
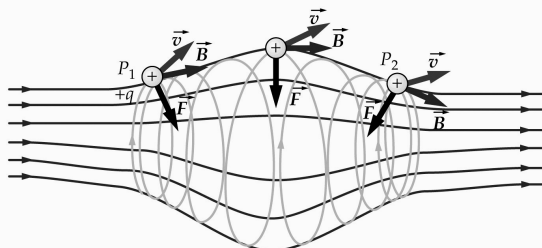
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



Jednostką indukcji pola B jest 1T (tesla)

$$1\text{T} = 1\text{N/Am}$$

Pole magnetyczne zakrzywia tor
ruchu ładunku elektrycznego.



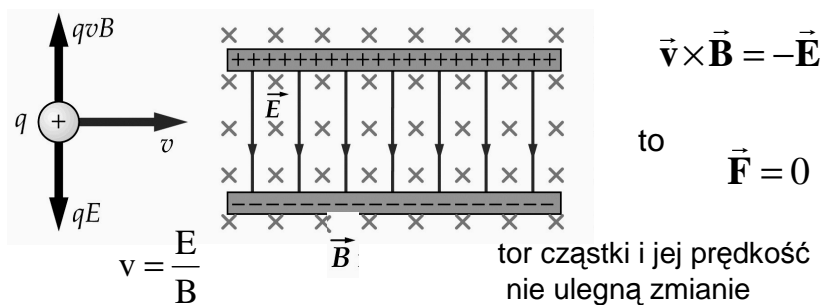
2

Siła Lorentza

- Siła działająca na ładunek w obszarze, w którym występują jednocześnie pole elektryczne i magnetyczne

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

Ruch w skrzyżowanych polach, tj. gdy $\vec{B} \perp \vec{E}$ jeżeli



Wykład 2

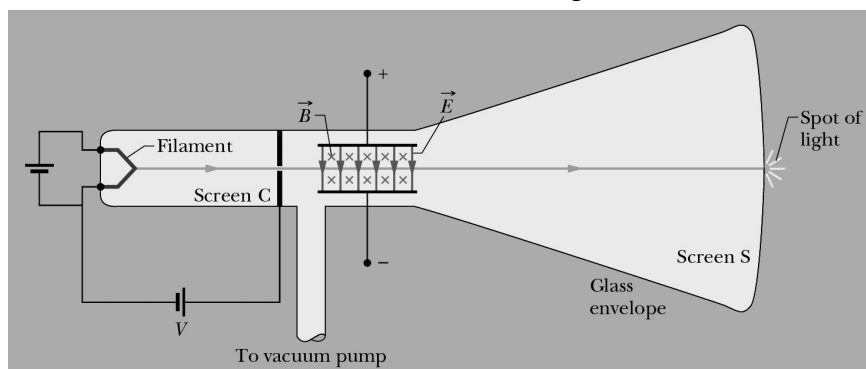
lato 2011

3

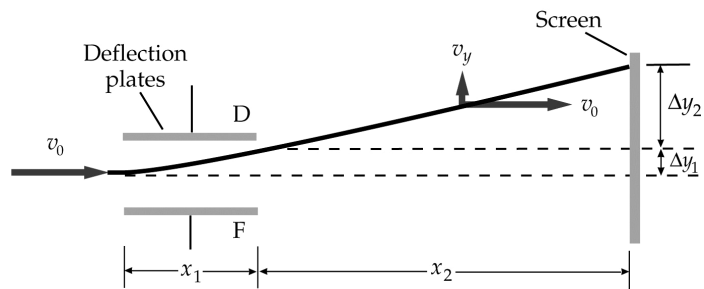
Doświadczenie Thomsona

- 1897 r. J.J. Thomson, Cambridge, wyznaczył q/m dla elektronu, odkrycie elektronu

$$\frac{q}{m} = 17,56 \cdot 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$



Zadanie 2.1



Wiązka elektronów przechodzi bez odchylenia przez lampę oscyloskopową kiedy natężenie pola elektrycznego wynosi 3000 V/m , a indukcja skrzyżowanego z nim pola magnetycznego wynosi $1,4 \text{ Gs}$; $1 \text{ Gs (gauss)} = 10^{-4} \text{ T}$. Długość płytek odchylających wynosi 4 cm , a odległość od końca płytek do ekranu wynosi 30 cm . Znajdź odchylenie wiązki na ekranie przy wyłączonym polu magnetycznym

Wykład 2

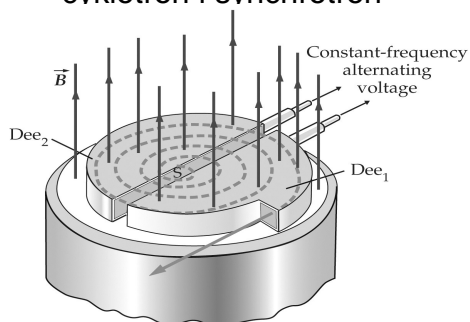
lato 2011

5

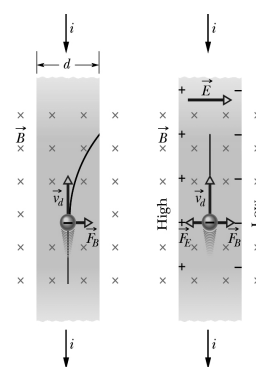
Zadanie 2.2

Na podstawie podręcznika HRW, t.3 lub innych źródeł opracować dwa tematy:

- cyklotron i synchrotron



- zjawisko Halla



Podać przykłady praktycznego wykorzystania

Wykład 2

lato 2011

6

Definicja natężenia prądu

$$i = \frac{dq}{dt}$$

- ❑ Natężenie prądu jest skalarem
- ❑ Jednostką natężenia prądu jest $1\text{A}=1\text{C/s}$
(ale to nie jest definicja tej jednostki!)
- ❑ Umownie przyjmuje się, że prąd płynie tak jakby był to ruch ładunków dodatnich. W rzeczywistości prąd w metalu stanowią elektrony przewodnictwa

Wykład 2

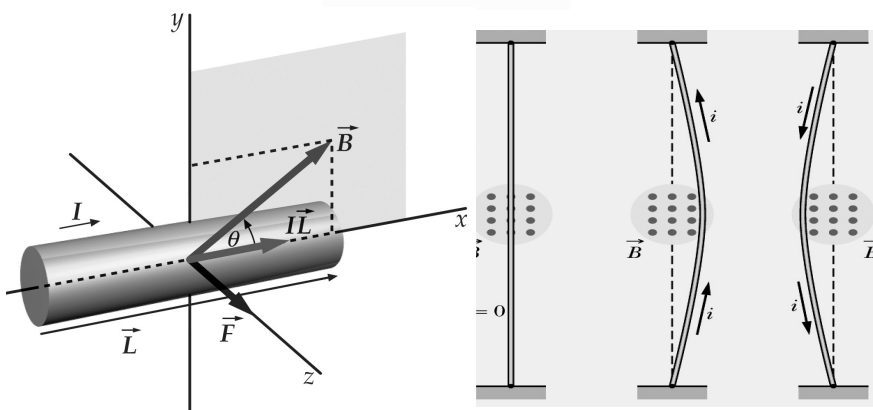
lato 2011

7

Siła elektrodynamiczna

Siła działająca na przewodnik, przez który płynie prąd

$$\vec{F} = i(\vec{I} \times \vec{B})$$



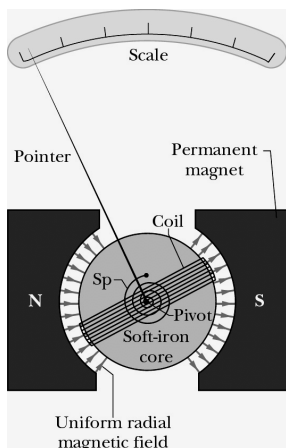
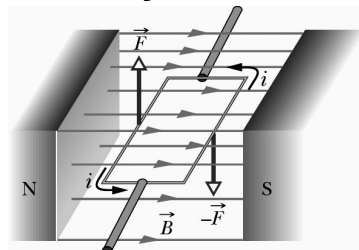
Wykład 2

lato 2011

8

Zastosowania siły elektrodynamicznej

- Silnik elektryczny – ramka z prądem w polu magnetycznym



- Analogowe mierniki – woltomierz, amperomierz, galwanometr

Na ramkę z prądem w zewnętrznym polu magnetycznym działa moment siły

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{\mu}$ – moment magnetyczny

Przypomnienie: dla dipola elektrycznego

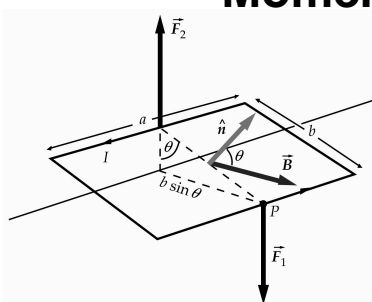
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Wykład 2

lato 2011

9

Moment magnetyczny



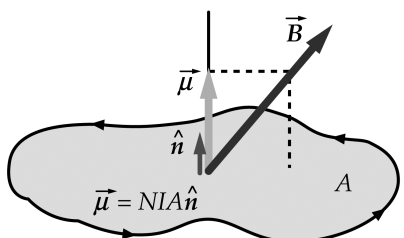
Pod wpływem momentu siły ramka ustawia się prostopadle do kierunku wektora indukcji pola magnetycznego, tak aby $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$

Moment magnetyczny definiowany jest dla każdego zamkniętego obwodu, przez który płynie prąd I:

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}$$

liczba zwojów

pole powierzchni



wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni A

Wykład 2

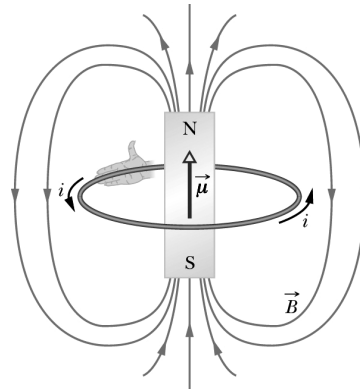
lato 2011

10

Dipol magnetyczny

Moment magnetyczny charakteryzuje każdy dipol magnetyczny. Dipolem magnetycznym jest nie tylko ramka (pętla, cewka), przez którą płynie prąd lecz również:

- magnes sztabkowy ($\mu \approx 5 \text{ J/T}$)
- Ziemia (w przybliżeniu) $\mu \approx 8,0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$
- większość cząstek elementarnych, np. elektron ($\mu \approx 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$), proton ($\mu \approx 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$), neutron



Wykład 2

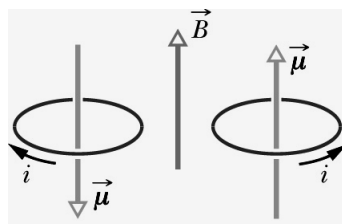
lato 2011

11

Energia potencjalna E_p dipola magnetycznego z zewnętrznym polu magnetycznym:

$$E_p = -\vec{\mu} \circ \vec{B}$$

najwyższa energia E_p



najniższa energia E_p

Przypomnienie: dla dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym

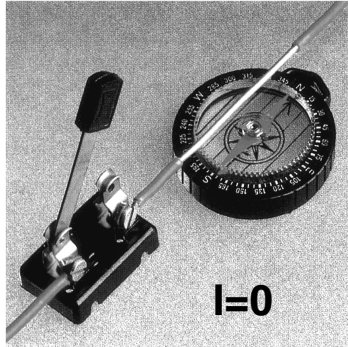
$$E_p = -\vec{p} \circ \vec{E}$$

Wykład 2

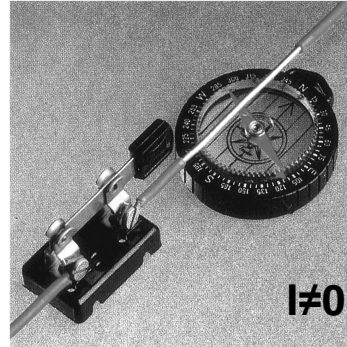
lato 2011

12

Prąd elektryczny jako źródło pola magnetycznego - doświadczenie Oersteda (1819-1820)



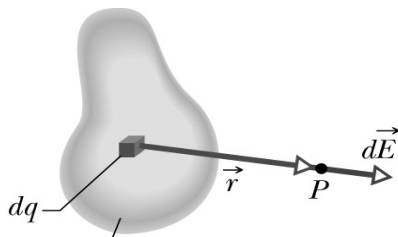
Kiedy przez przewodnik nie płynie prąd, igła ustawia się wzdłuż kierunku pola magnetycznego ziemskiego



Kiedy przez przewodnik płynie prąd, igła odchyła się od kierunku pola magnetycznego Ziemi.
Dlaczego?

13

PRAWO BIOTA-SAVARTA



Rozkład ładunku

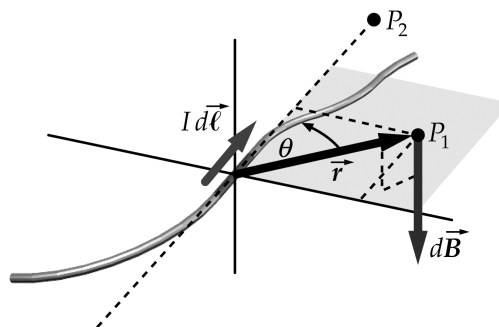
Prawo Coulomba

Zasada superpozycji

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Prawo Biota-Savarta

Zasada superpozycji



Wykład 2

14

Przykład 2.1

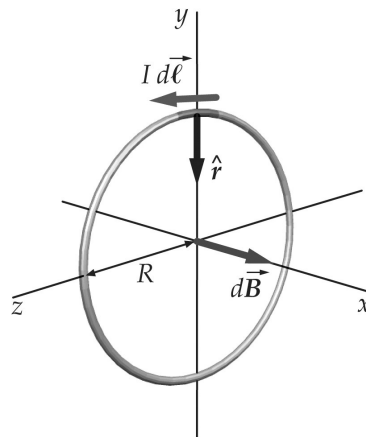
Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego w środku pętli o promieniu R , przez którą płynie prąd o natężeniu I .

Z prawa Biota-Savarta

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\theta}{4\pi R^2} \quad \theta = 90^\circ$$

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad 2\pi R$$



Wykład 2

lato 2011

15

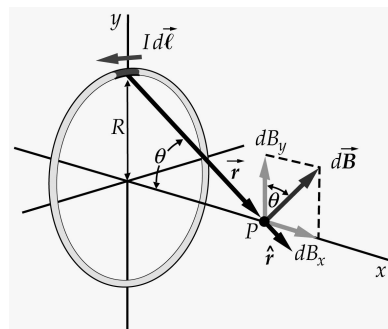
Zadanie domowe 2.3

Pokazać, że (a) wartość wektora indukcji pola magnetycznego w punkcie P na osi pętli z prądem wynosi

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(b) a w dużej odległości od środka pętli $x \gg R$

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi |x|^3}$$



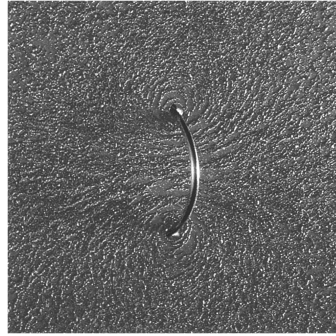
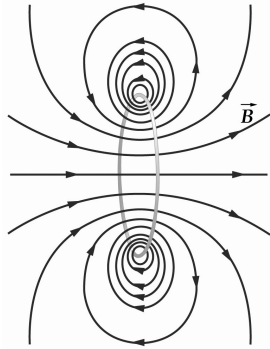
Wykład 2

lato 2011

16

Pętla z prądem zachowuje się jak dipol magnetyczny – wniosek z zadania 2.3

Pętla z prądem wytwarza pole magnetyczne jak dipol magnetyczny w dużych odległościach (pole magnetyczne zanika z odległością jak x^{-3} , podobnie jak dla dipola elektrycznego)



Wykład 2

lato 2011

17

Zadanie domowe 2.4

Pętla kołowa o promieniu $r=5$ cm ma 12 zwojów. Przez pętlę płynie prąd o natężeniu 4A. Układ odniesienia wybrano tak, że pętla leży w płaszczyźnie YZ ($x=0$) a początek układu odniesienia leży w środku pętli. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego na osi x dla:

- (a) $x=0$
- (b) $x=3$ cm
- (c) $x=15$ cm
- (d) $x=3$ cm w przybliżeniu dipolowym

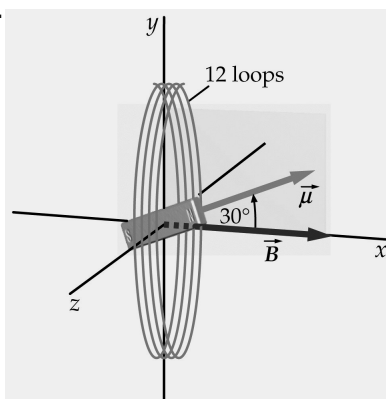
Wykład 2

lato 2011

18

Zadanie domowe 2.5

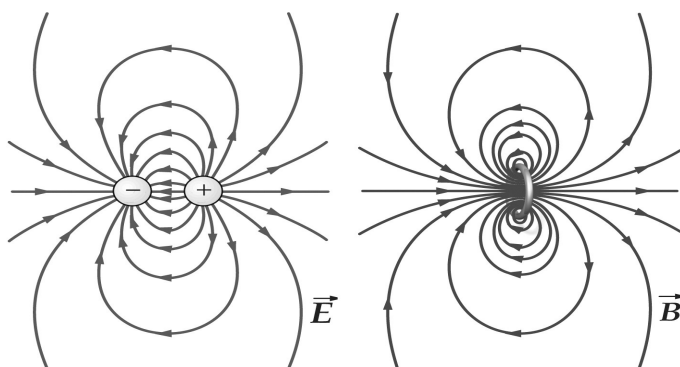
Mały magnes sztabkowy o momencie magnetycznym $\vec{\mu}$ jest umieszczony w środku pętli z poprzedniego zadania. Wektor momentu magnetycznego leży w płaszczyźnie XY i tworzy kąt 30° z osią OX. Znajdź wektor momentu siły działającego na magnes. Zaniedbać efekty związane ze zmianami pola magnetycznego w obszarze zajmowanym przez magnes.



Wykład 2

19

Pole magnetyczne a elektryczne -podobieństwa i różnice



Linie pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunku elektrycznym

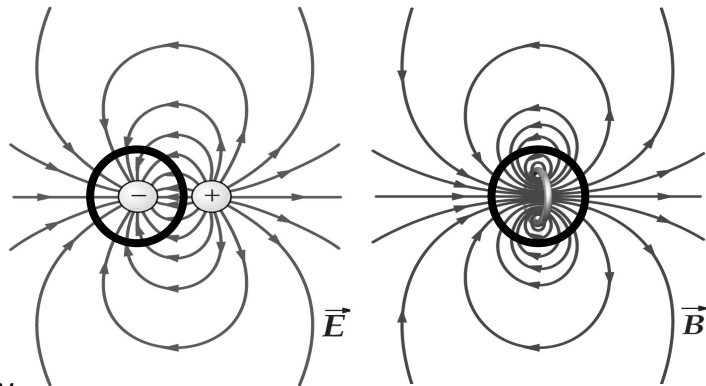
Linie pola magnetycznego tworzą zamknięte pętle. Na niczym się nie zaczynają i nie kończą

Wykład 2

lato 2011

20

PRAWO GAUSSA



Istnieje pojedynczy ładunek punktowy – monopol elektryczny

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{A} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Brak monopoli magnetycznych. Magnes czy pętla z prądem stanowią dipol magnetyczny

Wykład 2

lato 2011

21

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego jest jednym z równań Maxwella.

Jego treścią jest fakt, że pole magnetyczne jest bezźródłowe. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zero. Nie można wyodrębnić pojedynczego bieguna magnetycznego – nie istnieją monopole magnetyczne.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \circ d\vec{A} = 0$$

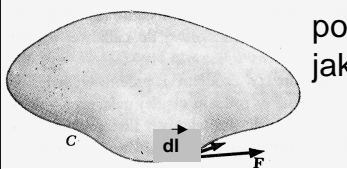
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Wykład 2

lato 2011

22

KRAŻENIE POLA WEKTOROWEGO



Krażenie (cyrkulacja) pola wektorowego \vec{F} po konturze zamkniętej jest zdefiniowane jako całka krzywoliniowa:

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \circ d\vec{l}$$

$d\vec{l}$ element drogi całkowania ma kierunek styczny do krzywej C w danym punkcie

Jeżeli \vec{F} jest siłą, to krażenie Γ ma sens fizyczny pracy.

Jeżeli \vec{F} jest siłą zachowawczą (pole elektrostatyczne, grawitacyjne), to $\Gamma=0$.

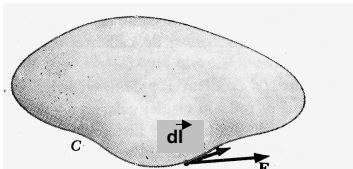
Krzywa C ogranicza pewną powierzchnię zamkniętą rozpiętą na tej krzywej.

Wykład 2

lato 2011

23

ROTACJA POLA



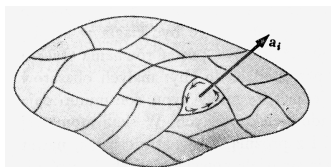
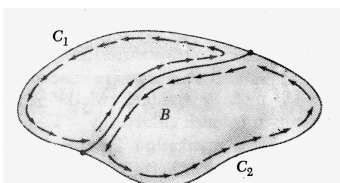
$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \circ d\vec{l}$$

Prowadząc krzywą B tworzymy dwa zamknięte kontury C_1 i C_2 takie, że:

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F} \circ d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F} \circ d\vec{l}$$

definicja operatora rotacji

$$(\text{rot } \vec{F}) \circ \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \circ d\vec{l}}{a_i}$$

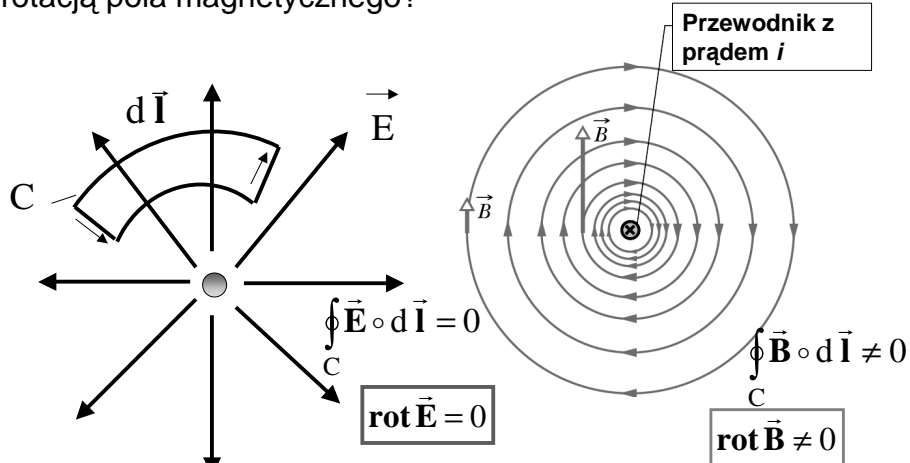


Wykład 2

lato 2011

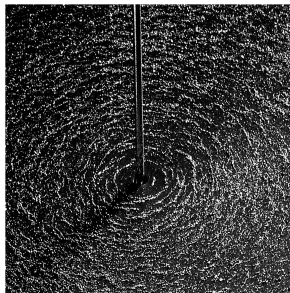
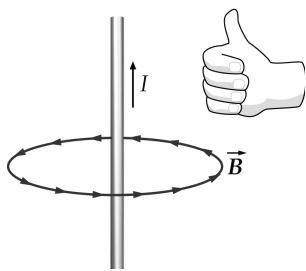
24

Pytanie: Pole elektrostyczne jest polem **bezwirowym** (rotacja pola jest równa zero w każdym jego punkcie). A co z rotacją pola magnetycznego?



Odpowiedź: Istotnie, pole magnetyczne jest polem wirowym. To określa prawo Ampère'a.

Prawo Ampère'a

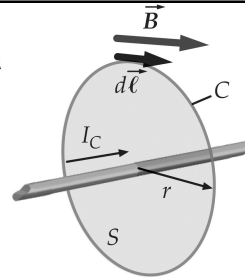


$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

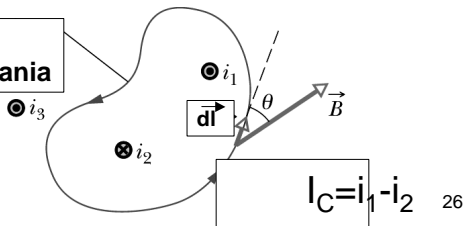
krążenie pola magnetycznego prąd wewnątrz konturu całkowania C

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni, stała uniwersalna

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$$



kontur całkowania



Twierdzenie Stokes'a

- Wiąże krążenie wektora po krzywej C z rotacją w punkcie, podobnie jak twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego wiązało strumień pola przez powierzchnię z dywergencją w punkcie

$$\oint_C \vec{F} \circ d\vec{l} = \underbrace{\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \circ d\vec{a}}$$

całka powierzchniowa, po powierzchni S ograniczonej krzywą C

- Prawo Ampère'a w postaci różniczkowej

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

↻
gęstość prądu

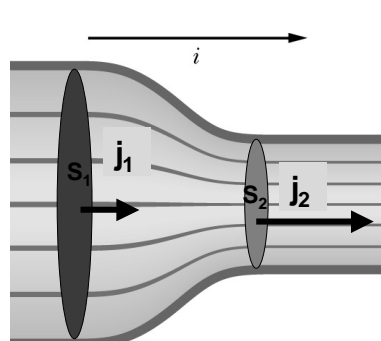
Wykład 2

lato 2011

27

Gęstość prądu

- Gęstość prądu jest to wektor, którego wartość równa jest natężeniu prądu przepływającemu przez element pola przekroju powierzchni na jednostkę pola tej powierzchni



$$j = \frac{di}{dS} \quad i = \int \overbrace{\vec{j} \circ d\vec{S}}^{\text{strumień}}$$

Wartość natężenia prądu pozostaje stała, zmienia się gęstość prądu – prawo ciągłości przepływu, zasada zachowania ładunku

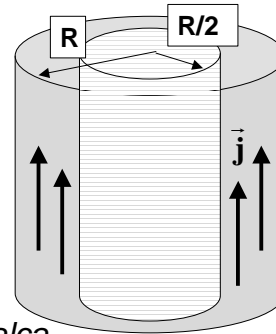
Wykład 2

lato 2011

28

Przykład 2-2

Gęstość prądu w przewodniku o kształcie walca o promieniu $R = 2 \text{ mm}$ jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i równa $j = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$. Ile wynosi natężenie prądu, przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika, w obszarze pomiędzy $R/2$ i R ?



Rozwiązanie:

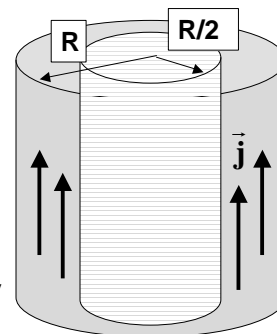
$i = jS'$ bo $j = \text{const}$ na całym przekroju walca

$$S' = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} R^2$$

Odpowiedź: $i = 1,9 \text{ A}$

Przykład 2-3

Założmy, że gęstość prądu w przewodniku o kształcie walca o promieniu $R = 2 \text{ mm}$ nie jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i zmienia się z odległością r od środka walca zgodnie ze wzorem $j = \alpha r^2$, gdzie $\alpha = 3 \cdot 10^{11} \text{ A/m}^4$. Ile wynosi natężenie prądu, przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika, w obszarze pomiędzy $R/2$ i R ?



Rozwiązanie:

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j dS = \int_{R/2}^R \alpha r^2 2\pi r dr$$

Odpowiedź:

$$i = \frac{15}{32} \pi \alpha R^4 \quad i = 7,1 \text{ A}$$

The diagrams show vector fields with different symmetries:

- a) Uniform field with a square region.
- b) Radial field pointing outwards from a central point with a square region.
- c) Radial field pointing inwards towards a central point with a square region.
- d) Field with a central vortex and a square region.
- e) Field with a central vortex and a square region, different orientation.
- f) Radial field pointing outwards from a central point with a square region.

Zadanie domowe 2.6

Cztery z przedstawionych pól wektorowych mają znikającą dywergencję w przedstawionym obszarze. Trzy z nich mają znikającą rotację. Czy możecie ocenić, które z pól mają omawiane własności?

31

Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wokół przewodnika prostoliniowego

$\vec{B} \parallel d\vec{l}$ $B = \text{const}$ na krzywej C
(kontur całkowania jest okręgiem)

krażenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu r

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = B \oint_C dl = 2\pi r B$$

Odpowiedź:

$$2\pi r B = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

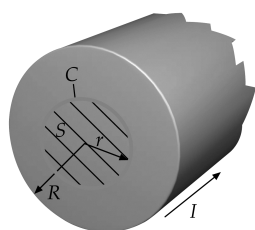
Wykład 2
lato 2011
32

Zadanie domowe 2.7

Ten sam rezultat można otrzymać poprzez żmudne całkowanie, korzystając z prawa Biota-Savarta. Proszę spróbować, aby móc docenić prawo Ampère'a. Odpowiednie obliczenia znajdziemy w Rozdz.30, &30.1 podręcznika HRW, t. 3.

Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wewnątrz przewodnika o promieniu R , przez który płynie prąd I ($r < R$)



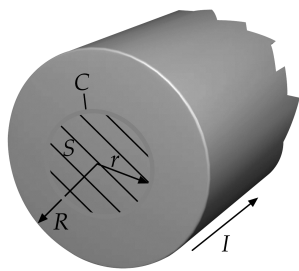
krążenie wektora indukcji magnetycznej po okręgu o promieniu r wyraża się tym samym wzorem dla $r < R$ i $r > R$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B$$

trzeba znaleźć natężenie prądu I_C wewnątrz konturu

gęstość prądu j jest stała

$$j = \frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$



$$j = \frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\downarrow$$

$$I_C = \frac{I}{R^2} r^2$$

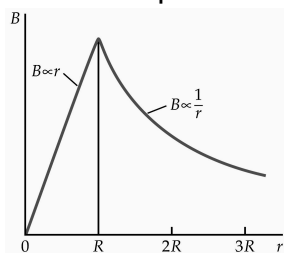
z prawa Ampère'a

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

$$2\pi B r = \mu_0 \frac{I}{R^2} r^2$$

Odpowiedź:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$



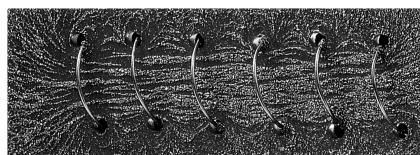
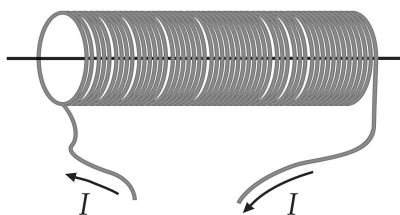
Wykład 2

lato 2011

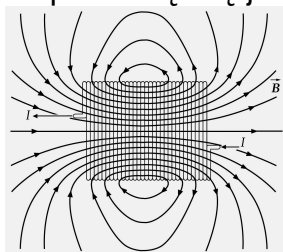
35

Zastosowania prawa Ampère'a

- pole magnetyczne wewnątrz solenoidu

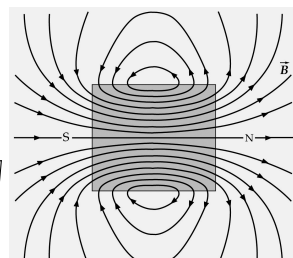


Solenoid wytwarza jednorodne pole magnetyczne i pełni podobną rolę jak kondensator płaski w elektrostatyce



solenoid

magnes
sztabkowy



lato 2011

36

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \circ d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \circ d\vec{l}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{Bh} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_0 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_0 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_0$$

dlaczego? $\vec{B} \parallel d\vec{l}$ $\vec{B} \perp d\vec{l}$ $B=0$ $\vec{B} \perp d\vec{l}$

pole jednorodne

Wykład 2 lato 2011 37

$$\oint_C \vec{B} \circ d\vec{l} = Bh = \mu_0 I_C$$

$$I_C = (nh)i$$

liczba zwojów na jednostkę długości natężenie prądu w uzwojeniu solenoidu

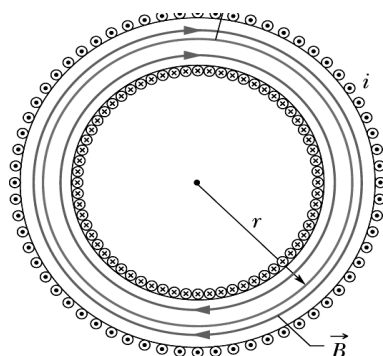
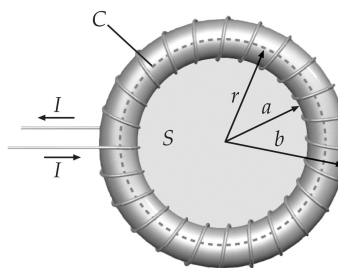
solenoid idealny $B = \mu_0 ni$

Wykład 2 lato 2011 38

Zadanie domowe 2.8

Toroid

Wykorzystać prawo Ampère'a do znalezienia wartości wektora indukcji wewnątrz toroidu, przez który płynie prąd o natężeniu I .



$$a < r < b$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r}$$

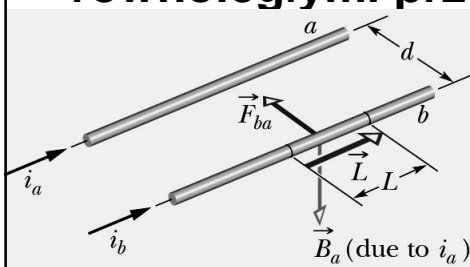
N - liczba zwojów toroidu

Wykład 2

lato 2011

39

Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem



Te przewody się przyciągają. Dlaczego?

pole magnetyczne wytworzone przez prąd i_a

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2 \pi d}$$

siła działająca na przewód z prądem i_b

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$$

Definicja ampera: 1A jest to natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu

$$F_{ba} = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2 \pi d}$$

40

Podsumowanie

- Ruch ładunku w polach magnetycznym i elektrycznym odbywa się pod wpływem siły Lorentza. Pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej lecz zakrzywia tor ładunku.
- Różnice pomiędzy polem elektrostatycznym i magnetycznym można prześledzić posługując się prawem Gaussa dla elektryczności i magnetyzmu. Nie istnieją monopole magnetyczne.
- Na przewodnik z prądem w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna.
- Ładunek w spoczynku wytwarza pole elektrostatyczne, ładunek w ruchu (prąd elektryczny) jest źródłem pola magnetycznego
- Wartość indukcji pola magnetycznego wytworzonego przez przewodnik z prądem można obliczyć korzystając z prawa Biot-Savarta lub prawa Ampère'a, które jednak stosujemy tylko do rozwiązywania problemów o wysokiej symetrii.