Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru (Guide to Expression of Uncertainty in Measurements-Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARU

http://physics.nist./gov/Uncertainty

Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999

H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999

A.Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, Skrypt Uczelniany SU 1642, Kraków 2002

1

POMIAR

Pomiary w laboratorium można podzielić na pomiary wielkości:

- prostych
- złożonych

Przykład 1: Pomiar długości nici przymiarem metrowym, pomiar okresu drgań wahadła – pomiary wielkości prostych – pomiary bezpośrednie

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego na podstawie wzoru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- pomiar wielkości złożonej

2

W trakcie pomiaru uzyskujemy **<u>wartości różniące się od przewidywań teorii.</u>** Źródłem rozbieżności między teorią i eksperymentem są **<u>niedoskonałości</u>**:

- **-osoby** wykonującej pomiar,
- **-przyrządów** pomiarowych,
- **-obiektów** mierzonych

Gdy doświadczenie staje się doskonalsze, rozbieżności te maleją. Maleje **błąd** pomiaru, **niepewność** pomiaru.

3

Wynik pomiaru jest zawsze obarczony błędem i po przeprowadzeniu odpowiedniej analizy błędów podajemy go w jednej z następujących postaci:

$$F = (98 \pm 3) \cdot 10^3 C$$

$$g = 9{,}866(28)\, m/s^2$$

Przykład 2: Załóżmy, że przy wyznaczaniu równoważnika elektrochemicznego pewnego pierwiastka uzyskaliśmy następujące liczby:

k=0,0010963 g/C

Δk=0,0000347 g/C

Jak podać wynik?

cyfry znaczące

cyfry nieznaczące

Odp. k= (0,00110   0,00004) g/C lub k= 0,00110(4) g/C

4

Niepewność a błąd pomiaru

Błąd bezwzględny pojedynczego pomiaru: $$\Delta x_i = x_i - x_0 \qquad (1)$$

x_i – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista

Błąd względny: $$\delta = \frac{\Delta x_i}{x_0} \qquad (2)$$

Uwaga: wartości rzeczywiście wielkości mierzonej zazwyczaj nie są znane

Niepewność

Wielkości określone wzorami (1) i (2) są pojedynczą realizacją zmiennej losowej i nie wchodzą do teorii niepewności. W praktyce nie znamy wartości rzeczywistych wielkości mierzonych i szacujemy **niepewności pomiarowe** wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów.

Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Niepewność *u* (ang. ***uncertainty***) posiada wymiar, taki sam jak wielkość mierzona

Symbolika: *u* lub *u*(*x*) lub *u*(stężenie NaCl)

Niepewność względna $u_r(x)$ to stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej:

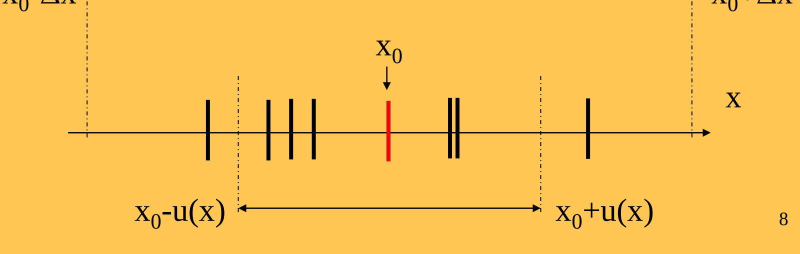
$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową i może być wyrażona w %

Niepewność

Istnieją dwie miary niepewności pomiaru:

- ❑ niepewność standardowa u(x)
- ❑ niepewność maksymalna Δx



Niepewność standardowa

Jest miarą dokładności pomiaru najpowszechniej stosowaną i uznawaną obecnie za podstawową.

1. Rezultat pomiaru jest zmienną losową x_i , której rozrzut wokół wartości średniej $\overline{x}$ charakteryzuje parametr zwany odchyleniem standardowym

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

2. Dokładnej wartości odchylenia standardowego nie znamy. Niepewność standardowa jest jego niezbyt dokładnym **oszacowaniem (estymatorem, oceną)**.

Niepewność maksymalna

W tym przypadku staramy się określić przedział

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x$$

w którym mieszczą się <u>wszystkie</u> wyniki pomiaru x_i, aktualnie wykonane i przyszłe.

Jest miarą deterministyczmą, gdyż zakłada, że można określić przedział wielkości mierzonej x, w którym <u>na pewno</u> znajdzie się wielkość rzeczywista.

Zaleca się obecnie niepewność maksymalną specyfikowaną przez producenta zamieniać na niepewność standardową wg wzoru:

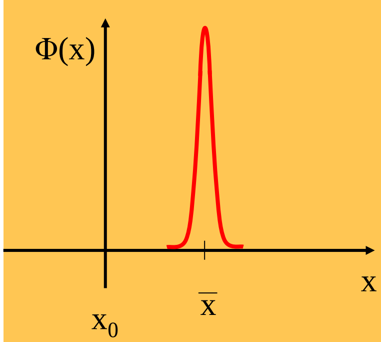
$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

Podział błędów

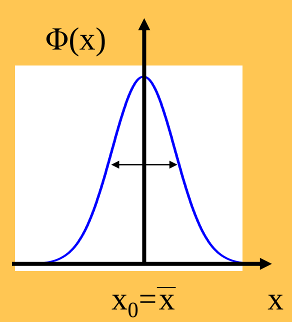
Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej. Z tego względu błędy dzielimy na:

- **Błędy grube** (pomyłki), które należy eliminować
- **Błędy systematyczne**, które można ograniczyć udoskonalając pomiar
- **Błędy przypadkowe**, które podlegają prawom statystyki i rachunku prawdopodobieństwa, wynikają z wielu losowych przyczynków i nie dają się wyeliminować

Krzywe rozkładu błędu



błąd systematyczny



błąd przypadkowy- rozkład Gaussa

Błędy grube: Są wynikiem pomyłki eksperymentatora np. przy odczytywaniu wartości mierzonych, przy przeliczaniu jednostek etc., nieprawidłowego stosowania przyrządu pomiarowego, poważnego i nieuświadomionego uszkodzenia przyrządu pomiarowego, zastosowania nieodpowiedniej metody pomiaru lub niewłaściwych wzorów teoretycznych do opracowania wyników. Fakt zaistnienia błędu grubego należy sobie jak najszybciej uświadomić a wynik obarczony takim błędem wykluczyć z dalszych analiz. Jeśli to możliwe, pomiar powtórzyć.

13

Błędy systematyczne zawsze w ten sam sposób wpływają na wyniki pomiarów wykonanych za pomocą tej samej metody i aparatury pomiarowej. Minimalna wartość błędu systematycznego jest określona dokładnością stosowanego przyrządu (lub klasą w przypadku analogowych mierników elektrycznych). Wprowadza się pojęcie działki elementarnej czyli wartość najmniejszej działki (odległość między sąsiednimi kreskami na skali przyrządu lub ułamek tej odległości określony klasą przyrządu), która określa dokładność odczytu.

14

Źródłem błędu systematycznego są: skale mierników (np. niewłaściwe ustawienie „zera”), nieuświadomiony wpływ czynników zewnętrznych (temperatura, wilgotność) na wartość wielkości mierzonej, niewłaściwy sposób odczytu (błąd paralaksy) lub pomiaru, przybliżony charakter wzorów stosowanych do wyznaczenia wielkości złożonej.

Błędy systematyczne czasami można ograniczyć wprowadzając poprawki, np.

$$F = 6\pi\eta v(1 + 2{,}4\frac{r}{R})$$

15

Błędy przypadkowe: występują zawsze w eksperymencie, lecz ujawniają się gdy wielokrotnie dokonujemy pomiaru przyrządem, którego dokładność jest bardzo duża a błędy systematyczne wynikające z innych przyczyn są bardzo małe. Wynikają one z własności obiektu mierzonego (np. wahania średnicy drutu na całej jego długości), własności przyrządu pomiarowego (np. wskazania przyrządu zależą od przypadkowych drgań budynku, fluktuacji ciśnienia czy temperatury, docisku dla suwmiarki), lub mają podłoże fizjologiczne (refleks eksperymentatora, subiektywność oceny maksimum natężenia dźwięku czy równomierności oświetlenia poszczególnych części pola widzenia)

16

Błędy przypadkowe zawsze towarzyszą eksperymentowi, nawet jeśli inne błędy zostaną wyeliminowane. W przeciwieństwie do błędu systematycznego, ich wpływ na wynik ostateczny pomiaru można ściśle określić.

17

Zadanie domowe-1

W pewnym eksperymencie wyznaczano przyspieszenie ziemskie g mierząc okres T i długość L nici wahadła matematycznego. Długość nici L zmieniano w pewnym zakresie i otrzymano następujące rezultaty:

Nr pomiaru	L (m)	T (s)
1	0,6	1,4
2	1,5	1,9
3	2,0	2,6
4	2,6	2,9
5	3,5	3,4

Jeden z wyników wyraźnie odbiega od pozostałych? O czym to świadczy?

18

Typy oceny niepewności wg nowej Normy

Typ A

Metody wykorzystujące statystyczną analizę serii pomiarów:

•wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru

• ma zastosowanie do błędów przypadkowych

Typ B

Opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności

•stosuje się gdy statystyczna analiza nie jest możliwa

•dla błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru

19

TYP A

20

Przykład 3 :

Seria wyników (próba) $x_1, x_2, \ldots .x_n$ obarczonych niepewnością przypadkową jest duża gdy $30<n\leq 100$. W próbie takiej wyniki się powtarzają: n_k jest liczbą pomiarów, w których wystąpił wynik x_k,

n_k/n jest częstością występowania wyniku

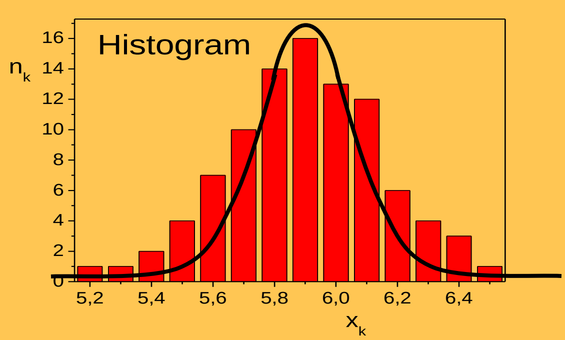
x_k	n_k	n_k/n
5,2	1	0,011
5,3	1	0,011
5,4	2	0,021
5,5	4	0,043
5,6	7	0,075
5,7	10	0,106
5,8	14	0,149
5,9	16	0,170
6,0	13	0,138
6,1	12	0,128
6,2	6	0,064
6,3	4	0,043
6,4	3	0,032
6,5	1	0,011
Suma	94	

Opracowanie serii pomiarów bezpośrednich dużej próby

Średnia arytmetyczna

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i}{n}$$

$\overline{x}=5,9$



Odchylenie standardowe

$$\sigma = u(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

$\sigma=0,2$

Rozkład normalny Gaussa

Gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia wielkości x lub jej błędu Δx podlega rozkładowi Gaussa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

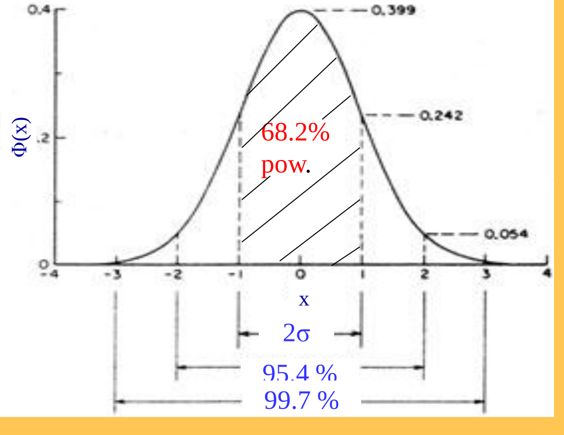
x_0 jest wartością najbardziej prawdopodobną i może być nią średnia arytmetyczna, σ jest odchyleniem standardowym, σ^2 jest wariancją rozkładu

Niepewność standardowa średniej

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

23

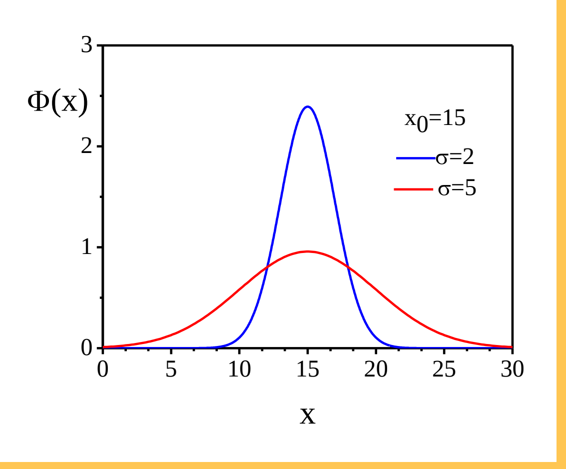
Rozkład normalny Gaussa



W przedziale x_0-σ < x < x_0+σ zawiera się 68.2 % (2/3),
w przedziale x_0-2σ < x < x_0+2σ zawiera się 95.4 %
w przedziale x_0-3σ < x < x_0+3σ zawiera się 99.7 %
wszystkich wyników

24

Rozkład normalny Gaussa



Pomiar o większym σ charakteryzuje się większym rozrzutem wyników wokół wartości średniej a zatem mniejszą precyzją

Zadanie domowe-2

Kilkakrotnie, w tych samych warunkach przeprowadzono pomiar napięcia U_R na rezystorze używając do tego miernika cyfrowego. Otrzymano następujące rezultaty: 2,31V; 2,35V; 2,26V; 2,22V; 2,30V; 2,27V; 2,29V; 2,33V; 2,25V; 2,29V z dokładnością 0,01V. a) Określ wartość oczekiwaną U_R na podstawie średniej z tych wyników. b) Jaką wartość niepewności systematycznej można przypisać tym wynikom. c) Zakładając, że fluktuacje wyników mają charakter statystyczny, wyznacz niepewność przypadkową jako odchylenie standardowe. d) Gdybyśmy wiedzieli, że rzeczywista wartość U_R wynosi 2,23V co moglibyśmy powiedzieć o charakterze błędów w tym doświadczeniu.

TYP B

27

Dla oceny typu **B** wykorzystać można m.in.:

- dane z pomiarów poprzednich,
- doświadczenie i wiedzę na temat przyrządów i obiektów mierzonych,
- informacje producenta przyrządów,
- niepewności przypisane danym zaczerpniętym z literatury

Gdy informacja o pomiarze i źródle jego niepewności jest dobra, dokładność oceny typu B jest porównywalna z dokładnością oceny typu A.

28

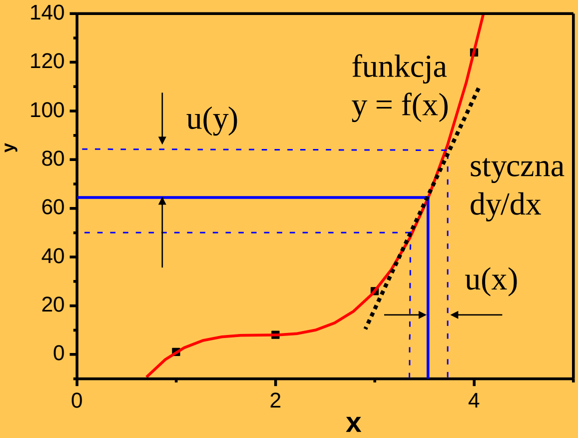
Najczęściej ocena typu **B** dotyczy określenia niepewności wynikającej ze skończonej dokładności przyrządu.

Przykład 4: Ocena niepewności typu B dla pomiaru długości wahadła.

Długość wahadła mierzymy przymiarem milimetrowym uzyskując wartość L=140 mm. Przyjmujemy niepewność równą działce elementarnej (działka skali 1mm). A zatem $u(L)=1$ mm, $u_r(L)=u(L)/L=1/140$, błąd procentowy 0,7%

29

NIEPEWNOŚĆ WIELKOŚCI ZŁOŻONEJ – PRAWO PRZENOSZENIA BŁĘDU



$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x)$$

30

Metoda różniczki zupełnej

Dla wielkości złożonej y=f(x_1,x_2,...x_n) gdy niepewności maksymalne Δx_1 , Δx_2 , ... Δx_n są małe w porównaniu z wartościami zmiennych x_1,x_2, ... x_n niepewność maksymalną wielkości y wyliczamy z praw rachunku różniczkowego:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\left|\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\left|\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|\left|\Delta x_n\right| \quad (3)$$

31

Prawo przenoszenia niepewności

Niepewność standardową wielkości złożonej y=f(x_1,x_2,...x_n) obliczamy z tzw. prawa przenoszenia niepewności jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{\partial y}{\partial x_n}u(x_n)\right]^2}$$

$$u_{cr}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$$

32

Przykład 5

Z pomiarów U i I wyliczamy $R = U / I$

Niepewności maksymalna oporu (wg. wzoru 3)

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial U}\right| |\Delta U| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right| |\Delta I| \qquad \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \qquad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

niepewność bezwzględna

$$\Delta R = \frac{1}{I}\Delta U + \frac{U}{I^2}\Delta I$$

niepewność względna

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Na wartości ΔU i ΔI mają wpływ dokładności przyrządów.

33

Dla mierników analogowych korzystamy z klasy dokładności przyrządu

$$\Delta U = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$$

Dla mierników cyfrowych niepewność jest najczęściej podawana w instrukcji obsługi jako zależna od wielkości mierzonej *x* i zakresu pomiarowego *z*

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$

np. multimetr c_1=0.2%, c_2=0.1%

przy pomiarze oporu R=10 kΩ na zakresie z = 20 kΩ da niepewność ΔR=0.04 kΩ, tj. równowartość 4 działek elementarnych

34

Dawniej uważano, że miarą błędu systematycznego może być tylko niepewność maksymalna. Nowa Norma traktuje błąd systematyczny jako zjawisko przypadkowe, gdyż nie znamy *a priori* jego wielkości i znaku. Norma zaleca stosowanie niepewności standardowej *u*.

A zatem dla przykładu omawianego:

$$u(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}}$$

Zadanie domowe-3

W pewnym eksperymencie wyznaczono przyspieszenie ziemskie g mierząc okres T i długość L odpowiedniego wahadła matematycznego. Wyznaczona długość wahadła wynosi 1.1325 0.0014 m. Niezależnie określona niepewność względna pomiaru okresu wahadła wynosi 0,06%, tj.

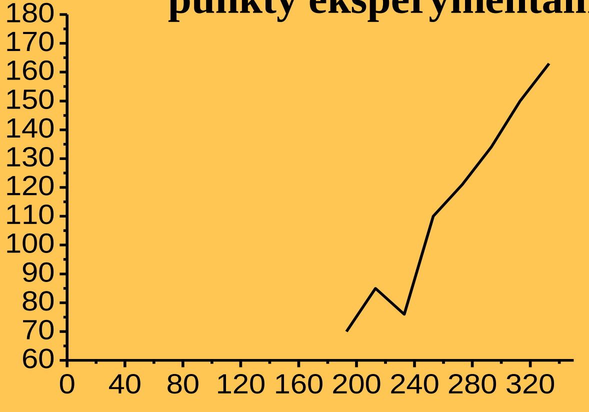
$$u_r(T) = \frac{u(T)}{T} = 6 \cdot 10^{-4}$$

Obliczyć względną niepewność pomiarową przyspieszenia ziemskiego lub niepewność procentową zakładając, że niepewności pomiarowe L i T są niezależne i mają charakter przypadkowy.

Zasady rysowania wykresów

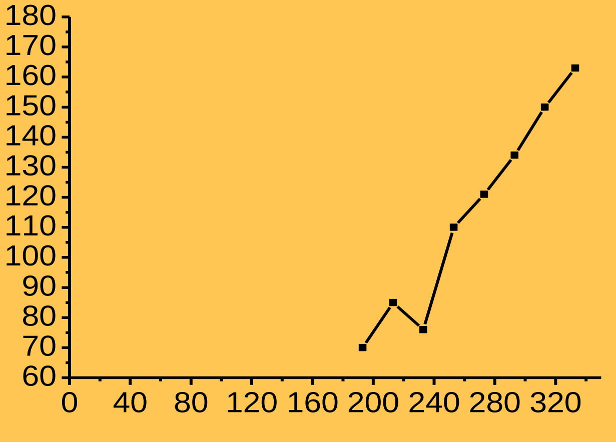
Czy ten wykres jest narysowany zgodnie z zasadami?

1. Należy wyraźnie zaznaczyć punkty eksperymentalne !!!



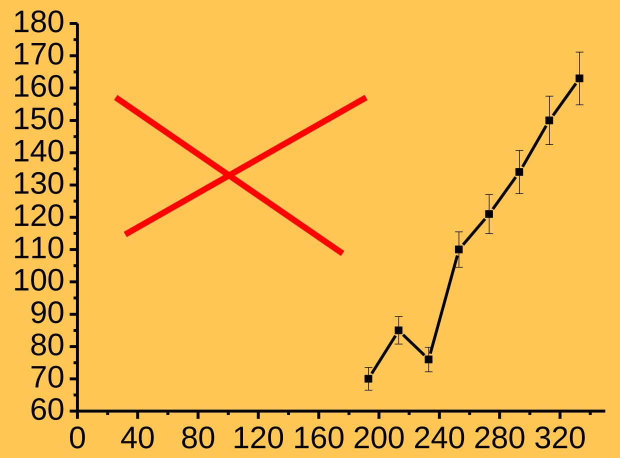
37

2. Trzeba nanieść błąd pomiaru



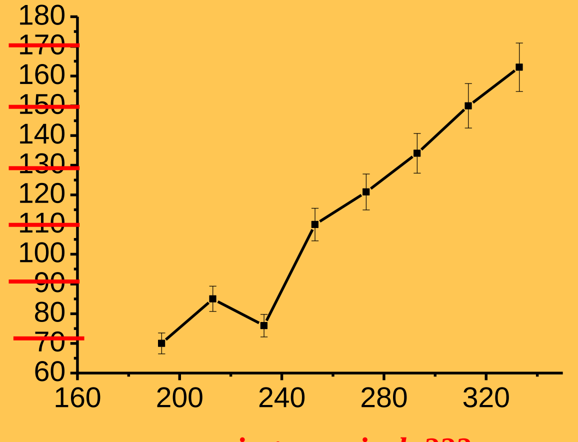
38

3. Dobrać zakresy osi współrzędnych odpowiednio do zakresu zmienności danych pomiarowych !!!



39

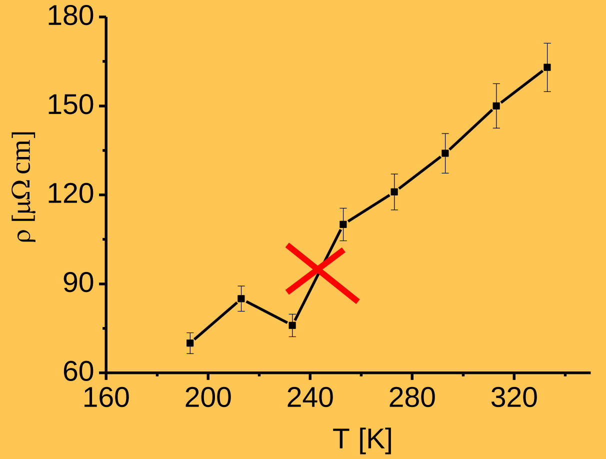
4. Właściwie opisać osie współrzędnych i dobrać skalę, tak aby łatwo można było odczytać wartości zmierzone.



co jest na osiach ???

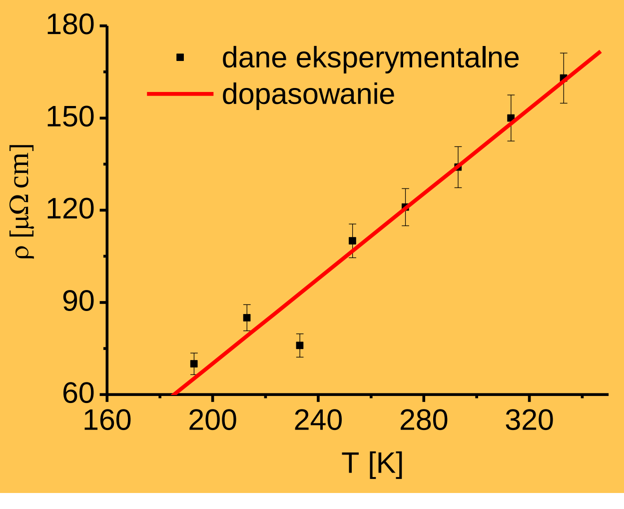
40

5. Nie łączyć punktów eksperymentalnych linią łamaną!!! Jeśli znany jest przebieg teoretyczny to dokonać dopasowania teorii do doświadczenia (przeprowadzić fitowanie)

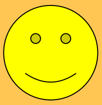


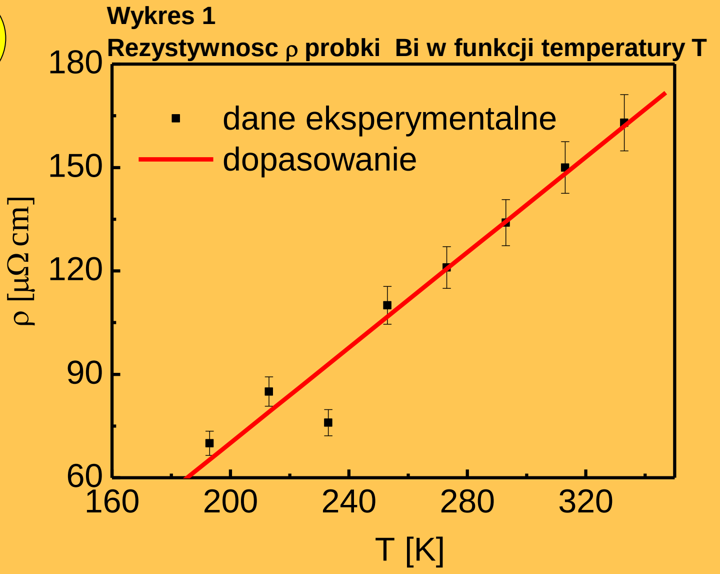
41

6. Zadbać o aspekt estetyczny wykresu (opis, zamknięcie ramką, itp.)



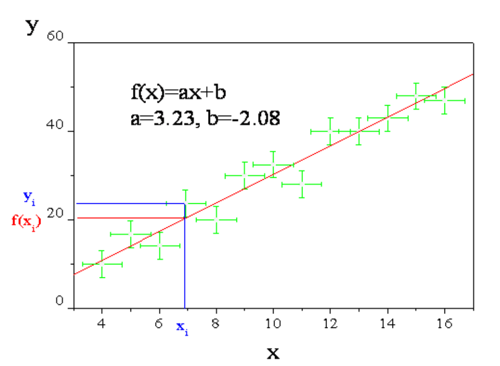
42





Metoda najmniejszych kwadratów
Regresja liniowa

$$S^2 = \sum_i^n \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2 = \min$$



Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymuje się układ równań liniowych dla niewiadomych *a* i *b*

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymuje się wyrażenia na *a* i *b*

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

45

$$W = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

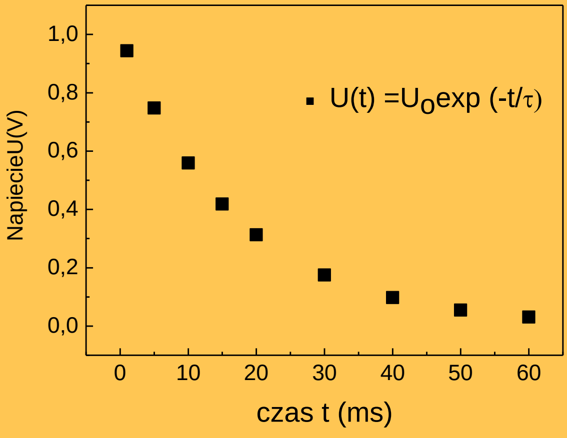
Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe obu parametrów prostej:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a)\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

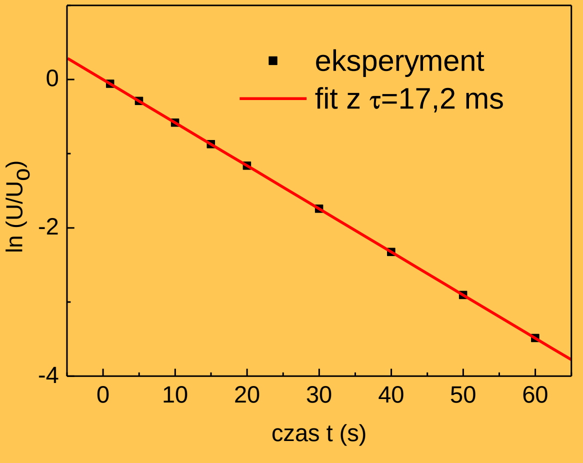
46

Linearyzacja danych eksperymentalnych



47

Dopasowanie prostej wykonujemy po przekształceniu danych do postaci $\ln(U/U_o)=-t/\tau$



48

Zadanie domowe-4

W pewnym eksperymencie wyznaczano pewną wielkość fizyczną będącą nachyleniem prostej y(x) = b + a x.

Uzyskane wyniki pomiarów zestawiono w poniższej tabeli:

x (K)	y (μm)	x (K)	y (μm)	x (K)	y (μm)
0,8	70	2,2	110	3,6	130
1,0	110	2,6	150	3,8	170
1,2	130	2,8	120	4,2	160
1,6	100	3,0	130	4,4	190
1,8	130	3,4	160	5,0	160

Zadanie domowe-4 (cd)

Narysuj wykres y(x) (bez pomocy programów fitujących), zaznaczając punkty eksperymentalne i prowadząc trzy linie proste:

a) linię, która wydaje się najlepiej przechodzić przez punkty eksperymentalne

b) linię, który ma największe (ale ciągle rozsądne) nachylenie

c) linię, która ma najmniejsze możliwe nachylenie

Wykorzystaj wyznaczone nachylenia prostych i ich przecięcia z osiami do określenia niepewności wyznaczanych wielkości a i b. Jest to tzw. metoda graficzna.

Zadanie domowe-4 (cd)

Następnie użyj metody regresji liniowej, aby dopasować linię prostą do zależności y(x). Wykorzystaj podane na wykładzie wzory. Na podstawie dopasowanych parametrów nachylenia i niepewności nachylenia prostej określ współczynnik a oraz jego niepewność. Zastanów się czy metoda graficzna daje równie dobre rezultaty jak metoda regresji liniowej. Jakie są korzyści i wady stosowania każdej z tych metod?

PODSUMOWANIE

- Każdy pomiar w laboratorium jest obarczony niepewnością pomiarową, którą eksperymentator musi określić zgodnie z pewnymi zasadami.
- W pierwszej kolejności należy przeanalizować źródła błędów, pamiętając, aby wyeliminować wyniki obarczone błędem grubym. W laboratorium studenckim błędy systematyczne z reguły przewyższają błędy przypadkowe.
- Wielokrotne powtarzanie pomiarów, gdy dominuje błąd systematyczny, nie ma sensu. W takim przypadku dokonujemy tylko 3-5 pomiarów w tych samych warunkach w celu sprawdzenia powtarzalności.

- Gdy błąd przypadkowy dominuje w eksperymencie, należy sprawdzić czy rozkład wyników może być opisany funkcją Gaussa czy też należy spodziewać się innego rozkładu. W tym celu dokonujemy wielokrotnego (np. 100 razy) pomiaru <u>w tych samych warunkach</u>, obliczamy średnią i wariancję rozkładu, rysujemy histogram, etc.)
- Jako miarę niepewności stosujemy raczej niepewność standardową, rzadziej niepewność maksymalną.
- W przypadku wielkości złożonej, stosujemy prawo przenoszenia błędu. Staramy się przeprowadzić analizę niepewności wielkości złożonej tak, aby uzyskać informacje dotyczące wagi przyczynków, jakie wnoszą do całkowitej niepewności pomiary poszczególnych wielkości prostych. W tym celu należy analizować niepewności względne.

- Ważnym elementem sprawozdania z przebiegu eksperymentu (i to nie tylko w laboratorium studenckim) jest wykres. Wykresy sporządzamy zgodnie z dobrymi zasadami, pamiętając o jednoznacznym opisie.
- Jeżeli znane są podstawy teoretyczne badanego zjawiska, na wykresie zamieszczamy krzywą teoretyczną (linia ciągła) na tle wyraźnych punktów eksperymentalnych (dobieramy odpowiednie symbole i nanosimy niepewności eksperymentalne). Możemy wcześniej dokonać dopasowania parametrów przebiegu teoretycznego w oparciu o znane metody „fitowania”
- Zawsze, gdy to możliwe, dokonujemy linearyzacji danych eksperymentalnych, np. rysując y vs. ln (x), lub log y vs. log x, lub y vs. 1/x itp. Do tak przygotowanych danych można zastosować metodę regresji liniowej