METODY NUMERYCZNE

Wykład 4.

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH

1

Plan

- Interpolacja-cd
- Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych

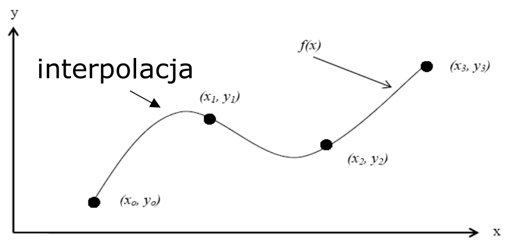
2

INTERPOLACJA WIELOMIANOWA – PRZYPOMNIENIE

Założenie:

W przedziale [a,b] danych jest (n+1) różnych punktów x_0, x_1, …, x_n, które nazywamy węzłami interpolacji, oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach:

$$f(x_i) = y_i \text{ dla } i = 0, 1, ..., n.$$



3

INTERPOLACJA WIELOMIANOWA – PRZYPOMNIENIE

Zadanie interpolacji:

Wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz oszacowanie błędu tych przybliżonych wartości.

1. W tym celu należy znaleźć funkcję $F(x)$, zwaną *funkcją interpolującą*, która będzie „przybliżać" funkcję $f(x)$ w przedziale [a,b].
2. Funkcja $F(x)$ w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości co funkcja $y = f(x)$.
3. W zagadnieniu interpolacji wielomianowej funkcja $F(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n.

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach x_0, x_1, …, x_n przyjmuje wartości y_0, y_1, …, y_n .

4

Wzór interpolacyjny Lagrange’a

Wartość wielomianu interpolacyjnego **Lagrange’a** $W(x)$ w punkcie x dla danej funkcji f określona jest wzorem:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f\left(x_i\right)$$

gdzie:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Inaczej:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\left\{\frac{\omega_n(x)}{x - x_j}\right\}\bigg|_{x=x_j}} = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)}$$

5

Wzór interpolacyjny Lagrange’a

Inaczej:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\left\{\frac{\omega_n(x)}{x - x_j}\right\}\bigg|_{x=x_j}} = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)}$$

gdzie:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

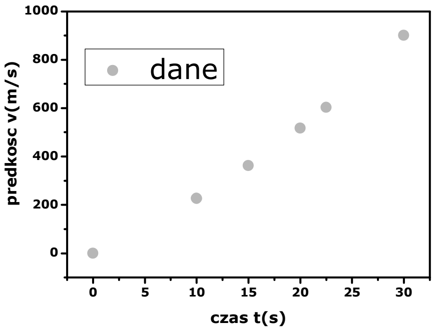
$\omega'_n(x_j)$ jest wartością pochodnej wielomianu $\omega_n(x)$ punkcie x_j będącym zerem tego wielomianu

6

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę interpolacji wielomianem Lagrange'a dla dwóch punktów

7

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$v(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t)v(t_i) = L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1)$$

Wiadomo, że:

$$t_0 = 15,\ \ v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20,\ \ v(t_1) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

A zatem:

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} v(t_1) =$$

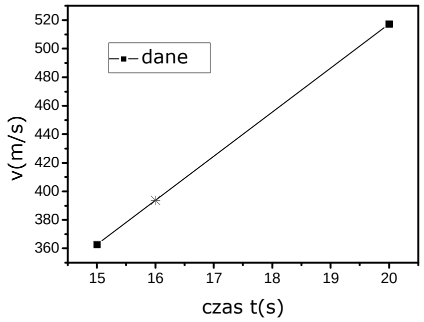
$$= \frac{t - 20}{15 - 20} 362.78 + \frac{t - 15}{20 - 15} 517.35$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej (wykład 3)

8

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$v(16) = \frac{16-20}{15-20}(362.78) + \frac{16-15}{20-15}(517.35)$$
$$= 0.8\ (362.78) + 0.2\ (517.35) =$$
$$= 393.7\ m/s$$



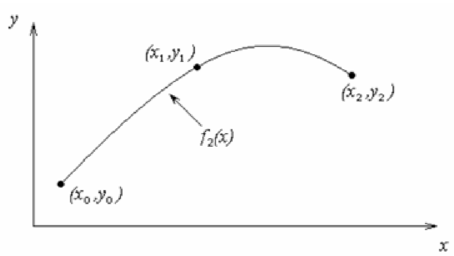
9

Interpolacja kwadratowa

Dane są punkty $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$

szukamy $$v(t) = \sum_{i=0}^{2} L_i(t) v(t_i) =$$
$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$



10

Interpolacja kwadratowa

Wiadomo, że:

$t_0 = 10,\ v(t_0) = 227.04$

$t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$

$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{2} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{2} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)}$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{2} \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}$$

A zatem:

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \frac{t - t_2}{t_0 - t_2} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} v(t_1) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} v(t_2)$$

11

Interpolacja kwadratowa

dla t=16s:

$$v(16) = \frac{(16-15)}{(10-15)} \frac{(16-20)}{(10-20)} (227.04) + \frac{(16-10)}{(15-10)} \frac{(16-20)}{(15-20)} (362.78)$$

$$+ \frac{(16-10)}{(20-10)} \frac{(16-15)}{(20-15)} (517.35) =$$

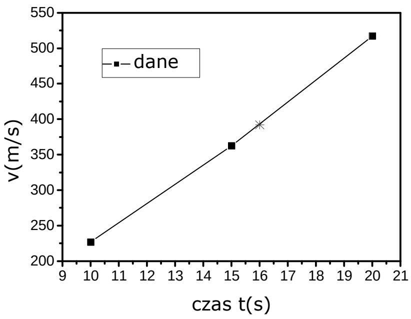
$$= (-0.08)(227.04) + (0.96)(362.78) + (0.12)(517.35)$$

$$= 392.19\ m/s$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej i metodą Newtona.

12

Interpolacja kwadratowa



Błąd względny w odniesieniu do poprzedniej interpolacji

$$|\in_a| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$
$$= 0.38502\%$$

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Znaleźć równanie na prędkość i obliczyć v(16s) na podstawie interpolacji sześciennej Lagrange'a

Dane

$$t_0 = 10, \ v(t_0) = 227.04$$
$$t_1 = 15, \ v(t_1) = 362.78$$
$$t_2 = 20, \ v(t_2) = 517.35$$
$$t_3 = 22.5, \ v(t_3) = 602.97$$

Znaleźć drogę przebytą w czasie od 11s do 16 s. Znaleźć przyspieszenie w chwili t=16 s.
Porównać wyniki z uzyskanymi na podstawie interpolacji metodą bezpośredniej i Newtona.

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Błąd względny przybliżenia	----------	0.38502 %	0.033427 %

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład

Niech dane będą punkty: 0, 1, 3, 6. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który będzie przybliżać funkcję

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

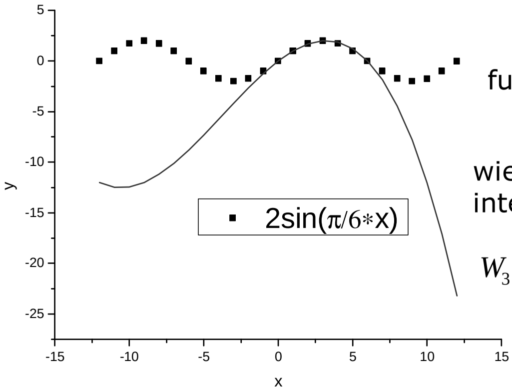
Rozwiązanie:
Wartości funkcji $f(x)$ w węzłach interpolacji są następujące:

$$y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f(1) = 1, \quad y_2 = f(3) = 2, \quad y_3 = f(6) = 0.$$

Można pokazać, że wielomian interpolacyjny Lagrange'a przyjmuje postać:

$$W_3(x) = -\frac{x^3}{90} - \frac{11x^2}{90} + \frac{17x}{15}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład



funkcja f(x)

wielomian interpolacyjny $W_3(x)$

$$W_3(x) = -\frac{x^3}{90} - \frac{11x^2}{90} + \frac{17x}{15}$$

Wielomian interpolacyjny „przybliża" funkcję $f(x)$ tylko pomiędzy skrajnymi węzłami, tzn. w przedziale [0,6].
Im mniejsze odległości między węzłami, tym lepsze przybliżenie uzyskujemy

17

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Z jaką dokładnością wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ przybliża funkcję $f(x)$ w pozostałych punktach leżących wewnątrz przedziału $<a, b>$?

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ w rozpatrywanym przedziale $<a, b>$ ma pochodne do rzędu $(n+1)$ włącznie.

$$\left| f(x) - W_n(x) \right| \le \frac{\sup\limits_{x \in <a,b>} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

zależy od wyboru węzłów interpolacji

18

Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych-spline

Motywacja

Wady interpolacji wielomianowej:

Pogorszenie wyników interpolacji przy zwiększaniu liczby węzłów.

Przykład: $f(x) = |x|$

Zjawisko Rungego (przykład źle uwarunkowanego zadania):

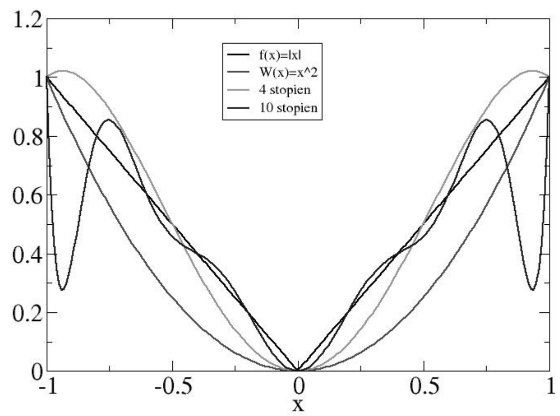
Interpolacja wielomianami wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów prowadzi do poważnych odchyleń od interpolowanej funkcji zwłaszcza na końcach przedziału. Interpolacja na środkowych częściach przedziału jest natomiast bardzo dobra i użyteczna

Przykład: $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$

19

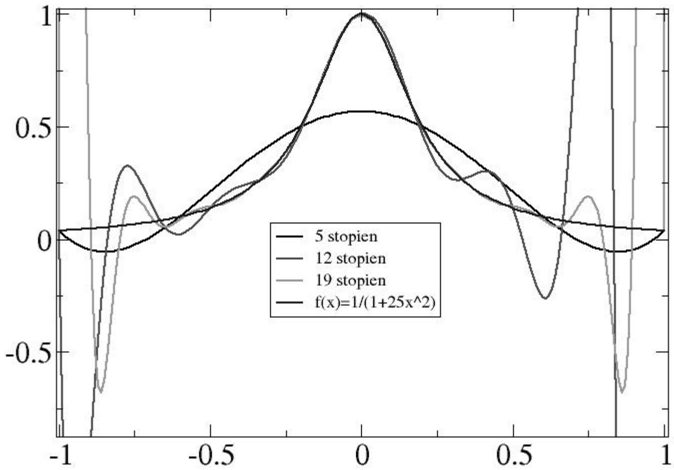
Interpolacja wielomianowa szczególnych funkcji

$$f(x) = |x|$$



20

Zjawisko Rungego



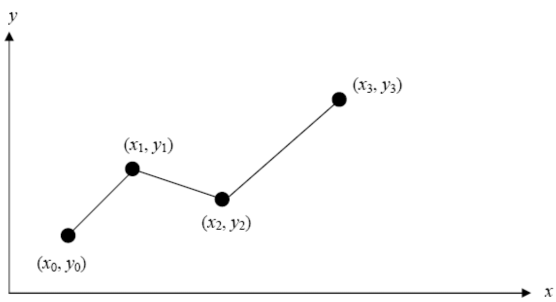
21

Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

Mając dane punkty:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1),...(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

prowadzimy linie proste pomiędzy punktami.



22

Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad x_1 \le x \le x_2$$

.

.

.

nachylenie prostej
pomiędzy węzłami

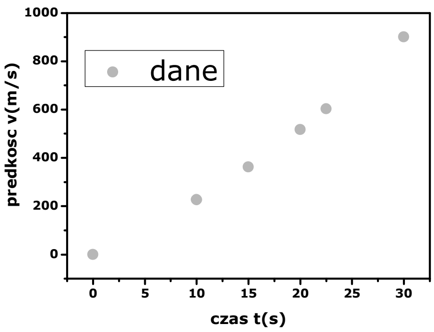
$$f(x) = f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

23

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę interpolacji za pomocą liniowych funkcji sklejanych

24

Interpolacja liniowa (spline)

Wiadomo, że:

$t_0 = 15,\ v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20,\ v(t_1) = 517.35$

Znajdujemy:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) =$$

$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

A zatem: $v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15),\ 15 \le t \le 20$

$$v(16) = 362.78 + 30.914(16 - 15)$$

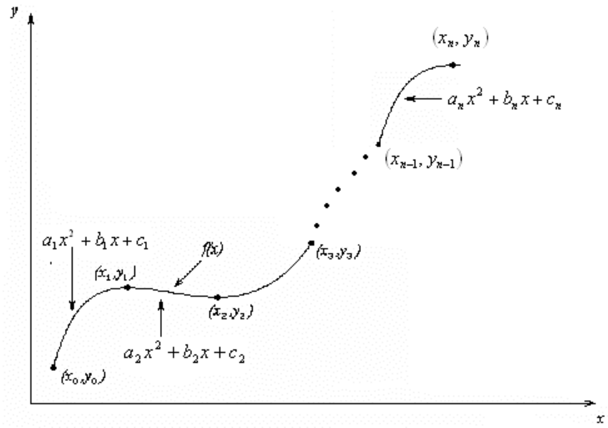
$$= 393.7\ \ m/s$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z innymi wynikami interpolacji.

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Mając dane punkty: $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_n)$

zapisujemy różne funkcje kwadratowe pomiędzy każdą parą punktów.



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

$f(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \qquad x_0 \le x \le x_1$

$f(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \qquad x_1 \le x \le x_2$

.

.

.

$f(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$

Znaleźć współczynniki $a_i, b_i, c_i \qquad i = 1,2,...,n$

Mamy 3n niewiadomych czyli potrzebujemy 3n równań

27

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Każda parabola przechodzi przez dwa sąsiednie punkty, czyli mamy 2n równań

$f(x_0) = a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1$

$f(x_1) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1$

.
.
.

$f(x_{i-1}) = a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i$

$f(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$

.
.
.

$f(x_{n-1}) = a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n$

$f(x_n) = a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n$

28

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Dodatkowe warunki otrzymujemy żądając ciągłości pierwszych pochodnych w n-1 wewnętrznych punktach węzłowych:

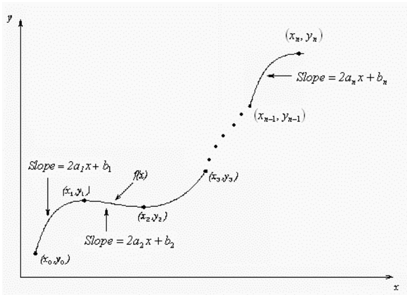
$$\text{dla } f(x) \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \quad f'(x) \begin{cases} 2a_1x + b_1 \\ 2a_2x + b_2 \end{cases}$$

a zatem

$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

$$\vdots$$

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} = 2a_nx_{n-1} + b_n$$



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Prowadzi to do n-1 równań postaci:

$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$

$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

Całkowita liczba równań wynosi 2n+(n-1)=3n-1

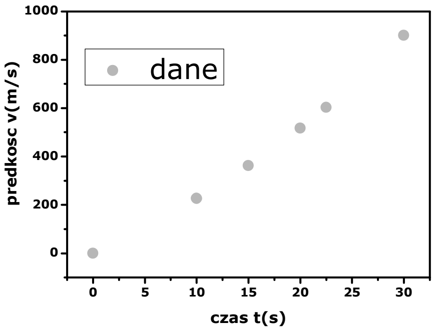
Potrzebne jedno równanie może przyjąć postać np. $a_1 = 0$

Pierwsza funkcja sklejana jest liniowa.

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę interpolacji za pomocą kwadratowych funkcji sklejanych

31

Rozwiązanie

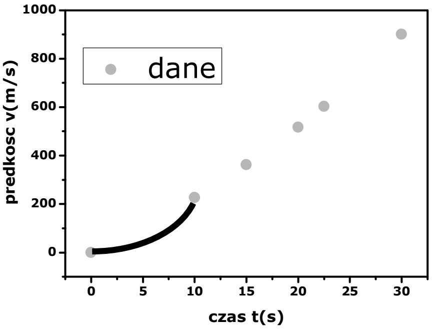
$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, && 0 \le t \le 10 \\
&= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, && 10 \le t \le 15 \\
&= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, && 15 \le t \le 20 \\
&= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, && 20 \le t \le 22.5 \\
&= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, && 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

32

Każda funkcja sklejana przechodzi przez dwa sąsiednie punkty

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \le t \le 10$$

$$\begin{cases} a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \\ a_1(10)^2 + b_1(10) + c_1 = 227.04 \end{cases}$$



Dalsze równania

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Jest 10 równań, 15 poszukiwanych współczynników

$$a_2(10)^2 + b_2(10) + c_2 = 227.04$$
$$a_2(15)^2 + b_2(15) + c_2 = 362.78$$
$$a_3(15)^2 + b_3(15) + c_3 = 362.78$$
$$a_3(20)^2 + b_3(20) + c_3 = 517.35$$
$$a_4(20)^2 + b_4(20) + c_4 = 517.35$$
$$a_4(22.5)^2 + b_4(22.5) + c_4 = 602.97$$
$$a_5(22.5)^2 + b_5(22.5) + c_5 = 602.97$$
$$a_5(30)^2 + b_5(30) + c_5 = 901.67$$

Żądanie ciągłości pochodnych

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \le t \le 10$$
$$= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad 10 \le t \le 15$$

$$\frac{d}{dt}\left(a_1 t^2 + b_1 t + c_1\right)\Big|_{t=10} = \frac{d}{dt}\left(a_2 t^2 + b_2 t + c_2\right)\Big|_{t=10}$$

$$\left(2a_1 t + b_1\right)\Big|_{t=10} = \left(2a_2 t + b_2\right)\Big|_{t=10}$$

$$2a_1(10) + b_1 = 2a_2(10) + b_2$$

$$20a_1 + b_1 - 20a_2 - b_2 = 0$$

35

Żądanie ciągłości pochodnych - cd

dla t=10s $\quad 2a_1(10) + b_1 - 2a_2(10) - b_2 = 0$

dla t=15s $\quad 2a_2(15) + b_2 - 2a_3(15) - b_3 = 0$

dla t=20s $\quad 2a_3(20) + b_3 - 2a_4(20) - b_4 = 0$

dla t=22.5s $\quad 2a_4(22.5) + b_4 - 2a_5(22.5) - b_5 = 0$

4 dodatkowe równania

ostatnie równanie $\quad a_1 = 0$

36

Ostateczny układ 15 równań na 15 niewiadomych

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 30 & 1 \\
20 & 1 & 0 & -20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -30 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 1 & 0 & -40 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 1 & 0 & -45 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ a_5 \\ b_5 \\ c_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 227.04 \\ 227.04 \\ 362.78 \\ 362.78 \\ 517.35 \\ 517.35 \\ 602.97 \\ 602.97 \\ 901.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

b_i

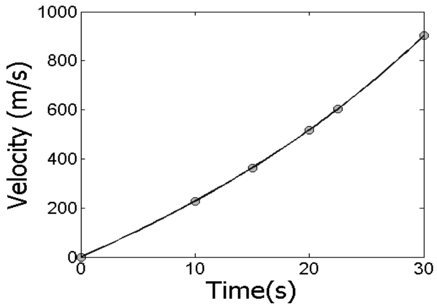
Wartości współczynników

i	a_i	b_i	c_i
1	0	22.704	0
2	0.8888	4.928	88.88
3	-0.1356	35.66	-141.61
4	1.6048	-33.956	554.55
5	0.20889	28.86	-152.13

Proszę sprawdzić czy podane wartości są prawidłowe

Ostateczne rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$



39

Prędkość w określonym punkcie

a) Prędkość w chwili t=16s

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(16) &= -0.1356(16)^2 + 35.66(16) - 141.61 \\
&= 394.24 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość prędkości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

40

Przyspieszenie w określonym punkcie

b) Acceleration at t=16

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888\,t^2 + 4.928\,t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356\,t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

$$a(16) = \frac{d}{dt} v(t)\Big|_{t=16}$$

41

Przyspieszenie w określonym punkcie

Funkcja kwadratowa sklejana prawdziwa w punkcie t=16s jest dana jako

$$v(t) = -0.1356\,t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \le t \le 20$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}(-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61)$$

$$= -0.2712t + 35.66,$$

$$a(16) = -0.2712(16) + 35.66 \quad = 31.321 \text{m/s}^2$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przyspieszenia z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

42

Droga z profilu prędkości

c) Znaleźć drogę przebytą przez rakietę od t=11s do t=16s.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

$$S(16) - S(11) = \int_{11}^{16} v(t)\,dt$$

Droga z profilu prędkości

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20
\end{aligned}
$$

$$S(16) - S(11) = \int_{11}^{16} v(t)\,dt = \int_{11}^{15} v(t)\,dt + \int_{15}^{16} v(t)\,dt$$

$$= \int_{11}^{15} (0.8888t^2 + 4.928t + 88.88)\,dt$$

$$+ \int_{15}^{16} (-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61)\,dt$$

$$= 1595.9 \text{ m}$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przebytej odległości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

45

Rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą

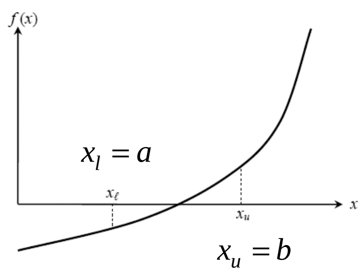
Należy znaleźć pierwiastek równania nieliniowego czyli rozwiązać równanie $f(x) = 0$

Twierdzenie:

Jeżeli funkcja f(x) jest określona i ciągła w danym przedziale <a,b> i funkcja zmienia znak na końcach przedziału

$$f(a)\,f(b) \le 0$$

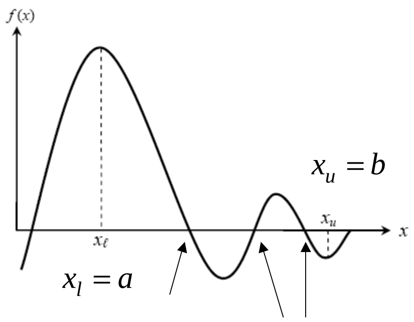
to w przedziale <a,b> znajduje się przynajmniej jeden pojedynczy pierwiastek



46

$$f(a)\,f(b) \leq 0$$

Jeżeli funkcja zmienia znak na granicach przedziału, to w tym przedziale może istnieć więcej pierwiastków

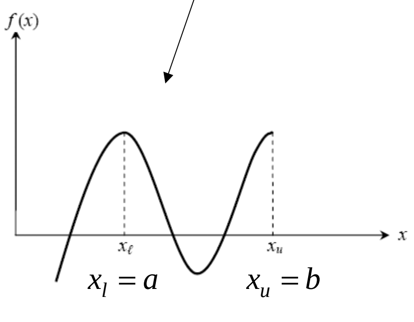


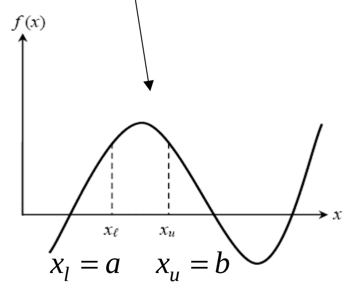
$$f(x) = 0$$

47

$$f(a)\,f(b) \geq 0$$

Jeżeli funkcja nie zmienia znaku na granicach przedziału, to w tym przedziale może istnieć pierwiastek lub nie





48

Metody numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych z jedną niewiadomą

Metody:

- połowienia (bisekcji)
- stycznych (Newtona)
- regula-falsi (fałszywej liniowości)
- metoda siecznych

49

Metoda bisekcji

Przedział <*a*, *b*> dzielimy na połowy punktem

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Jeżeli $f(x_1) = 0$, to x_1 jest szukanym pierwiastkiem równania, jeżeli nie, wówczas z przedziałów $<a, x_1>$ i $<x_1, b>$ wybieramy ten, na końcach którego funkcja $f(x)$ ma różne znaki, tzn. spełniony jest jeden z warunków:

$$f(a) \cdot f(x_1) < 0 \text{ lub } f(x_1) \cdot f(b) < 0 .$$

Uzyskany przedział dzielimy ponownie na połowy i sprawdzamy wartość funkcji $f(x)$ w punkcie środkowym tego przedziału (x_2). W przypadku gdy $f(x_2) \neq 0$ wybieramy nowy przedział badając znaki funkcji $f(x)$ na końcach nowych przedziałów. Proces ten powtarzamy tak długo, aż otrzymamy rozwiązanie dokładne $f(x_n) = 0$, lub osiągnięta zostanie wymagana dokładność rozwiązania.

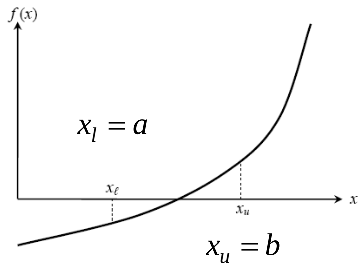
50

Algorytm dla metody bisekcji

Krok 1

Wybieramy x_l and x_u jako dwa potencjalne pierwiastki i sprawdzamy czy:

$f(x_l)\, f(x_u) < 0$, lub inaczej czy f(x) zmienia znak pomiędzy x_l and x_u.



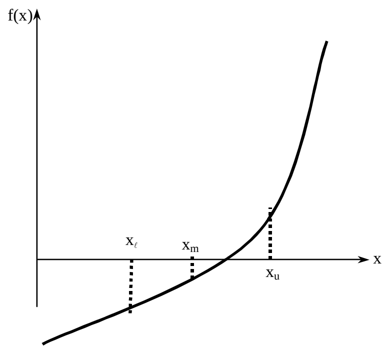
51

Algorytm dla metody bisekcji

Krok 2

Wybieramy pierwiastek, x_m równania f(x) = 0 jako punkt środkowy pomiędzy x_l i x_u czyli

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$



52

Algorytm dla metody bisekcji

Krok 3 Sprawdzamy:

a) jeżeli: $f(x_l)f(x_m) < 0$

to pierwiastek leży pomiędzy x_l i x_m więc przyjmujemy

$$x_l = x_l \qquad x_u = x_m$$

b) jeżeli: $f(x_l)f(x_m) > 0$

to pierwiastek leży pomiędzy x_m i x_u więc przyjmujemy

$$x_l = x_m \qquad x_u = x_u$$

c) jeżeli: $f(x_l)f(x_m) = 0$

to znaleźliśmy pierwiastek – jest nim x_m więc kończymy program

53

Algorytm dla metody bisekcji

Krok 4

w przypadkach a i b znajdujemy nowe przybliżenie pierwiastka

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$

znajdujemy względny błąd przybliżenia

$$|\in_a| = \left|\frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i}\right| \times 100$$

gdzie:

$$x_m^{i-1} = poprzedni \;\; pierwiastek$$

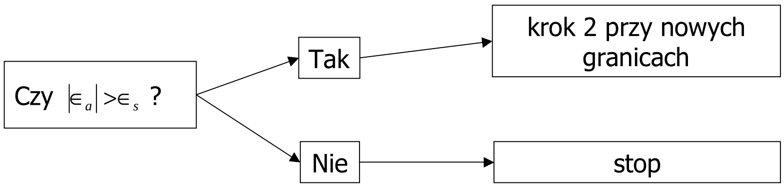
$$x_m^i = nowy \;\; pierwiastek$$

54

Algorytm dla metody bisekcji

Krok 5

Porównanie błędu aproksymacji $|\in_a|$ z definiowaną wcześniej tolerancją $\in_s$



Powinno się sprawdzić czy liczba iteracji nie przekracza zadanej wcześniej liczby iteracji. Jeśli przekracza, to program powinien się zatrzymać.

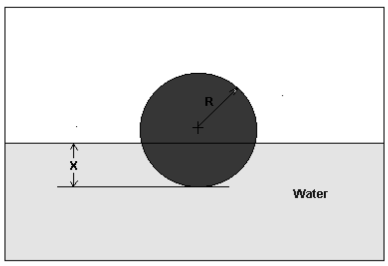
55

Przykład metody bisekcji

Pływająca kula

Z praw fizyki wynika, że kula będzie zanurzona do głębokości x takiej, że

$$0 \le x \le 2R$$
$$0 \le x \le 2(0.055)$$
$$0 \le x \le 0.11$$



$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

56

Przykład metody bisekcji

Zadanie:

a) Zastosować metodę bisekcji (połowienia) aby znaleźć głębokość x, do której kula jest zanurzona w wodzie. Przeprowadzić 3 iteracje aby oszacować pierwiastek równania

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4} = 0$$

b) Znaleźć względny błąd przybliżenia po zakończeniu każdej iteracji i liczbę cyfr znaczących poprawnych w odpowiedzi

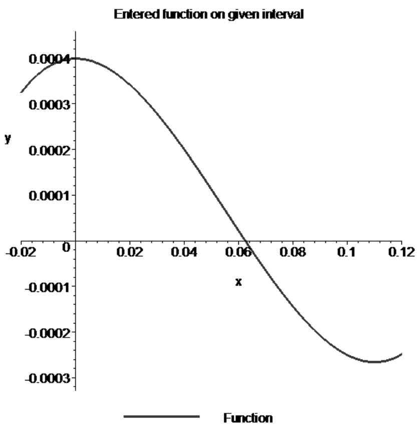
57

Przykład metody bisekcji

Rozwiązanie

Aby zrozumieć problem funkcja f(x) jest pokazana na rysunku

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4}$$



58

Przykład metody bisekcji

Zakładamy $x_\ell = 0.00$

$x_u = 0.11$

Sprawdzamy znak funkcji w x_ℓ i x_u

$$f(x_l) = f(0) = (0)^3 - 0.165(0)^2 + 3.993\times10^{-4} = 3.993\times10^{-4}$$

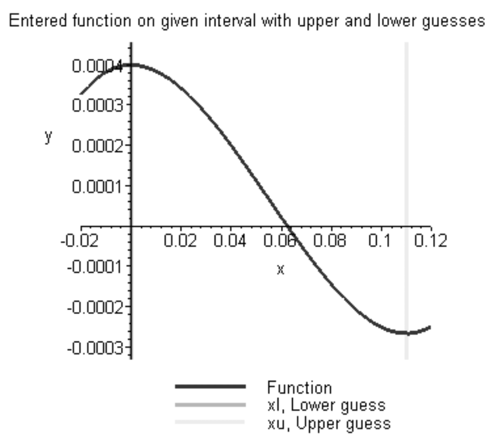
$$f(x_u) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993\times10^{-4} = -2.662\times10^{-4}$$

stąd $f(x_l)f(x_u) = f(0)f(0.11) = (3.993\times10^{-4})(-2.662\times10^{-4}) < 0$

Istnieje przynajmniej jeden pierwiastek równania pomiędzy x_ℓ i x_u, tj. pomiędzy 0 i 0.11

59

Przykład metody bisekcji



60

Przykład metody bisekcji

Iteracja 1

Nowy pierwiastek $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0 + 0.11}{2} = 0.055$$

$$f(x_m) = f(0.055) = (0.055)^3 - 0.165(0.055)^2 + 3.993\times10^{-4} = 6.655\times10^{-5}$$

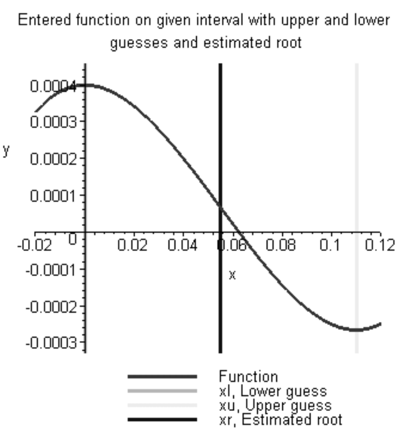
$$f(x_l)f(x_m) = f(0)f(0.055) = (3.993\times10^{-4})(6.655\times10^{-5}) > 0$$

Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_m i x_u, czyli pomiędzy 0.055 i 0.11. Dlatego nowe granice przedziału są:

$$x_l = 0.055,\ x_u = 0.11$$

W tym momencie, względny błąd przybliżenia nie może być obliczony, bo to jest to pierwszy krok $|\in_a|$

Przykład metody bisekcji



Po pierwszej iteracji

Przykład metody bisekcji

Iteracja 2

Nowy pierwiastek $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.11}{2} = 0.0825$$

$$f(x_m) = f(0.0825) = (0.0825)^3 - 0.165(0.0825)^2 + 3.993\times10^{-4} = -1.622\times10^{-4}$$

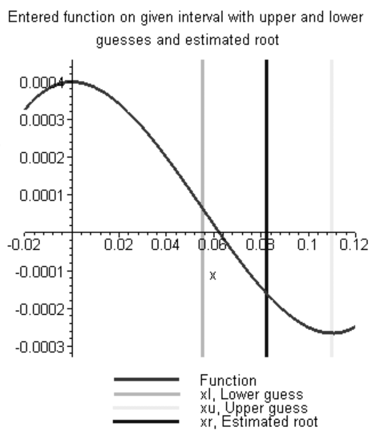
$$f(x_l)f(x_m) = f(0)f(0.055) = (6.655\times10^{-5})(-1.622\times10^{-4}) < 0$$

Stąd nowy pierwiastek leży pomiędzy x_ℓ i x_m, tj. pomiędzy 0.055 i 0.0825. Górna i dolna granica pierwiastka:

$$x_l = 0.055,\ x_u = 0.0825$$

63

Przykład metody bisekcji



Po drugiej iteracji

64

Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po drugiej iteracji wynosi

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.0825 - 0.055}{0.0825}\right| \times 100$$

$$= 33.333\%$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku x_m = 0.0825 gdyż błąd względny jest większy od 5%.

$$|\varepsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m}$$

65

Przykład metody bisekcji

Iteracja 3

Nowy pierwiastek $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.0825}{2} = 0.06875$$

$$f(x_m) = f(0.06875) = (0.06875)^3 - 0.165(0.06875)^2 + 3.993 \times 10^{-4} = -5.563 \times 10^{-5}$$

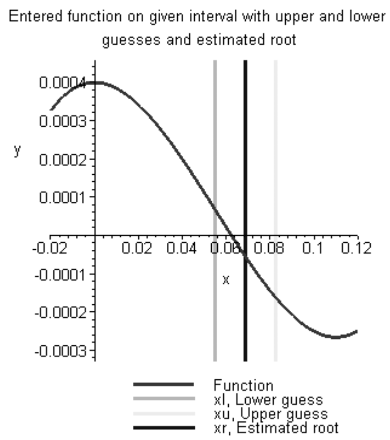
$$f(x_l) f(x_m) = f(0.055) f(0.06875) = \left(6.655 \times 10^{-5}\right)\left(-5.563 \times 10^{-5}\right) < 0$$

Stąd pierwiastek leży pomiędzy x_ℓ i x_m, tj. pomiędzy 0.055 i 0.06875. Stąd granice wynoszą:

$$x_l = 0.055, \;\; x_u = 0.06875$$

66

Przykład metody bisekcji



Po trzeciej iteracji

Przykład metody bisekcji

Błąd względny przybliżenia po trzeciej iteracji wynosi

$$|\in_a| = \left|\frac{x_m^i - x_m^{i-1}}{x_m^i}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06875 - 0.0825}{0.06875}\right| \times 100$$

$$= 20\%$$

Żadna z cyfr znaczących nie jest poprawna w wyniku x_m = 0.06875 gdyż błąd względny jest większy od 5%.

Przykład metody bisekcji

Analiza błędu i cyfr znaczących

Iteracja	x_ℓ	x_u	x_m	$\lvert\in_a\rvert\%$	$f(x_m)$
1	0.00000	0.11	0.055	----------	6.655×10^{-5}
2	0.055	0.11	0.0825	33.33	-1.622×10^{-4}
3	0.055	0.0825	0.06875	20.00	-5.563×10^{-5}
4	0.055	0.06875	0.06188	11.11	4.484×10^{-6}
5	0.06188	0.06875	0.06531	5.263	-2.593×10^{-5}
6	0.06188	0.06531	0.06359	2.702	-1.0804×10^{-5}
7	0.06188	0.06359	0.06273	1.370	-3.176×10^{-6}
8	0.06188	0.06273	0.0623	0.6897	6.497×10^{-7}
9	0.0623	0.06273	0.06252	0.3436	-1.265×10^{-6}
10	0.0623	0.06252	0.06241	0.1721	-3.0768×10^{-7}

69

Przykład metody bisekcji

Liczba poprawnych cyfr znaczących m w wyniku wynosi:

$$\lvert\in_a\rvert \leq 0.5\times10^{2-m}$$

$$0.1721 \leq 0.5\times10^{2-m}$$

$$0.3442 \leq 10^{2-m}$$

$$\log(0.3442) \leq 2-m$$

$$m \leq 2-\log(0.3442) = 2.463$$

tak więc $m = 2$

Liczba poprawnych cyfr znaczących w wyniku 0.06241 po 10-tej iteracji wynosi 2.

70

Zalety bisekcji

- metoda jest zawsze zbieżna
- przedział, w którym znajduje się pierwiastek jest zawsze połowiony

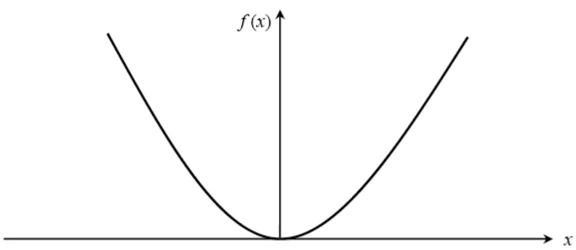
Wady bisekcji

- metoda jest wolnozbieżna
- jeżeli pierwiastek odgadnięty jest bliski rzeczywistemu to szybkość maleje

71

Wady metody bisekcji

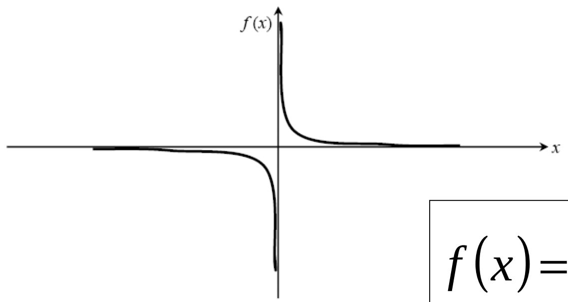
- Jeżeli funkcja f(x) jest taka, że dotyka osi OX to nie można znaleźć pierwiastka metodą bisekcji



$$\boxed{f(x) = x^2}$$

72

Funkcja zmienia znak ale nie ma pierwiastka



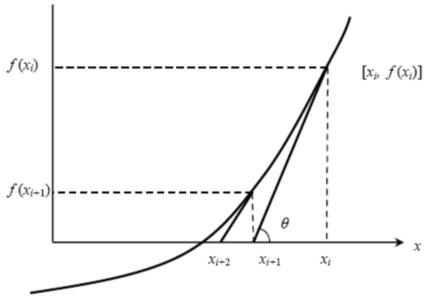
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$$

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona

Jako pierwsze przybliżenie pierwiastka przyjmujemy ten koniec przedziału, w którym **funkcja *f* i jej druga pochodna mają ten sam znak**, tzn. gdy $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$, gdzie $x_0 = a$ lub $x_0 = b$.

Z wybranego końca prowadzimy styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$. Punkt x_1, będący punktem przecięcia stycznej z osią OX jest kolejnym przybliżeniem pierwiastka. Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to z punktu o współrzędnych $(x_1, f(x_1))$ prowadzimy następną styczną. Punkt x_2, w którym styczna przecina się z osią OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie z zadaną dokładnością.

Metoda stycznych – metoda Newtona-Raphsona



Wzór określający kolejne przybliżenia szukanego rozwiązania jest następujący:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Jest to zbieżny ciąg przybliżeń malejący ($x_{n+1} < x_n$) lub rosnący ($x_{n+1} > x_n$) i ograniczony z dołu lub z góry.

75

Metoda regula-falsi – metoda fałszywej liniowości funkcji

Przez punkty $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ prowadzimy sieczną. Punkt x_1, w którym sieczna przecina oś OX jest pierwszym przybliżeniem szukanego pierwiastka. Jeżeli otrzymane w ten sposób przybliżenie jest za mało dokładne, to przez punkty $C = (x_1, f(x_1))$ oraz przez ten z punktów A i B, którego rzędna ma znak przeciwny niż $f(x_1)$ prowadzimy następną cięciwę. Punkt x_2, w którym sieczna przetnie oś OX jest kolejnym przybliżeniem. Proces iteracyjny kończymy, gdy uzyskamy rozwiązanie z zadaną dokładnością.
W przypadku ogólnym metoda nie ma punktu stałego (w każdym kroku korzystamy wówczas ze wzoru podanego przy metodzie siecznych), jednak gdy funkcja f jest wypukła w przedziale $\langle a, b \rangle$, to metoda jest stacjonarna.

76

W przypadku funkcji wypukłej w <*a*, *b*> jeden z początkowych końców przedziału jest punktem stałym iteracji i wszystkie cięciwy przechodzą przez ten punkt. Punkt stały iteracji wyznaczamy, sprawdzając znaki pierwszej i drugiej pochodnej funkcji *f*; jeżeli znaki są takie same, tzn. $f' \cdot f'' > 0$, wówczas nieruchomy jest punkt *B*, w przeciwnym wypadku ($f' \cdot f'' < 0$) - nieruchomy jest punkt *A*. Kolejne wyrazy ciągu przybliżeń szukanego pierwiastka można określić wtedy jednym ze wzorów:

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{f(b) \cdot x_n - f(x_n) \cdot b}{f(b) - f(x_n)}$$

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{f(a) \cdot x_n - f(x_n) \cdot a}{f(a) - f(x_n)}$$

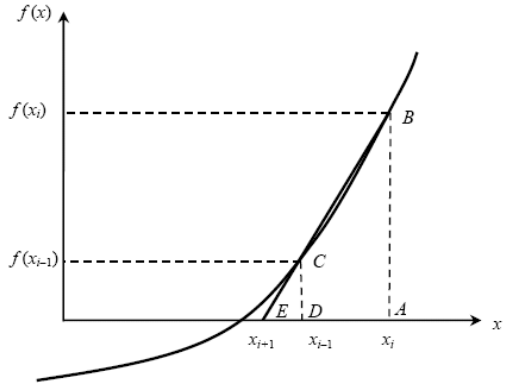
Metoda siecznych

Jest to ulepszona wersja metody *regula-falsi*. W każdym kroku iteracji (z wyjątkiem początkowego) rezygnujemy ze sprawdzania warunku, aby funkcja $f(x)$ miała różne znaki w punktach, wyznaczających kolejną cięciwę. W celu obliczenia przybliżenia x_n korzystamy z dwóch wcześniej wyznaczonych punktów: x_{n-1} i x_{n-2} . Wzór określający ciąg przybliżeń jest następujący:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = \frac{f(x_{n-1}) \cdot x_n - f(x_n) \cdot x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Zbieżność tej metody jest znacznie szybsza niż metody *regula-falsi*, ale czasami może nie być zbieżna do pierwiastka (np. gdy początkowe przybliżenia nie leżą dość blisko pierwiastka). Dodatkowo ciąg przybliżeń powinien być malejący (jeżeli odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami jest tego samego rzędu co oszacowanie błędu, jakim jest obarczona, to następne przybliżenie może być całkowicie błędne).

Metoda siecznych



79

Przypomnienie:

•jeżeli *f'*(*x*) jest określone, to:
f(*x*) jest rosnąca dla *f'*(*x*)>0,
f(*x*) jest malejąca dla *f'*(*x*)<0;

•jeżeli *f'*(*x*)=0, to funkcja ma ekstremum w tym punkcie (styczna jest wtedy równoległa do osi OX),

•jeżeli *f''*(*x*)=0,
to funkcja ma punkt przegięcia w tym punkcie (tzn. punkt, w którym krzywa *f*(*x*) przechodzi z jednej strony stycznej na drugą) .

80