

## WYKŁADOWCA:

dr hab. inż. Katarzyna **ZAKRZEWSKA**, prof.  
AGH

KATEDRA ELEKTRONIKI, paw. C-1, p. 317, III p. tel. 617 29 01,

tel. kom. 0 601 51 33 35

[zak@agh.edu.pl](mailto:zak@agh.edu.pl)

<http://home.agh.edu.pl/~zak>

## ZASADY ZALICZANIA PRZEDMIOTU:

- Obecność i aktywność na zajęciach (wykłady, ćwiczenia, laboratorium)
- Pozytywna ocena końcowa ( $\geq 3.0$ ) z ćwiczeń rachunkowych i laboratorium
- Egzamin pisemny i ustny po każdym semestrze. Na ocenę końcową przedmiotu wpływają wszystkie oceny oraz wyniki testów na wykładzie (egz/cw/testy: 50/35/15)

## MATERIAŁY DO WYKŁADU:

- TEKST WYKŁADU
- PODRĘCZNIKI:
  1. D.Halliday, R. Resnick, J.Walker, Podstawy Fizyki, PWN W-wa, 2003 5-tomów (w skrócie HRW)
  2. C.Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman  
Mechanika, PWN W-wa 1975

## RACHUNEK WEKTOROWY W FIZYCE

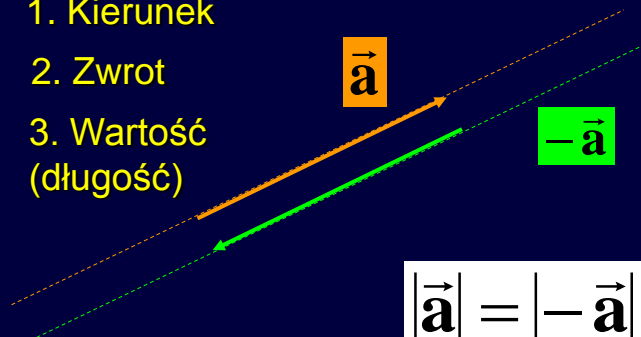
## Plan

- Pojęcie wektora
- Działania na wektorach
- Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych
- Przykłady wykorzystania wektorów i działań na nich w fizyce

## Pojęcie wektora

Wektor ma trzy cechy:

1. Kierunek
2. Zwrot
3. Wartość (długość)



$$|\vec{a}| = |-\vec{a}| = a$$

## DŁUGOŚĆ WEKTORA

Oś liczbowa

Długość wektora

Wersor jest to wektor jednostkowy

$|\hat{\mathbf{a}}| = 1$

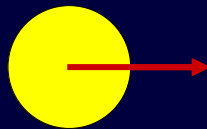
Ogólnie:

$$\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}| \hat{\mathbf{a}} = a \hat{\mathbf{a}}$$

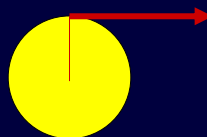
Wykład 1 7

## A punkt przyłożenia?

Ruch  
postępowy



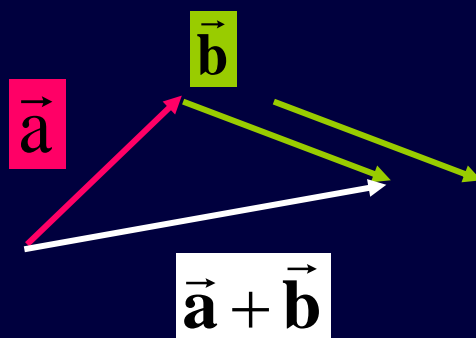
Ruch  
obrotowy



## Działania na wektorach

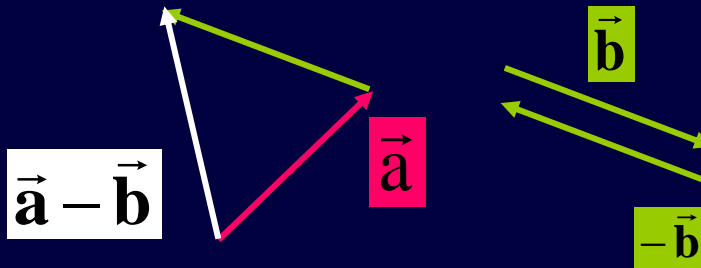
- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie:
  - Iloczyn wektora przez liczbę
  - Iloczyn skalarny dwóch wektorów
  - Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

## Dodawanie wektorów



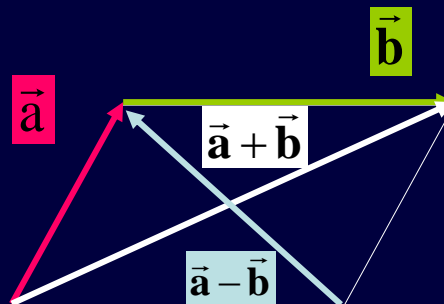
## Odejmowanie wektorów

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

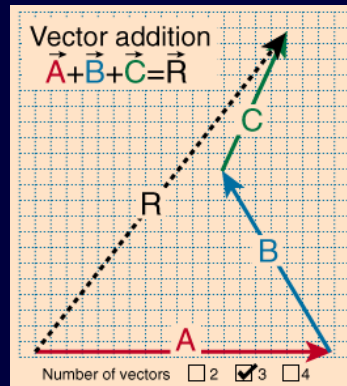


Wektor przeciwny

## Reguła równoległoboku

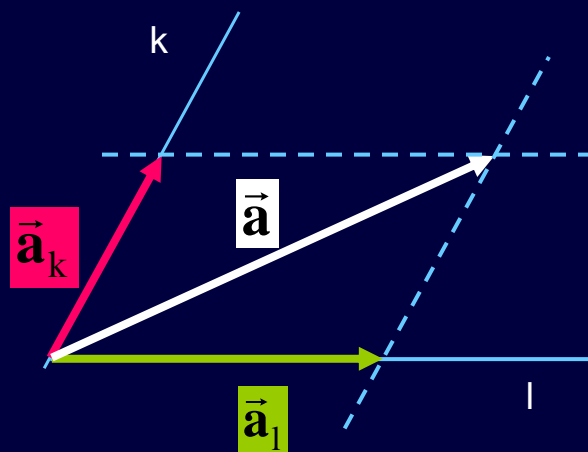


## WEKTOR WYPADKOWY



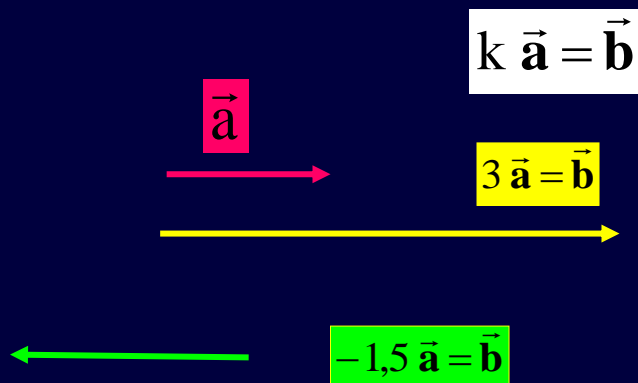
np. wypadkowe  
przemieszczenie,  
wypadkowa siła

## Rozkład wektora



$$\vec{a} = \vec{a}_k + \vec{a}_l$$

## ILOCZYN WEKTORA PRZEZ LICZBĘ



Wynik działania jest wektorem

Wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są równoległe  
(mają ten sam kierunek)

$$k \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

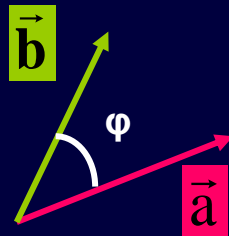
Gdy  $k > 0$ , zwroty zgodne

Gdy  $k < 0$ , zwroty przeciwne

Wartość (długość) wektora:  $b = |k|a$



## ILOCZYN SKALARNY - DEFINICJA



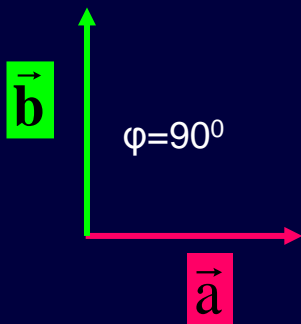
$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \varphi$$

Wynik działania jest liczbą:  
dodatnią, ujemną (kiedy?) lub  
nawet zero

Działanie jest przemienne

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

## ILOCZYN SKALARNY - KONSEKWENCJE



$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos 90^\circ = 0$$

Jeżeli wektory są prostopadłe  
to ich iloczyn skalarny jest  
równy 0

Służy do sprawdzania  
prostopadłości wektorów

## ILOCZYN SKALARNY - KONSEKWENCJE

$$\varphi=0^\circ$$

$$\vec{a}$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = a^2$$



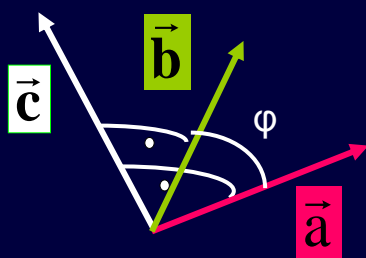
$$\vec{a}$$

Służy do określenia długości wektora

$$a = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

## ILOCZYN WEKTOROWY - DEFINICJA

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



Wynik działania jest wektorem. Należy zatem podać trzy jego cechy, nie tylko wartość ale przede wszystkim kierunek (!!!!) i zwrot

## Iloczyn wektorowy - definicja

1. Kierunek wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  czyli

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$

i

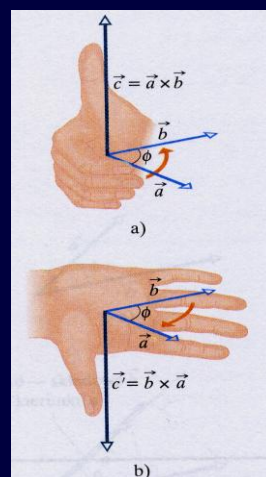
$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

## Iloczyn wektorowy - definicja

2. Zwrot wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$  określamy regułą prawej ręki lub śruby prawoskrętnej

Działanie to nie jest przemienne

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



## Iloczyn wektorowy - definicja

3. Długość wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$   
to liczba:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \varphi$$

Uwaga: Jeżeli przynajmniej jeden z wektorów jest zerowy lub wektory mają ten sam kierunek (pokrywają się lub są równoległe) to  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

W szczególności  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

**DLACZEGO?**

Bo jeżeli jest tylko jeden wektor to nie można utworzyć płaszczyzny, do której wektor będący wynikiem iloczynu wektorowego byłby prostopadły.

Jak widać, jest to problem kierunku a nie wartości wektora.

## Iloczyn wektorowy - konsekwencje

1. Jeżeli

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

2. Służy do sprawdzania równoległości wektorów

## Algebra wektorów

Rozdzielność mnożenia skalarnego i wektorowego  
względem dodawania (odejmowania)

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

**Dzielić przez wektor nie wolno !!!**



## Algebra wektorów

### Przykład 1.

Dane jest równanie wektorowe:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$

Znaleźć wektor  $\vec{x}$

Rozwiązanie:

## Algebra wektorów

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}[(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{b}] = 0$$

Rozwiązanie:

1. Z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}(\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{b}) = 0$$

2. Ale:  $\vec{b} \circ \vec{b} = b^2$

3. Dodając i odejmując stronami jak w „zwykłym” równaniu:

$$\vec{x}(\vec{a} \circ \vec{b} + b^2) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

4. Mamy prawo podzielić przez wyrażenie w nawiasie po upewnieniu się, że jest liczbą:

$$\vec{x} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{\vec{a} \circ \vec{b} + b^2}$$

## Dowodzenie twierdzeń

Rachunek wektorowy ułatwia dowodzenie twierdzeń geometrycznych.

### Przykład 2.

Udowodnić, że dwa wektory muszą mieć równe długości jeżeli ich suma jest prostopadła do ich różnicy.

## Dowód

1. Jeżeli:  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$

2. To (z definicji iloczynu skalarnego):

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

3. Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = 0$$

## Dowód

4. Iloczyn skalarny jest przemienny, a zatem:

$$-\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} = 0$$

5. I:

$$\vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = 0$$

redukuje się do:

$$a^2 - b^2 = 0$$

6. Zatem:

$$a = b$$

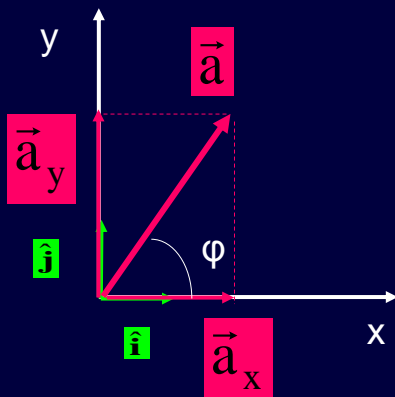
c.n.d.

## Zadanie 2-1

Stosując rachunek wektorowy udowodnić twierdzenie kosinusów.



## Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych – przypadek dwuwymiarowy



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

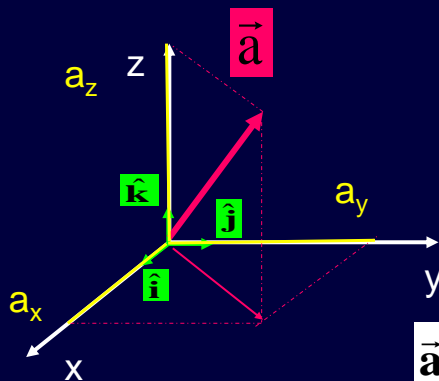
Tw. Pitagorasa

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Trygonometria

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_y}{a_x}$$

## Wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych – 3D



$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{i} \circ \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \circ \hat{i} = 1$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

### Zadanie 2-2

Stosując definicje iloczynów skalarnego i wektorowego oblicz:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}$$

oraz

$$\hat{\mathbf{i}} \circ \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}} \circ \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}} \circ \hat{\mathbf{j}}$$

## Działania na wektorach w układzie kartezjańskim

## 1. Dodawanie wektorów

$$\vec{a} + \vec{b}$$

Wynik jest wektorem

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}$$

## 2. Równość wektorów

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \text{lub} \quad \vec{a} \equiv \vec{b}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{array} \right.$$

### 3. Iloczyn skalarny

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O BOWIĄZUJE TYLKO W UKŁADZIE  
KARTEZJAŃSKIM - DLACZEGO?

### 4. Iloczyn wektorowy

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Wynik

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

# ZASTOSOWANIE RACHUNKU WEKTOROWEGO W FIZYCE

## Wielkości fizyczne

Długość, czas, siła, masa, prędkość, przyspieszenie, temperatura, ciśnienie, natężenie pola elektrycznego, natężenie prądu elektrycznego, strumień pola magnetycznego

### SKALARY



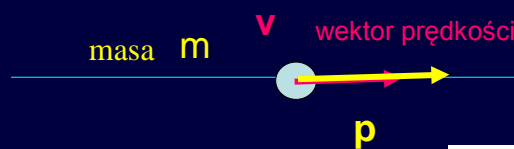
### WEKTORY



## Mnożenie wektora przez liczbę:

Pęd: definicja  $\vec{p} = m\vec{v}$

Pytanie: Jaki jest kierunek wektora pędu?

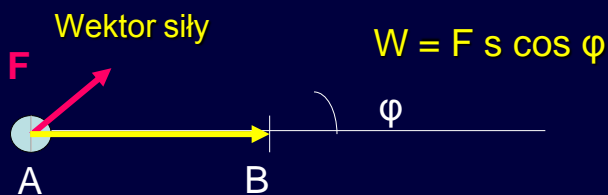


Odpowiedź:

$$\vec{p} \parallel \vec{v}$$

## Iloczyn skalarny

Praca  $W = \vec{F} \circ \vec{s}$



Wektor przesunięcia

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB}$$

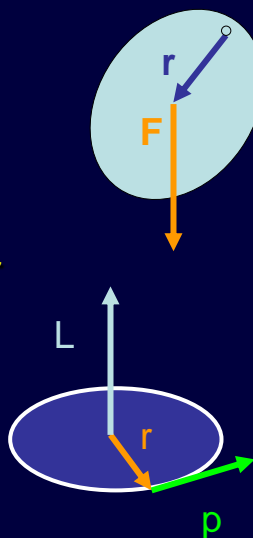
## Iloczyn wektorowy:

### 1. Moment siły (ang. torque)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

### 2. Moment pędu (ang. angular momentum)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

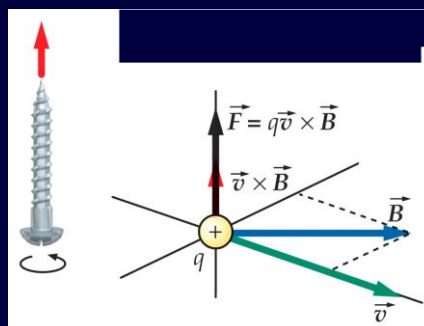


## Iloczyn wektorowy:

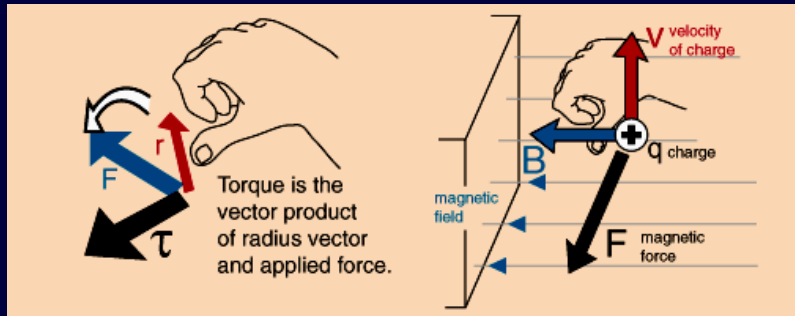
### 3. Siła Lorentza (ang. magnetic force) – siła działająca na ładunek $q$ poruszający się w polu magnetycznym o wektorze indukcji $B$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

To jest definicja wektora indukcji pola magnetycznego



## Określanie zwrotu iloczynu wektorowego :



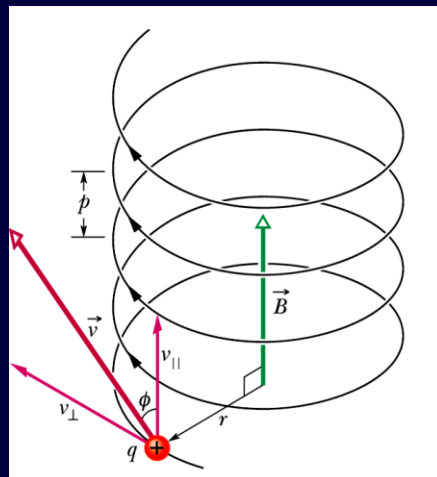
## Pole magnetyczne zakrzywia tor ruchu ładunku elektrycznego.

$p$  - skok śruby

$$p = v_{\parallel} T$$

$r$  - promień śruby

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp} B$$





Zadanie 2-4

Rozważyć szczególne przypadki ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym, gdy:

- a) wektor prędkości jest równoległy do wektora indukcji magnetycznej
- b) wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej

Odpowiedzieć na pytania: jaka siła działa na cząstkę i jaka krzywa opisuje tor ruchu cząstki.

Zadanie 2-5

Zastanowić się nad innymi zastosowaniami rachunku wektorowego zarówno w matematyce jak i fizyce. Poszukać informacji na temat iloczynu mieszanego oraz podwójnego iloczynu wektorowego czyli:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Pole magnetyczne nie zmienia energii kinetycznej cząstki naładowanej poruszającej się w tym polu

$$E_k = \frac{m}{2} \vec{v} \circ \vec{v}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \vec{v} \circ \vec{v} = m \vec{v} \circ \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ale

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F}$$

czyli

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \circ \vec{F} = q \vec{v} \circ (\underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_0)$$

0

$$E_k = \text{const}$$

## TEST 2P

1. Wektor o długości 20 dodano do wektora o długości 25. Długość wektora będącego sumą wektorów może być równa:

A) zero B) 3 C) 12 D) 47 E) 50

2. Wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  leżą na płaszczyźnie xy. Możemy wnosić, że  $\vec{a} = \vec{b}$  jeżeli:

A)  $a_x^2 + a_y^2 = b_x^2 + b_y^2$

B)  $a_x + a_y = b_x + b_y$

C)  $a_x = b_x$  i  $a_y = b_y$

D)  $a_y / a_x = b_y / b_x$

E)  $a_x = a_y$  i  $b_x = b_y$

3. Jeżeli  $\vec{a} = (6m)\hat{i} - (8m)\hat{j}$  to  $4\vec{a}$  ma wartość:

- A) 10 m    B) 20 m    C) 30 m    D) 40 m    E) 50 m

4. Kąt pomiędzy wektorem  $\vec{a} = (-25m)\hat{i} + (45m)\hat{j}$  a dodatnim kierunkiem osi OX wynosi:

- A)  $29^\circ$     B)  $61^\circ$     C)  $119^\circ$     D)  $151^\circ$     E)  $209^\circ$

5. Dwa wektory, których początki się pokrywają, tworzą pewien kąt. Jeżeli kąt pomiędzy tymi wektorami zwiększy się o  $20^\circ$  to iloczyn skalarny tych dwóch wektorów zmienia znak na przeciwny. Kąt, który początkowo tworzyły te dwa wektory wynosi:

- A) 0    B)  $60^\circ$     C)  $70^\circ$     D)  $80^\circ$     E)  $90^\circ$

6. Dwa wektory  $\vec{a} = (3m)\hat{i} - (2m)\hat{j}$      $\vec{b} = (2m)\hat{i} + (3m)\hat{j} - (2m)\hat{k}$  wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę. Który z wektorów jest prostopadły do tej płaszczyzny:

- A)  $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$     D)  $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} - (13m)\hat{k}$

- B)  $(-4m)\hat{i} + (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$     E)  $(4m)\hat{i} + (6m)\hat{j}$

- C)  $(4m)\hat{i} - (6m)\hat{j} + (13m)\hat{k}$

7. Wartość  $\hat{i} \circ (\hat{j} \times \hat{k})$  wynosi:

- A) zero    B) +1    C) -1    D) 3    E)  $\sqrt{3}$

## TEST 2A

1. A vector of magnitude 3 CANNOT be added to a vector of magnitude 4 so that the magnitude of the resultant is:  
A) zero    B) 1    C) 3    D) 5    E) 7
2. A vector has a magnitude of 12. When its tail is at the origin it lies between the positive x axis and negative y axis and makes an angle of  $30^\circ$  with the x axis. Its y component is:  
A)  $6\sqrt{3}$     B)  $-6\sqrt{3}$     C) 6    D) -6    E) 12
3. A vector has a component of 10 in the +x direction, a component of 10 m in the +y direction, and a component of 5 m in the +z direction. The magnitude of this vector is:  
A) zero    B) 15 m    C) 20 m    D) 25 m    E) 225 m

4. Two vectors have magnitudes of 10 and 15. The angle between them when they are drawn with their tails at the same point is  $65^\circ$ . The component of the longer vector along the line of the shorter is:  
A) 0    B) 4.2    C) 6.3    D) 9.1    E) 14
5. If the magnitude of the sum of two vectors is less than the magnitude of either vector, then:  
A) the scalar product of the vectors must be negative  
B) the scalar product of the vectors must be positive  
C) the vectors must be parallel and in opposite directions  
D) the vectors must be parallel and in the same direction  
E) none of the above

## Podsumowanie

Działanie	Wynik	Metoda postępowania	Zastosowanie
dodawanie $\vec{a} + \vec{b}$	wektor	reguła równoległoboku	wypadkowe przemieszczenie, wypadkowa siła
odejmowanie $\vec{a} - \vec{b}$	wektor		algebra wektorów, dowodzenie twierdzeń
rozkład wektora	wektory składowe		równia pochyła, rzut ukośny, itp.

Działanie	Wynik	Definicja	Wzór w układzie kartezyj.	W matematyce	W fizyce
iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$	skalar	$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \varphi$	$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	prostokątność wektorów	praca, energia np. kinetyczna
iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$	wektor	$\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \varphi \hat{n}$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	równoległość wektorów	moment pędu, moment siły, siła Lorentza
mnożenie wektora przez liczbę $k \vec{a}$	wektor	$k \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ 1. kierunek 2. zwrot 3. wartość $ka$	$ka_x = b_x$ $ka_y = b_y$ $ka_z = b_z$	równoległość wektorów	pęd, II zasada dynamiki