

Wydział EAIiE Kierunek: Elektrotechnika	Przedmiot: Fizyka
WYKŁADOWCA: dr hab. inż. Katarzyna ZAKRZEWSKA , prof. AGH KATEDRA ELEKTRONIKI, paw. C-1, p. 317, III p. tel. 617 29 01, tel. kom. 0 601 51 33 35 zak@agh.edu.pl http://home.agh.edu.pl/~zak	
2012/2013, zima	
1	

Wydział EAIiE Kierunek: Elektrotechnika	Przedmiot: Fizyka
ZASADY ZALICZANIA PRZEDMIOTU:	
<ul style="list-style-type: none">• Obecność i aktywność na zajęciach (wykłady, ćwiczenia, laboratorium)• Pozytywna ocena końcowa (≥ 3.0) z ćwiczeń rachunkowych i laboratorium• Egzamin pisemny i ustny po każdym semestrze. Na ocenę końcową przedmiotu wpływają wszystkie oceny oraz wyniki testów na wykładzie (egz/cw/testy: 50/35/15)	
2012/2013, zima	
2	

MATERIAŁY DO WYKŁADU:

- TEKST WYKŁADU
- PODRĘCZNIKI:
 1. D.Halliday, R. Resnick, J.Walker, Podstawy Fizyki, PWN W-wa, 2003 5-tomów (w skrócie HRW)
 2. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman
Mechanika, PWN W-wa 1975

RACHUNEK WEKTOROWY W FIZYCE

Plan

- Pojęcie wektora
- Działania na wektorach
- Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych
- Przykłady wykorzystania wektorów i działań na nich w fizyce

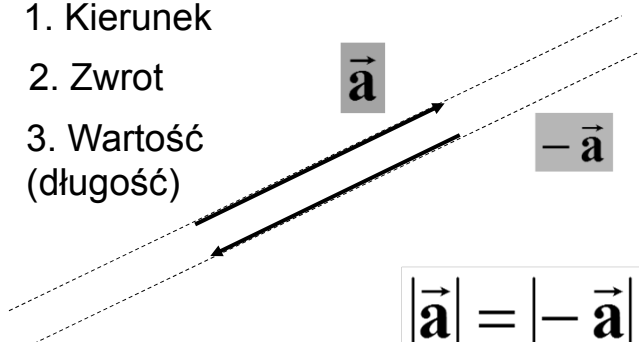
2012/2013, zima

5

Pojęcie wektora

Wektor ma trzy cechy:

1. Kierunek
2. Zwrot
3. Wartość (długość)



2012/2013, zima

6

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

DŁUGOŚĆ WEKTORA

Oś liczbowa

Wersor jest to wektor jednostkowy

Długość wektora

$|\hat{\mathbf{a}}| = 1$

Ogólnie:

$$\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}| \hat{\mathbf{a}} = a \hat{\mathbf{a}}$$

7

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

A punkt przyłożenia?

Ruch postępowy

Ruch obrotowy

2012/2013, zima

8

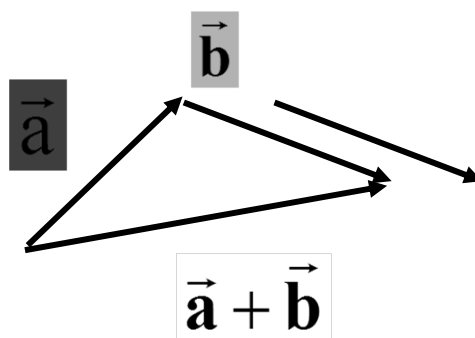
Działania na wektorach

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie:
 - Iloczyn wektora przez liczbę
 - Iloczyn skalarny dwóch wektorów
 - Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

2012/2013, zima

9

Dodawanie wektorów



2012/2013, zima

10

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Odejmowanie wektorów

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

The diagram illustrates the subtraction of vector \vec{b} from vector \vec{a} . On the left, a triangle is formed by vectors \vec{a} , \vec{b} , and $\vec{a} - \vec{b}$. On the right, vector \vec{a} and its opposite $-\vec{b}$ are shown, with their sum being $\vec{a} - \vec{b}$.

Wektor przeciwny

2012/2013, zima

11

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Reguła równoległoboku

The diagram illustrates the parallelogram rule for vector addition. Vectors \vec{a} and \vec{b} are added to form the diagonal vector $\vec{a} + \vec{b}$. The other diagonal is $\vec{a} - \vec{b}$.

2012/2013, zima

12

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

WEKTOR WYPADKOWY

Vector addition
 $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R}$

Number of vectors 2 3 4

np. wypadkowe
przemieszczenie,
wypadkowa siła

2012/2013, zima 13

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Rozkład wektora

$\vec{a} = \vec{a}_k + \vec{a}_l$

2012/2013, zima 14

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

ILOCZYN WEKTORA PRZEZ LICZBĘ

$k \vec{a} = \vec{b}$

$3 \vec{a} = \vec{b}$

$-1,5 \vec{a} = \vec{b}$

Wynik działania jest wektorem

2012/2013, zima

15

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Wektory \vec{a} i \vec{b} są równoległe
(mają ten sam kierunek)

$$k \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Gdy $k > 0$, zwroty zgodne
Gdy $k < 0$, zwroty przeciwne

Wartość (długość) wektora: $b = |k|a$

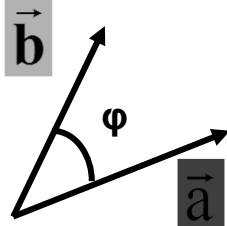
2012/2013, zima

16

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

ILOCZYN SKALARNY - DEFINICJA



$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \varphi$$

Wynik działania jest liczbą:
dodatnią, ujemną (kiedy?) lub
nawet zero

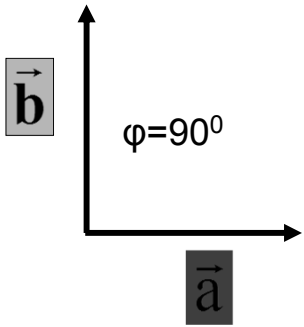
Działanie jest przemienne $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

2012/2013, zima 17

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

ILOCZYN SKALARNY - KONSEKWENCJE



$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos 90^\circ = 0$$

Jeżeli wektory są prostopadłe
to ich iloczyn skalarny jest
równy 0

Służy do sprawdzania
prostopadłości wektorów

2012/2013, zima 18

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

ILOCZYN SKALARNY - KONSEKWENCJE

$\varphi=0^\circ$

\vec{a}

$\vec{a} \circ \vec{a} = a^2$

\vec{a}

Służy do określenia długości wektora

$a = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

2012/2013, zima 19

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

ILOCZYN WEKTOROWY - DEFINICJA

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

\vec{c}

\vec{b}

\vec{a}

φ

Wynik działania jest wektorem. Należy zatem podać trzy jego cechy, nie tylko wartość ale przede wszystkim kierunek (!!!!) i zwrot

2012/2013, zima 20

Iloczyn wektorowy - definicja

1. Kierunek wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory \vec{a} i \vec{b} czyli

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$

i

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

2012/2013, zima

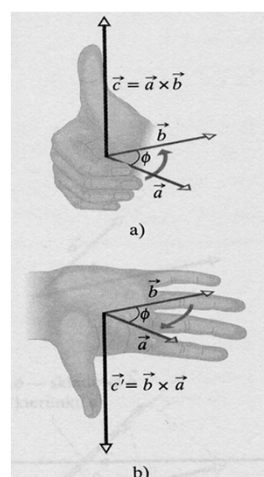
21

Iloczyn wektorowy - definicja

2. Zwrot wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ określamy regułą prawej ręki lub śruby prawoskrętnej

Działanie to nie jest przemienne

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



2012/2013, zima

22

Iloczyn wektorowy - definicja

3. Długość wektora $\vec{a} \times \vec{b}$
to liczba:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \varphi$$

Uwaga: Jeżeli przynajmniej jeden z wektorów jest zerowy lub wektory mają ten sam kierunek (pokrywają się lub są równoległe) to $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

W szczególności $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

DLACZEGO?

Bo jeżeli jest tylko jeden wektor to nie można utworzyć płaszczyzny, do której wektor będący wynikiem iloczynu wektorowego byłby prostopadły.

Jak widać, jest to problem kierunku a nie wartości wektora.

Iloczyn wektorowy - konsekwencje

1. Jeżeli

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

2. Służy do sprawdzania równoległości wektorów

Algebra wektorów

Rozdzielność mnożenia skalarnego i wektorowego
względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Dzielić przez wektor nie wolno !!!



Algebra wektorów

Przykład 1.

Dane jest równanie wektorowe:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$

Znaleźć wektor \vec{x}

Rozwiązanie:

Algebra wektorów

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$

Rozwiązanie:

1. Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b}) = 0$$

2. Ale: $\vec{b} \circ \vec{b} = b^2$

3. Dodając i odejmując stronami jak w „zwykłym” równaniu:

$$\vec{x}(\vec{a} \circ \vec{b} + b^2) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

4. Mamy prawo podzielić przez wyrażenie w nawiasie po upewnieniu się, że jest liczbą:

$$\vec{x} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{\vec{a} \circ \vec{b} + b^2}$$

Dowodzenie twierdzeń

Rachunek wektorowy ułatwia dowodzenie twierdzeń geometrycznych.

Przykład 2.

Udowodnić, że dwa wektory muszą mieć równe długości jeżeli ich suma jest prostopadła do ich różnicy.

Dowód

1. Jeżeli: $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$

2. To (z definicji iloczynu skalarnego):

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

3. Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = 0$$

Dowód

4. Iloczyn skalarny jest
przemienne, a zatem:

$$-\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} = 0$$

5. I:
$$\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = 0$$

redukuje się do:
$$a^2 - b^2 = 0$$

6. Zatem:
$$a = b$$

c.n.d.

2012/2013, zima

31

Zadanie 2-1

Stosując rachunek wektorowy udowodnić twierdzenie
kosinusów.

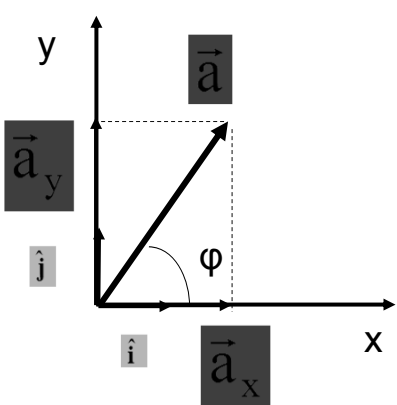
2012/2013, zima

32

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych – przypadek dwuwymiarowy



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

Tw. Pitagorasa

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Trygonometria

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_y}{a_x}$$

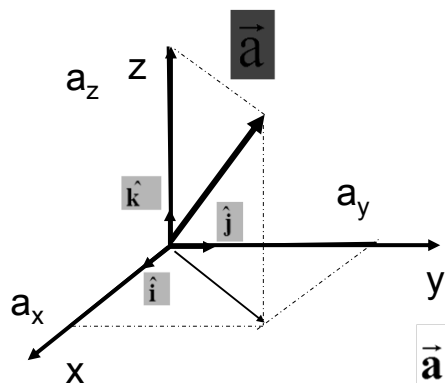
2012/2013, zima

33

Wydział EAIIE
Kierunek: Elektrotechnika

Przedmiot: Fizyka

Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych – 3D



$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

2012/2013, zima

34

Zadanie 2-2

Stosując definicje iloczynów skalarnego i wektorowego oblicz:

$$\hat{i} \times \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k}, \hat{j} \times \hat{i}$$

oraz

$$\hat{i} \circ \hat{k}, \hat{j} \circ \hat{k}, \hat{j} \circ \hat{j}$$

Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

1. Dodawanie wektorów

$$\vec{a} + \vec{b}$$

Wynik jest wektorem

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

2. Równość wektorów

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \text{lub} \quad \vec{a} \equiv \vec{b}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{array} \right.$$

3. Iloczyn skalarny

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O BOWIAZUJE TYLKO W UKŁADZIE
KARTEZJAŃSKIM - DLACZEGO?

4. Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Wydział EAIIE	Przedmiot: Fizyka
Kierunek: Elektrotechnika	



ZASTOSOWANIE RACHUNKU WEKTOROWEGO W FIZYCE

2012/2013, zima 41

Wydział EAIIE	Przedmiot: Fizyka
Kierunek: Elektrotechnika	

Wielkości fizyczne

Długość, czas, siła, masa, prędkość, przyspieszenie, temperatura, ciśnienie, natężenie pola elektrycznego, natężenie prądu elektrycznego, strumień pola magnetycznego

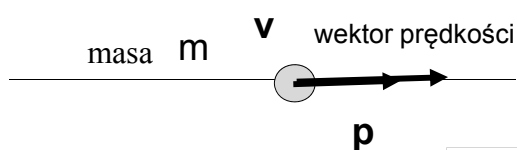
SKALARY	WEKTORY
	

2012/2013, zima 42

Mnożenie wektora przez liczbę:

Pęd: definicja $\vec{p} = m\vec{v}$

Pytanie: Jaki jest kierunek wektora pędu?



Odpowiedź:

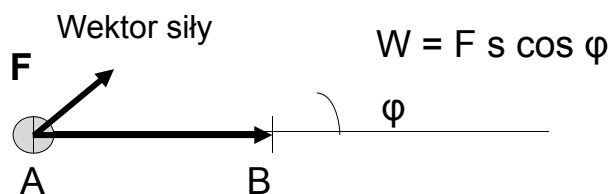
$$\vec{p} \parallel \vec{v}$$

2012/2013, zima

43

Iloczyn skalarny

Praca $W = \vec{F} \circ \vec{s}$



Wektor przesunięcia

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB}$$

2012/2013, zima

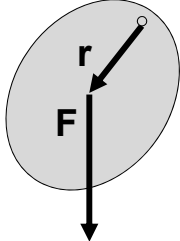
44

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

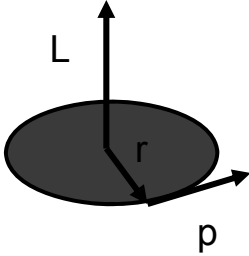
Przedmiot: Fizyka

Iloczyn wektorowy:

1. Moment siły (ang. torque)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$


2. Moment pędu (ang. angular momentum)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$


2012/2013, zima

45

Wydział EAIiE
Kierunek: Elektrotechnika

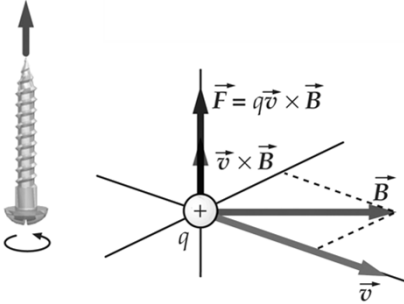
Przedmiot: Fizyka

Iloczyn wektorowy:

3. Siła Lorentza (ang. magnetic force) – siła działająca na ładunek q poruszający się w polu magnetycznym o wektorze indukcji B

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

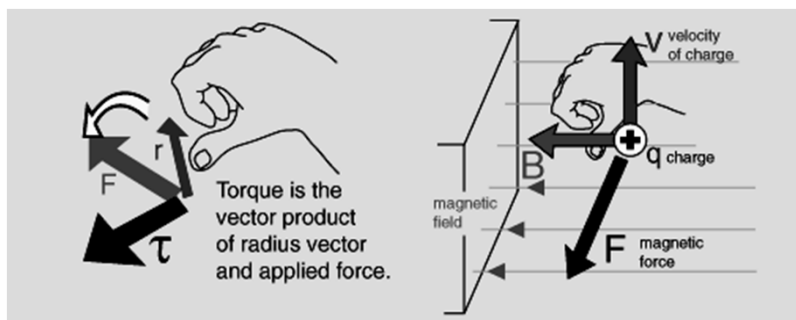
To jest definicja wektora indukcji pola magnetycznego



2012/2013, zima

46

Określanie zwrotu iloczynu wektorowego :



2012/2013, zima

47

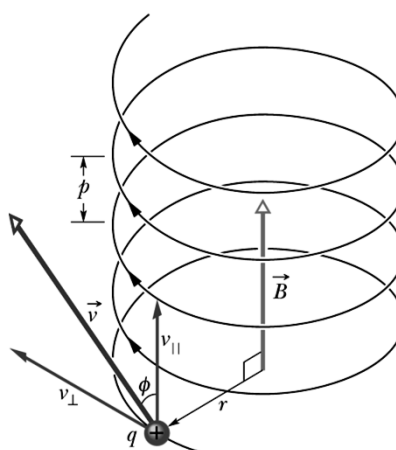
Pole magnetyczne zakrzywia tor ruchu ładunku elektrycznego.

p - skok śruby

$$p = v_{\parallel} T$$

r - promień śruby

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp} B$$



2012/2013, zima

48

Zadanie 2-4

Rozważyć szczególne przypadki ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym, gdy:

- a) wektor prędkości jest równoległy do wektora indukcji magnetycznej
- b) wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej

Odpowiedzieć na pytania: jaka siła działa na cząstkę i jaka krzywa opisuje tor ruchu cząstki.

2012/2013, zima

49

Zadanie 2-5

Zastanowić się nad innymi zastosowaniami rachunku wektorowego zarówno w matematyce jak i fizyce. Poszukać informacji na temat iloczynu mieszanego oraz podwójnego iloczynu wektorowego czyli:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

2012/2013, zima

50

Pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej cząstki naładowanej poruszającej się w tym polu

$$E_k = \frac{m}{2} \vec{v} \circ \vec{v}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \vec{v} \circ \vec{v} = m \vec{v} \circ \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ale

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}$$

czyli

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \circ \vec{F} = q \vec{v} \circ (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0)$$

$$E_k = \text{const}$$

2012/2013, zima

51

TEST 2P

1. Wektor o długości 20 dodano do wektora o długości 25. Długość wektora będącego sumą wektorów może być równa:

A) zero B) 3 C) 12 D) 47 E) 50

2. Wektory \vec{a} i \vec{b} leżą na płaszczyźnie xy. Możemy wnosić, że $\vec{a} = \vec{b}$ jeżeli:

A) $a_x^2 + a_y^2 = b_x^2 + b_y^2$

D) $a_y / a_x = b_y / b_x$

B) $a_x + a_y = b_x + b_y$

E) $a_x = a_y$ i $b_x = b_y$

C) $a_x = b_x$ i $a_y = b_y$

2012/2013, zima

52

3. Jeżeli $\vec{a} = (6m)\hat{i} - (8m)\hat{j}$ to $4\vec{a}$ ma wartość:

- A) 10 m B) 20 m C) 30 m D) 40 m E) 50 m

4. Kąt pomiędzy wektorem $\vec{a} = (-25m)\hat{i} + (45m)\hat{j}$ a dodatnim kierunkiem osi OX wynosi:

- A) 29° B) 61° C) 119° D) 151° E) 209°

5. Dwa wektory, których początki się pokrywają, tworzą pewien kąt. Jeżeli kąt pomiędzy tymi wektorami zwiększy się o 20° to iloczyn skalarny tych dwóch wektorów zmienia znak na przeciwny. Kąt, który początkowo tworzyły te dwa wektory wynosi:

- A) 0 B) 60° C) 70° D) 80° E) 90°

2012/2013, zima

53

6. Dwa wektory $\vec{a} = (3m)\hat{i} - (2m)\hat{j}$ $\vec{b} = (2m)\hat{i} + (3m)\hat{j} - (2m)\hat{k}$ wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę. Który z wektorów jest prostopadły do tej płaszczyzny:

- A) $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$ D) $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} - (13m)\hat{k}$

- B) $(-4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$ E) $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j}$

- C) $(4m)\hat{i} - (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$

7. Wartość $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k})$ wynosi:

- A) zero B) +1 C) -1 D) 3 E) $\sqrt{3}$

2012/2013, zima

54

TEST 2A

1. A vector of magnitude 3 CANNOT be added to a vector of magnitude 4 so that the magnitude of the resultant is:
 A) zero B) 1 C) 3 D) 5 E) 7
2. A vector has a magnitude of 12. When its tail is at the origin it lies between the positive x axis and negative y axis and makes an angle of 30° with the x axis. Its y component is:
 A) $6\sqrt{3}$ B) $-6\sqrt{3}$ C) 6 D) -6 E) 12
3. A vector has a component of 10 in the +x direction, a component of 10 m in the +y direction, and a component of 5 m in the +z direction. The magnitude of this vector is:
 A) zero B) 15 m C) 20 m D) 25 m E) 225 m

2012/2013, zima

55

4. Two vectors have magnitudes of 10 and 15. The angle between them when they are drawn with their tails at the same point is 65° . The component of the longer vector along the line of the shorter is:
 A) 0 B) 4.2 C) 6.3 D) 9.1 E) 14
5. If the magnitude of the sum of two vectors is less than the magnitude of either vector, then:
 A) the scalar product of the vectors must be negative
 B) the scalar product of the vectors must be positive
 C) the vectors must be parallel and in opposite directions
 D) the vectors must be parallel and in the same direction
 E) none of the above

2012/2013, zima

56

Wydział EAIiE		Przedmiot: Fizyka	
Kierunek: Elektrotechnika			
Podsumowanie			
Działanie	Wynik	Metoda postępowania	Zastosowanie
dodawanie $\vec{a} + \vec{b}$	wektor	reguła równoległoboku	wypadkowe przemieszczenie, wypadkowa siła
odejmowanie $\vec{a} - \vec{b}$	wektor		algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń
rozkład wektora	wektory składowe		równia pochyła, rzut ukośny, itp.
		2012/2013, zima	57

Wydział EAIiE		Przedmiot: Fizyka			
Kierunek: Elektrotechnika					
Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezj.	W matematyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$	skalar	$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \varphi$	$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	prostopadłość wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$	wektor	$\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \varphi \hat{n}$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	równoległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę $k \vec{a}$	wektor	$k \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość ka	$\begin{cases} ka_x = b_x \\ ka_y = b_y \\ ka_z = b_z \end{cases}$	równoległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki