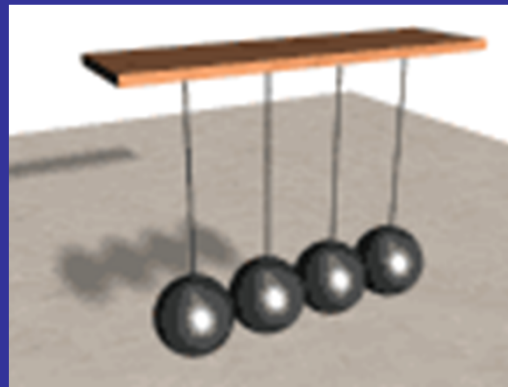
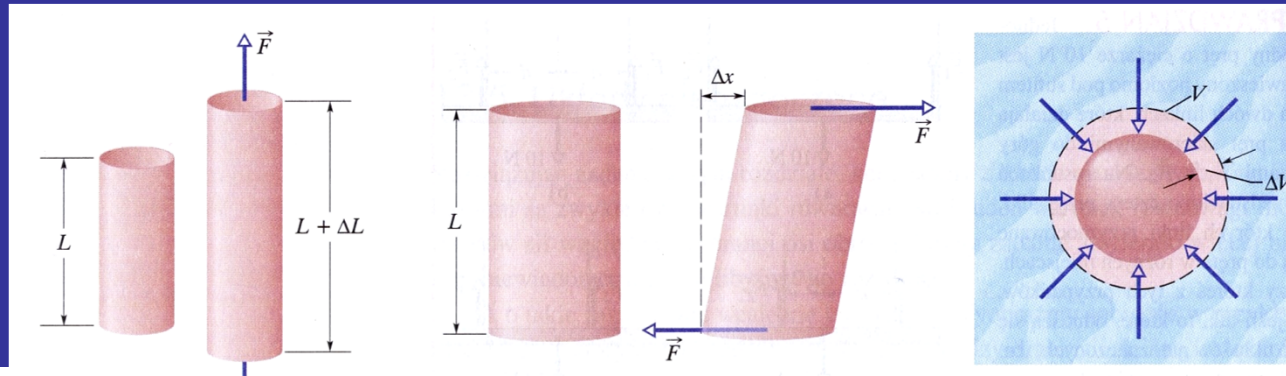


DRGANIA – OSCYLATOR HARMONICZNY



Własności sprężyste ciał stałych



**naprężenie
rozciągające**

**naprężenie
ścinające**

**naprężenie
objętościowe**

Względne odkształcenie ciała zależy od naprężenia
naprężenie to siła odkształcająca odniesiona do jednostki pola powierzchni,
na jaką działa

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie})$$

gdy próbka powraca do pierwotnych wymiarów po usunięciu naprężenia

Rozciąganie i ściskanie

Naprężenie σ definiuje się jako: $\sigma = \frac{F}{S}$

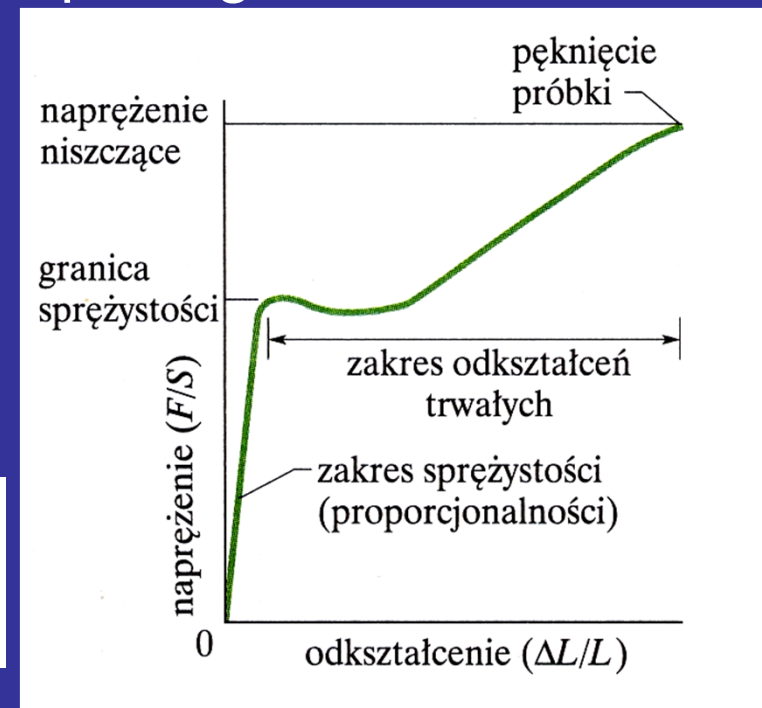
gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa $\Delta L/L$ – względna zmiana długości

W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje prawo Hooke'a

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

E- moduł Younga



Wybrane własności sprężyste pewnych materiałów

Material	Gęstość ρ (kg/cm ³)	Moduł Younga E (10 ⁹ N/m ²)	Naprężenie niszczące (10 ⁶ N/m ²)	Granice sprężystości (10 ⁶ N/m ²)
Stal ^a	7860	200	400	250
Al	2710	70	110	95
Beton ^c	2320	30	40 ^b	-
Kość	1900	9 ^b	170 ^b	-

^a stal konstrukcyjna ASTM-A36, ^b przy ściskaniu, ^c o
dużej wytrzymałości

Naprężenie ścinające

W przypadku odkształcenia poprzecznego (ścianania) naprężenie σ definiuje się również jako:

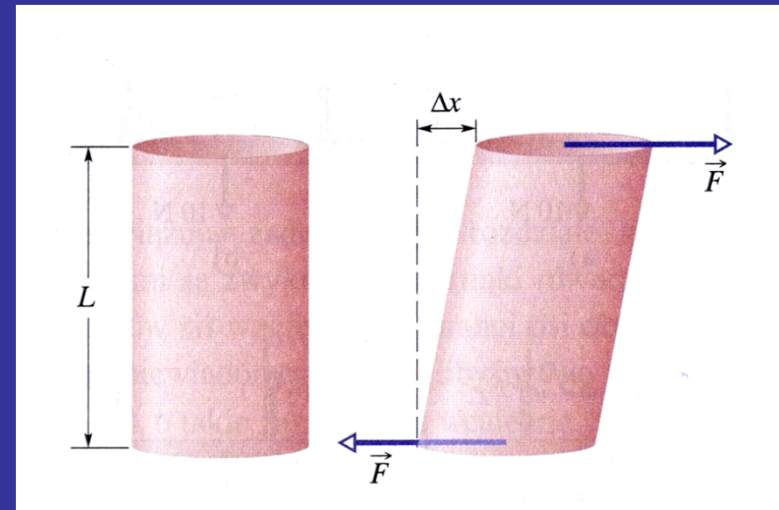
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ale siła działa równoległe do powierzchni S

Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa $\Delta x/L$

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L}$$

moduł ścianania



Naprężenie objętościowe

Naprężeniem jest ciśnienie p cieczy

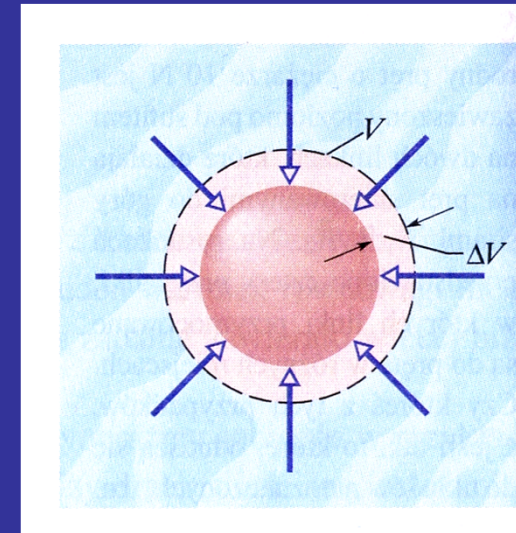
$$p = \frac{F}{S}$$

Jednostką ciśnienia jest $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Miarą odkształcenia jest względna zmiana objętości $\Delta V/V$

$$p = K \frac{\Delta V}{V}$$

K - moduł sprężystości objętościowej lub moduł ściśliwości



Przykład 1 Na dnie Oceanu Spokojnego, którego średnia głębokość jest równa około 4000 m, panuje ciśnienie $4,0 \cdot 10^7$ N/m². Ile wynosi, związana z tym ciśnieniem, względna zmiana objętości $\Delta V/V$ wody a ile kulki wykonanej ze stali? Moduł ścisłości wynosi $2,2 \cdot 10^9$ N/m² dla wody, a dla stali $16 \cdot 10^{10}$ N/m².

Rozwiązanie:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

dla wody

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{2,2 \cdot 10^9} = 1,8\%$$

dla kuli stalowej

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \cdot 10^7}{16 \cdot 10^{10}} = 0,025\%$$

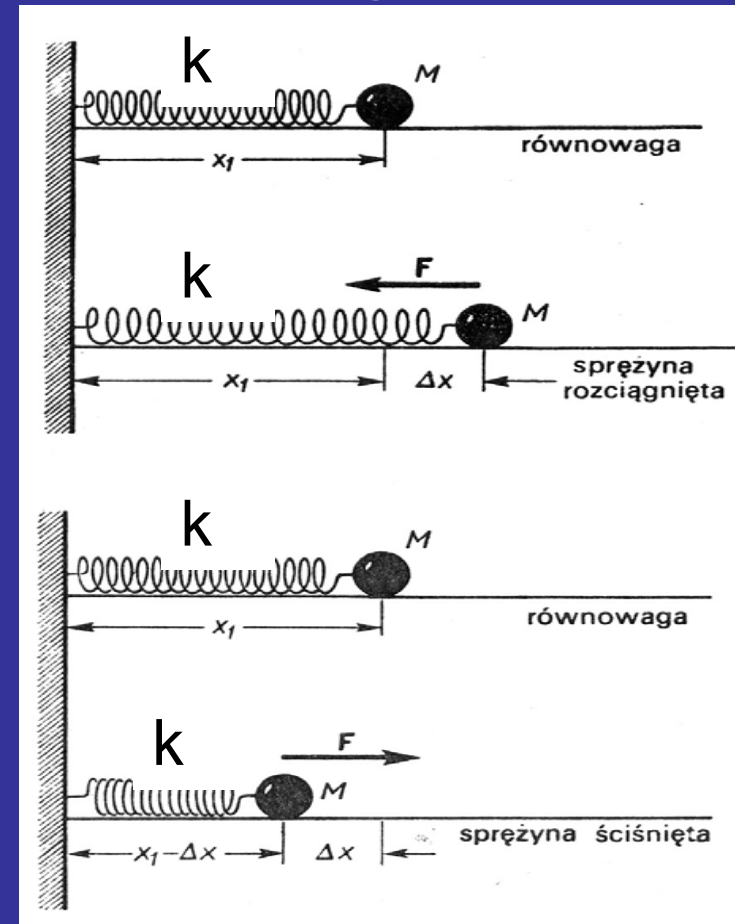
Oscylator harmoniczny

siła harmoniczna

$$F = -kx$$

- siła F proporcjonalna do wychylenia x z położenia równowagi
- zwrot siły: do położenia równowagi

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \quad \longrightarrow \quad k = ES / L$$



**Tylko dla małych wychyleń x
z położenia równowagi !!!**

Równanie ruchu otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona

$$F_{\text{wyp}} = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_{\text{wyp}} = F = -kx$$

porównując i przekształcając

otrzymujemy ogólne równanie różniczkowe oscylatora harmonicznego – równanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach, jednorodne

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Po podzieleniu przez m , przyjmując, że

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

mamy

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Przypomnienie:

Równanie oscylatora harmonicznego

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

wyprowadziliśmy również z zasady zachowania energii mechanicznej

oscylator harmoniczny
prosty (bez tłumienia i
bez wymuszenia)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

częstość drgań własnych

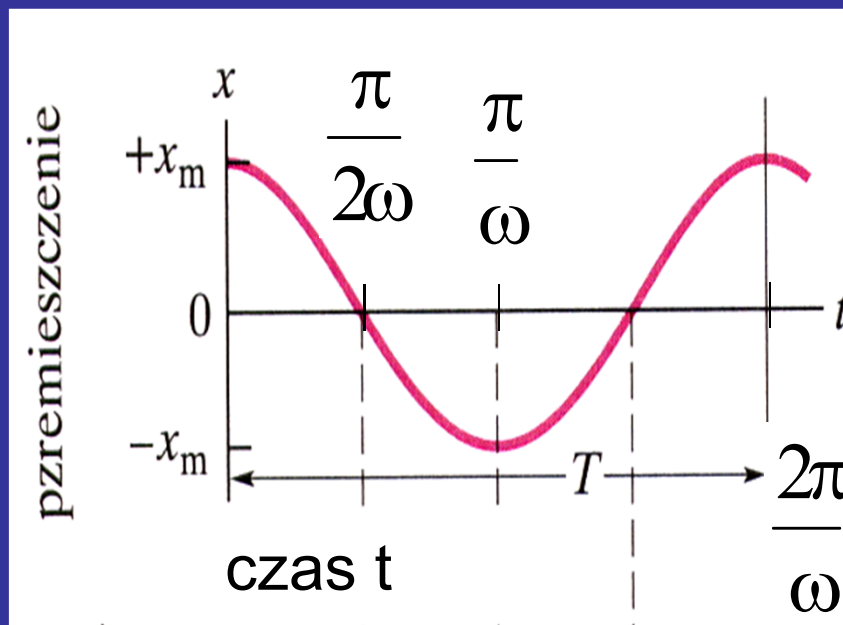
Częstość drgań własnych zależy wyłącznie od parametrów układu drgającego. Dla układu masa m – sprężyna o stałej sprężystości k :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wzór ten pozwala zawsze określić okres drgań T

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego prostego



Okres ruchu T = czas, w jakim wykonywane jest jedno pełne drganie

$$T = \frac{1}{\nu}$$

wykład 10

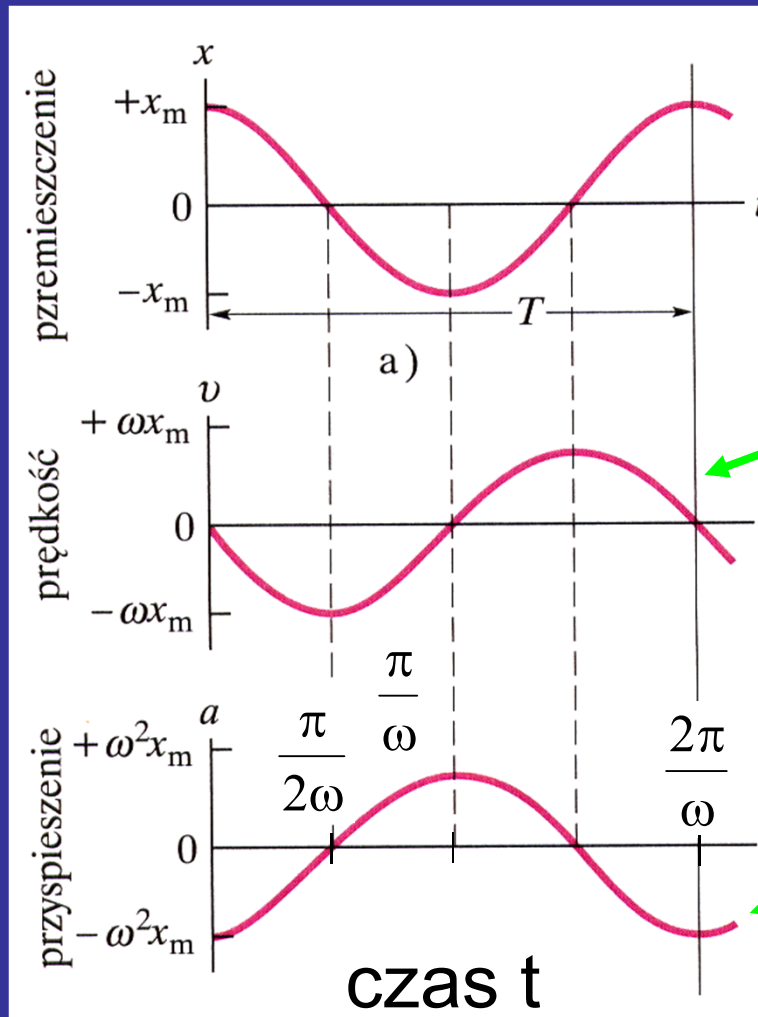
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

wychylenie z położenia równowagi
 amplituda
 częstotać
 faza początkowa

Amplituda = wartość bezwzględna maksymalnego wychylenia z położenia równowagi

częstotliwość = liczba drgań (cykli) na sekundę (jednostka 1Hz)

Prędkość w ruchu harmonicznym



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x_m \cos(\omega t + \varphi))$$

$$v(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

Przyspieszenie

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (-x_m \omega \sin(\omega t + \varphi))$$

$$a(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

W ruchu harmonicznym przyspieszenie jest proporcjonalne do przemieszczenia ale ma przeciwny znak

Sprawdzenie czy proponowana funkcja

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

jest rozwiązaniem równania ogólnego:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Należy podstawić:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a = -\omega^2 x$$

do równania ogólnego

Otrzymujemy: $-\omega^2 x + \omega_0^2 x = 0$ z czego wynika, że

Częstość drgań ω prostego oscylatora harmonicznego jest równa częstości drgań własnych ω_0

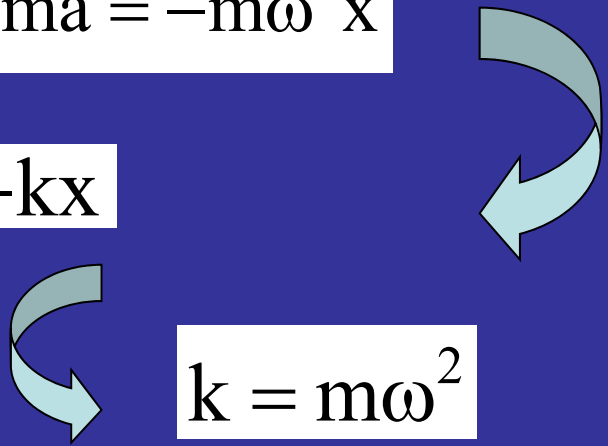
$$\omega = \omega_0$$

Siła w ruchu harmonicznym

przyspieszenie $a = -\omega^2 x$

Z II zasady dynamiki: $F_{\text{wyp}} = ma = -m\omega^2 x$

ale siła harmoniczna: $F = -kx$


$$k = m\omega^2$$

Wiemy, że

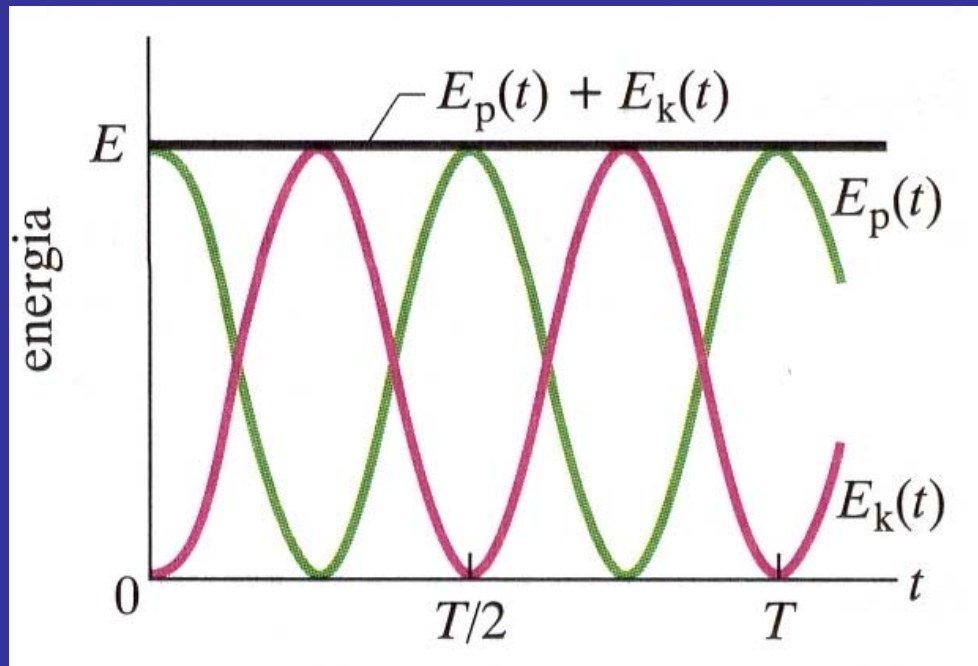
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

czyli
jeszcze raz:

$$\omega = \omega_0$$

Energia w ruchu harmonicznym

energia potencjalna sprężystości



$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = m \frac{v^2}{2}$$

Całkowita energia w ruchu harmonicznym

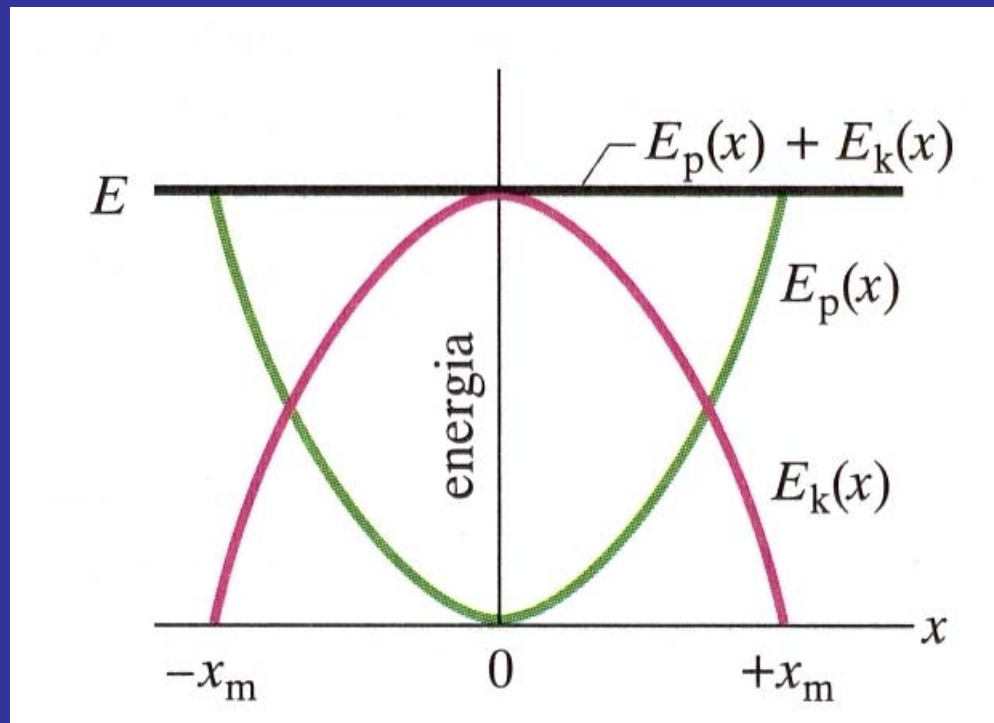
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

ale $k = m\omega^2$ czyli

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2} k x_m^2 = \text{const}$$

Całkowita energia mechaniczna prostego oscylatora harmonicznego jest zachowana

Zależność energii oscylatora od wychylenia z położenia równowagi



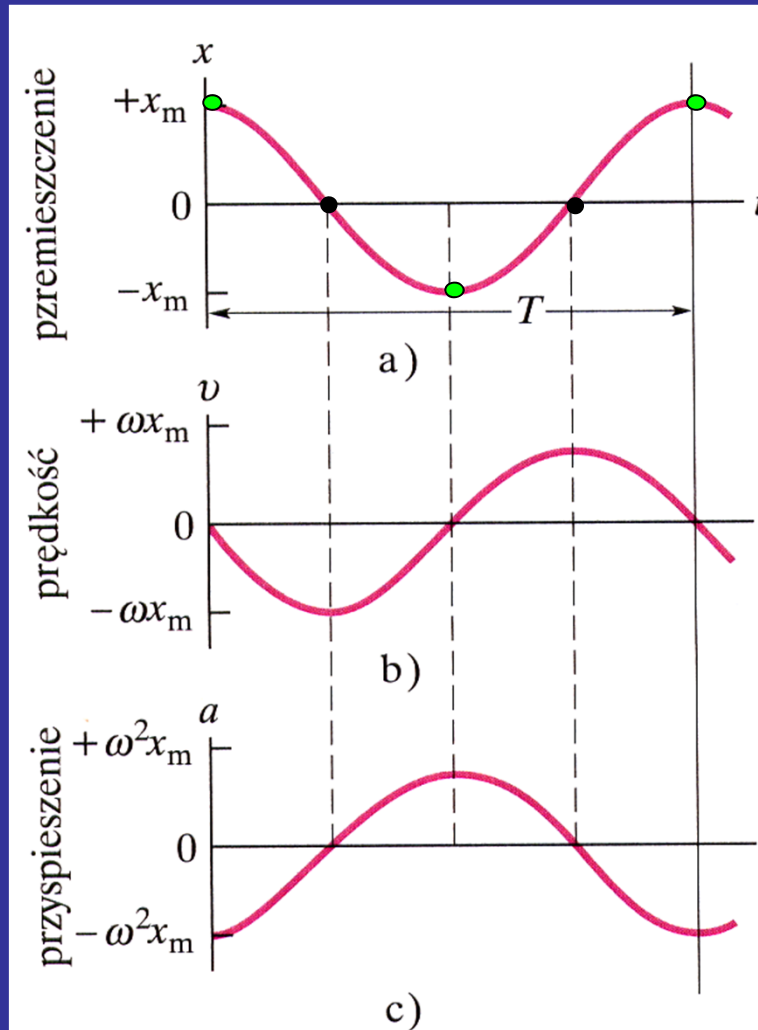
odwrócona parabola

$$E_p = k \frac{x^2}{2} \quad \text{parabola}$$

$$E_k = E - E_p$$

$$E_k = \frac{1}{2} k x_m^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} k (x_m^2 - x^2)$$



Przy przechodzeniu przez położenie równowagi:

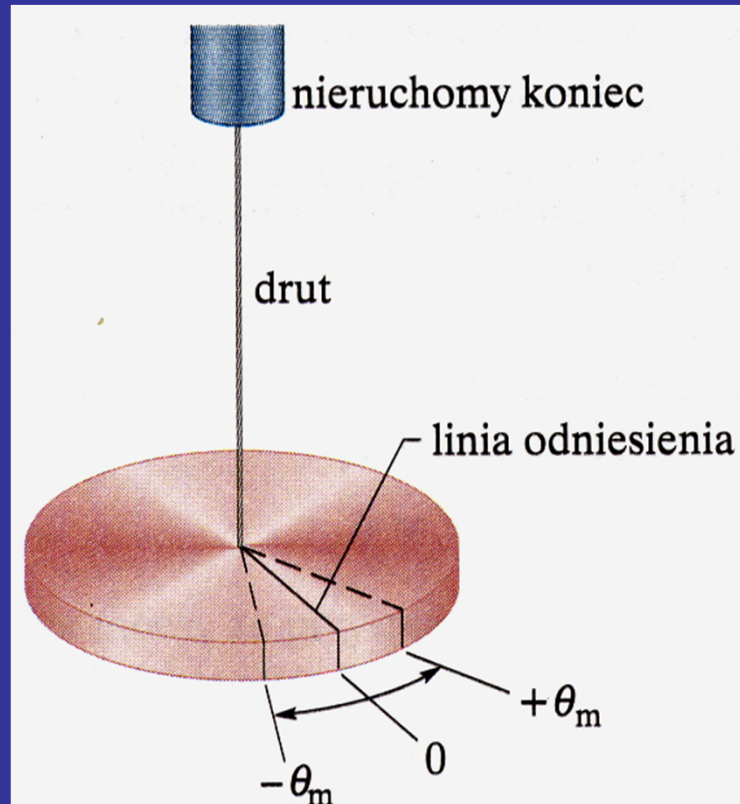
- prędkość jest największa
- przyspieszenie wynosi zero
- siła wynosi zero
- energia kinetyczna jest największa

Przy maksymalnym wychyleniu z położenia równowagi:

- prędkość wynosi zero i zmienia znak
- przyspieszenie jest największe
- siła jest maksymalna
- energia potencjalna jest największa

PRZYKŁADY OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH

Wahadło torsyjne



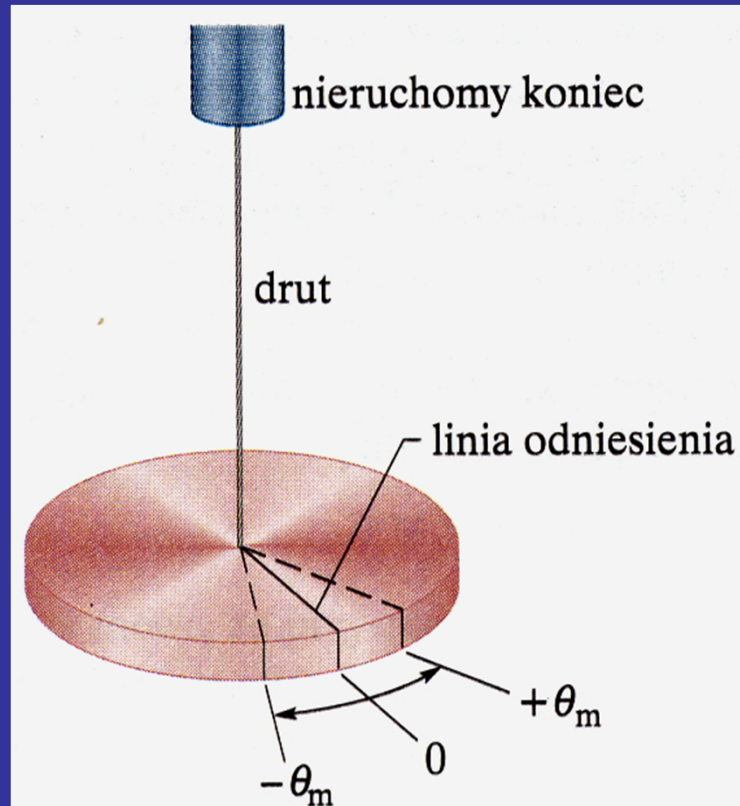
$$\tau = -\kappa\theta$$

moment kierujący κ zależy od długości, średnicy i materiału z jakiego wykonano drut

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau$$

równanie ruchu z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Wahadło torsyjne



$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa\theta = 0$$

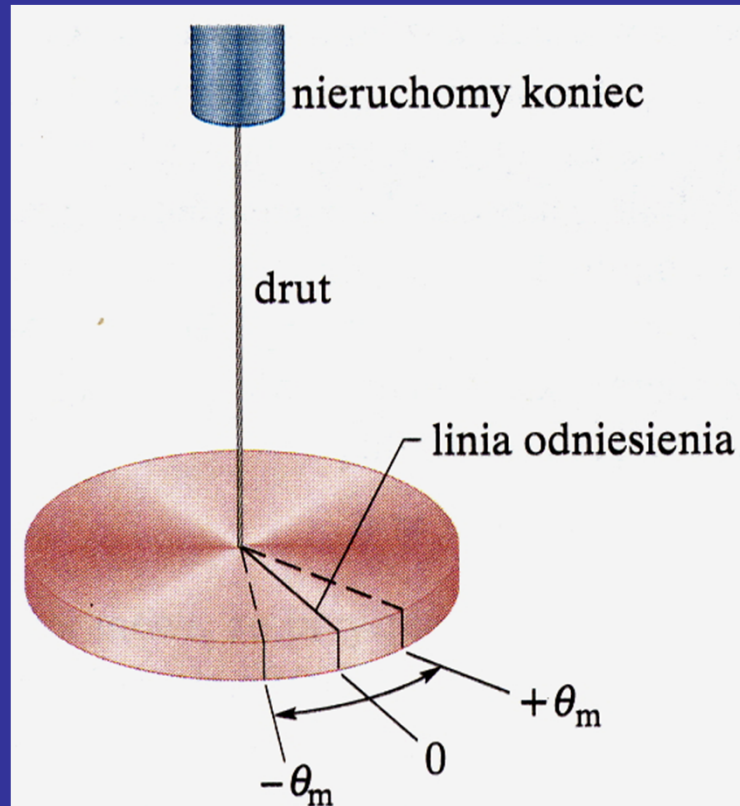
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

równanie oscylatora harmonicznego

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

Wahadło torsyjne



$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{I}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

okres drgań wahadła torsyjnego

Wahadło torsyjne służy do wyznaczania momentu bezwładności brył o dowolnych nieregularnych kształtach

Przykład 2. Na rysunku przedstawiono cienki pręt o o długości $L=12,4$ cm i masie $m=135$ g zawieszony w środku na długim drucie. Zmierzony okres T_a drgań torsyjnych pręta wynosi 2,53 s. Następnie na tym samym drucie zawieszono ciało X o nieregularnym kształcie i zmierzono okres T_b , który wynosi 4,76 s. Wyznaczyć moment bezwładności ciała X względem osi, wokół której zachodzą drgania.

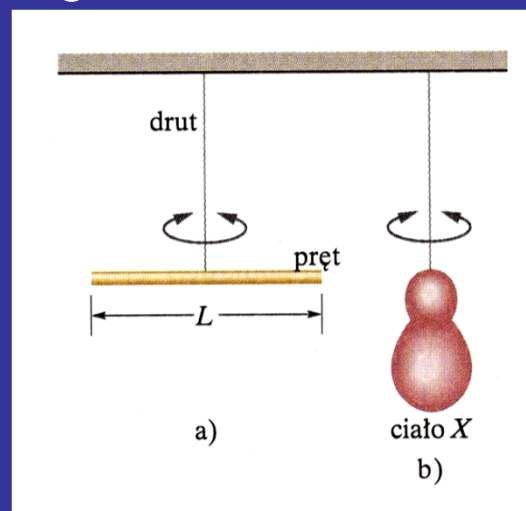
Dane:

$$L=12,4 \text{ cm}=0,124 \text{ m}$$

$$m=135 \text{ g}=0,135 \text{ kg}$$

$$T_a=2,53 \text{ s}$$

$$T_b=4,76 \text{ s}$$



Szukane:

$$I_b$$

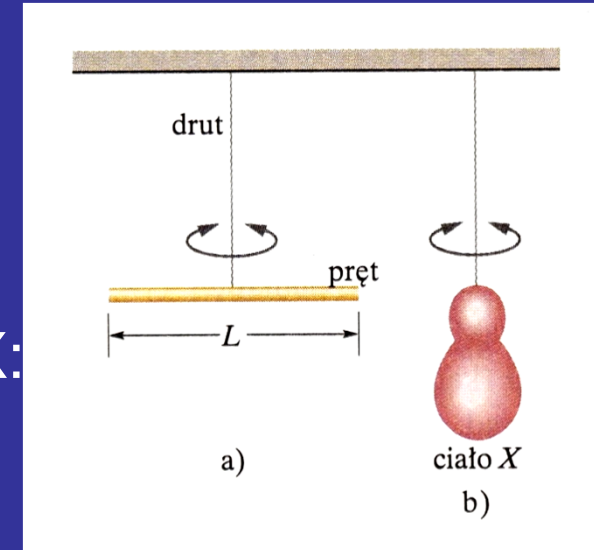
Rozwiązanie:

Okres drgań wahadła torsyjnego z prętem:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}}$$

Okres drgań wahadła torsyjnego z ciałem X:

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}$$



Szukany moment bezwładności:

$$I_b = I_a \frac{T_b^2}{T_a^2} = \frac{1}{12} mL^2 \frac{T_b^2}{T_a^2}$$

Odpowiedź:

$$I_b = 6,12 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Wahadło matematyczne

Ruch powoduje moment siły ciężkości:

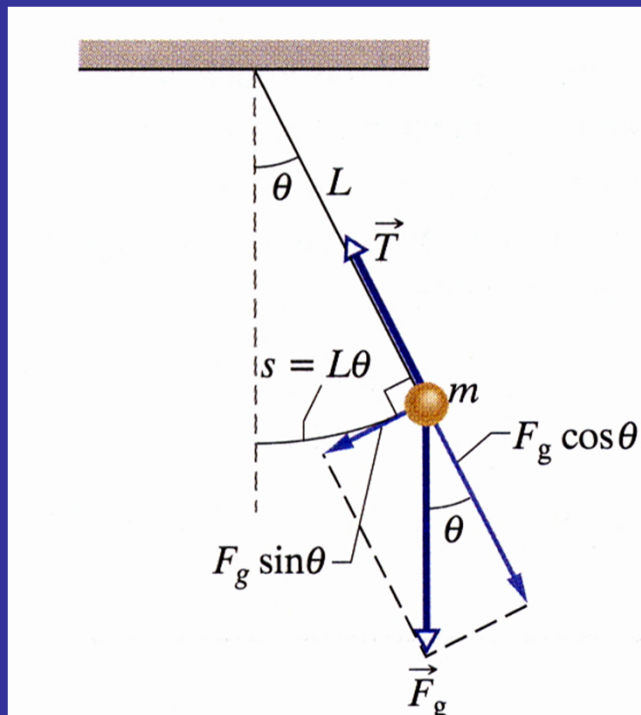
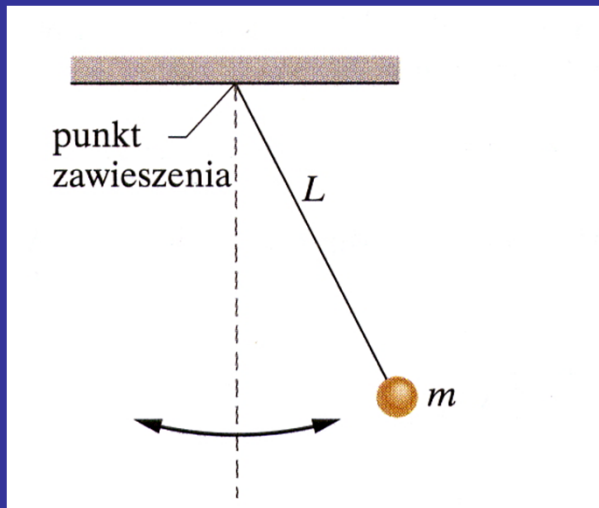
$$\tau = -L(F_g \sin \theta) = -Lmg \sin \theta$$

znak minus oznacza, że moment siły powoduje zmniejszenie kąta θ

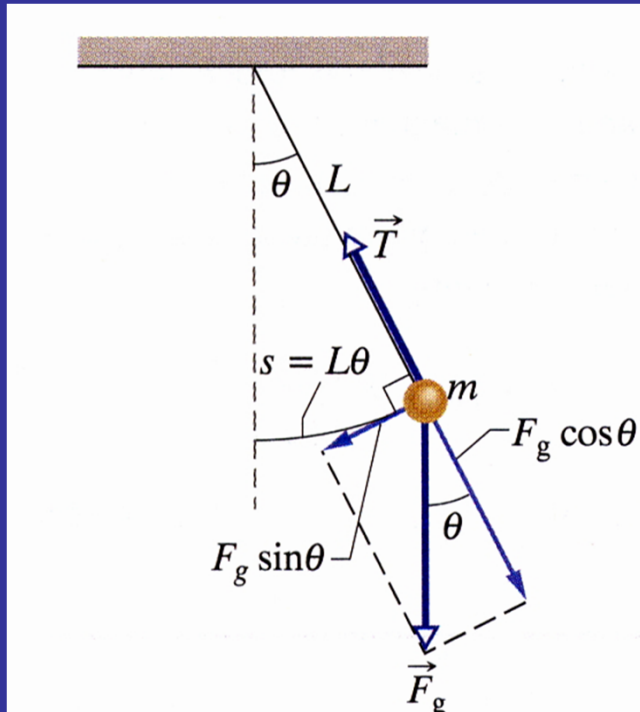
Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\tau = I\varepsilon = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

I-moment bezwładności wahadła względem punktu zawieszenia



Wahadło matematyczne



Zakładamy, że kąt θ jest mały (małe drgania) czyli $\sin \theta \approx \theta$:

$$\tau = -Lmg\theta$$

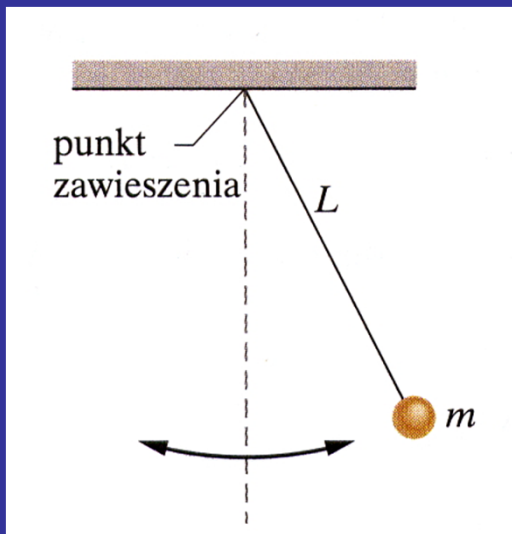
Równanie oscylatora harmonicznego:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + Lmg\theta = 0$$

Częstość drgań:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

Wahadło matematyczne



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}$$

ale

$$I = mL^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Częstość nie zależy od masy

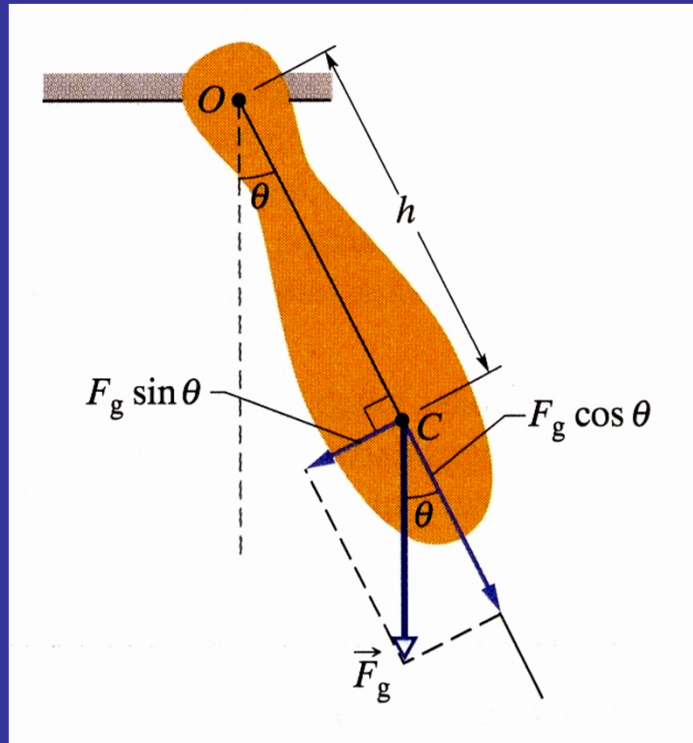
Okres T nie zależy od masy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

wzór prawdziwy dla małej amplitudy drgań

Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna w ruchu drgającym



$$\tau = -mgh \sin \theta$$

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

dla małych kątów θ

$$I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgh \theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgh}{I_{\text{śm}} + mh^2}}$$

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne służy do wyznaczania przyspieszenia grawitacyjnego g w różnych miejscach na Ziemi i nie tylko

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{śm}} + mh^2}{mgh}}$$

Przykład 3. Przymiar metrowy wykonuje drgania wokół punktu zawieszenia O , znajdującego się na jednym z jego końców, w odległości h od jego środka masy C jak na rysunku. Mierząc okres drgań T , wyznaczyć przyspieszenie g w tym punkcie na Ziemi.

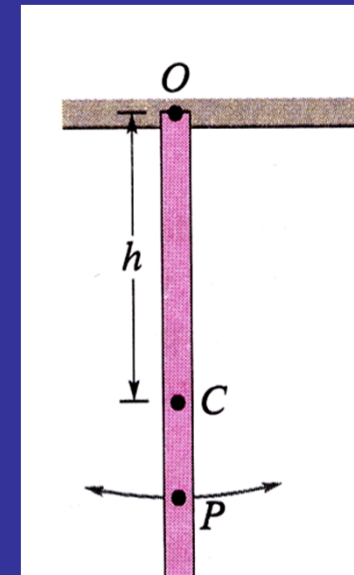
Rozwiązanie:

$$I_{\text{śm}} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2}{mg \frac{L}{2}}}$$

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$



Wahadło fizyczne

Każdemu wahadłu fizycznemu, drgającemu wokół danego punktu zawieszenia O z okresem T odpowiada wahadło matematyczne o długości L_0 drgające z tym samym okresem T . Wielkość L_0 nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego. Punkt znajdujący się w odległości L_0 od punktu zawieszenia O nazywamy środkiem wahań wahadła fizycznego dla danego punktu zawieszenia.

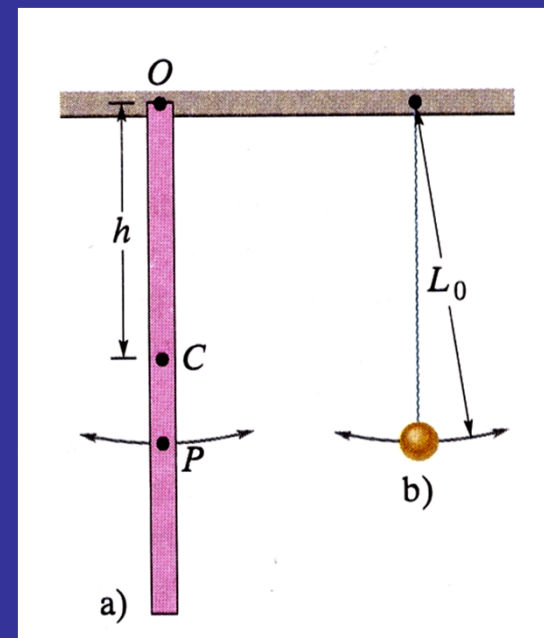
Przykład 4. Znaleźć długość zredukowaną wahadła z poprzedniego przykładu i wyznaczyć środek wahań.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}L}{g}}$$

czyli

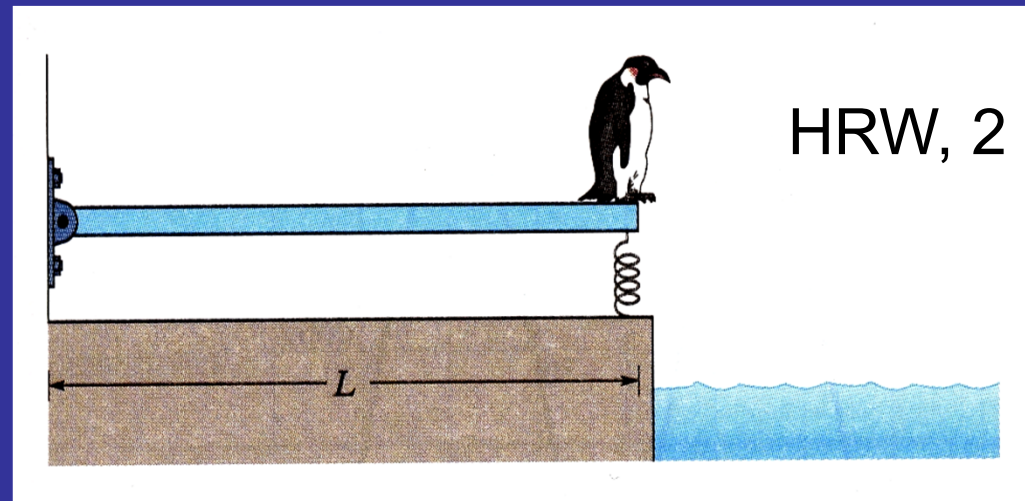
$$L_0 = \frac{2}{3}L$$

środek wahań znajduje się w punkcie P

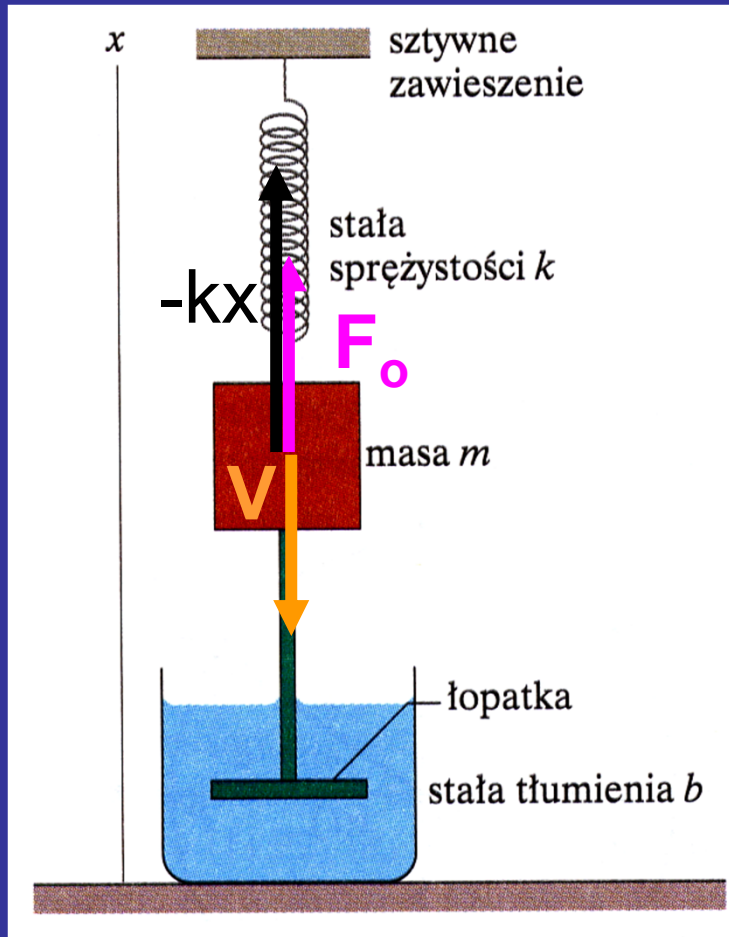


ZADANIE DOMOWE 10.1

Na rysunku przedstawiono pingwina skaczącego do wody z trampoliny mającej postać jednorodnej wąskiej deski, której lewy koniec jest zamocowany na zawiasie, a prawy jest oparty na sprężynie. Deska ma długość $L=2\text{m}$ i masę $m=12\text{ kg}$; stała sprężystości k wynosi 1300 N/m . Gdy pingwin skacze do wody, deska i sprężyna zaczynają wykonywać drgania o małej amplitudzie. Zakładamy, że deska jest wystarczająco sztywna by się nie ugiąć. Wyznaczyć okres T drgań.



Oscylator harmoniczny tłumiony



Siła oporu = siła Stokesa

$$F_o = -bv$$

stała tłumienia

siła wypadkowa $F_w = -bv - kx$

z II zasady dynamiki

$$ma = -bv - kx$$

czyli

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -bv - kx$$

Równanie ogólne oscylatora harmonicznego tłumionego

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

czas relaksacji

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{b}$$

lub

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

współczynnik tłumienia

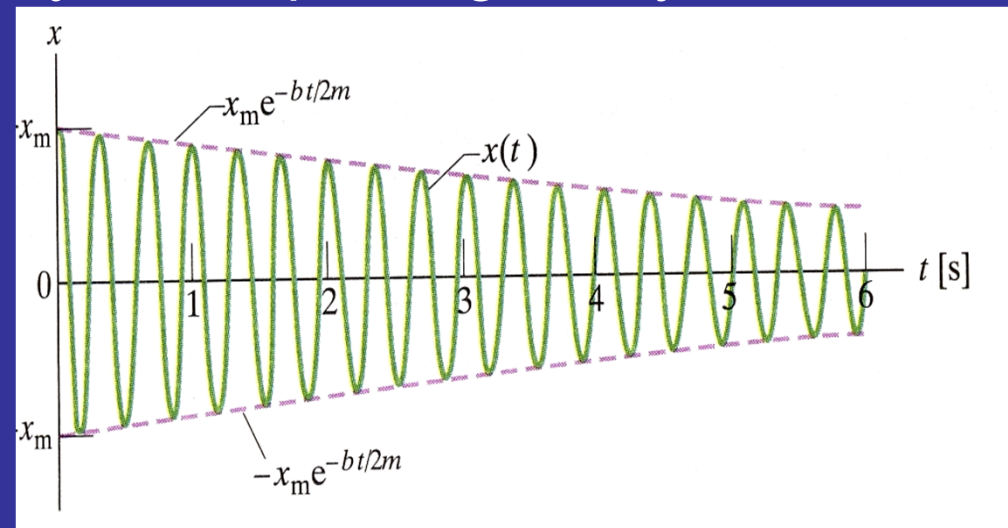
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Dla małych wartości współczynnika tłumienia, proponujemy rozwiązanie periodyczne, w którym amplituda oscylacji maleje wykładniczo z czasem

$$x(t) = e^{-\beta t} z(t)$$

a $z(t)$ jest rozwiązaniem prostego oscylatora harmonicznego



Sprawdzamy, czy funkcja $x(t) = e^{-\beta t} z(t)$ jest rozwiązaniem

równania
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Umowa:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \quad \ddot{z}(t) = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\beta e^{-\beta t} z(t) + e^{-\beta t} \dot{z}(t)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \beta^2 e^{-\beta t} z - 2\beta e^{-\beta t} \dot{z}(t) + e^{-\beta t} \ddot{z}$$

Użyteczne twierdzenie:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$\ddot{z} + \underbrace{(\omega_0^2 - \beta^2)}_{\omega^2} z = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego prostego gdy

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

wtedy

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

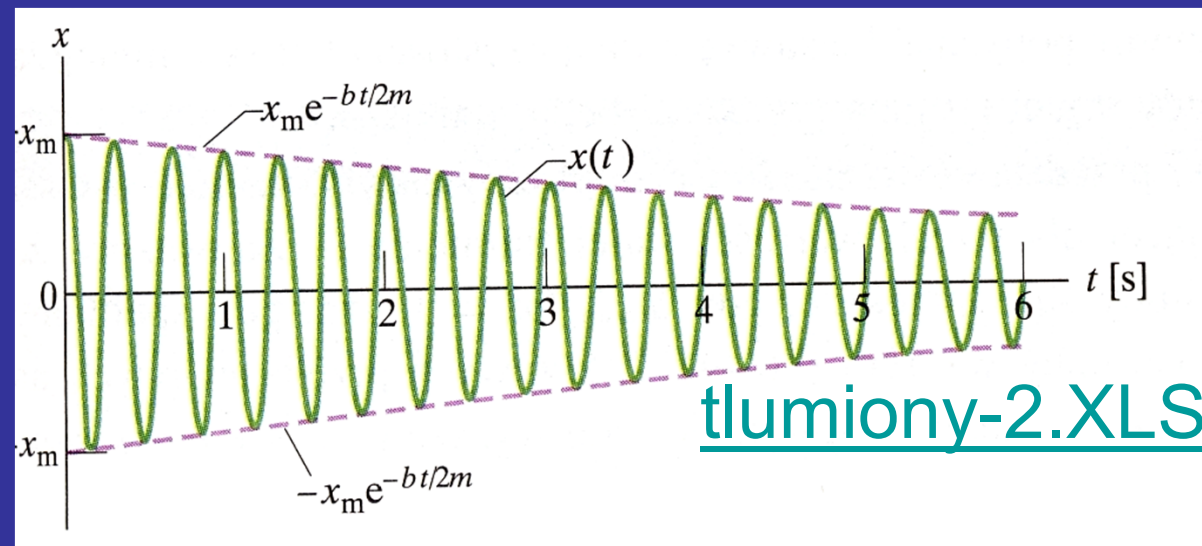
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego

$$x(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) \cos(\omega t + \phi)$$

amplituda zależna od czasu

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

częstość drgań różna od częstości drgań własnych i zależna od tłumienia



Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego w postaci periodycznej $x(t) = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \phi)$

jest możliwe tylko dla małych tłumień, tzn. gdy $\beta < \omega_0$

ze względu na warunek $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$

Przypadek $\beta = \omega_0$ nazywamy krytycznym

Dla $\beta > \omega_0$ mamy rozwiązanie aperiodyczne

Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$A(t) = x_m \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) = A_o \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right)$$

$$A_o = A(t = 0)$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia Λ jest to logarytm naturalny ze stosunku kolejnych amplitud

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\Lambda = -\ln \frac{A(t+T)}{A(t)} = -\ln \frac{e^{-\beta(t+T)}}{e^{-\beta t}} = \beta T$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

współczynnik
tłumienia

ZADANIE DOMOWE 10.2

Zastanowić się nad interpretacją fizyczną czasu relaksacji. Obliczyć ile razy zmaleje amplituda drgań oscylatora tłumionego w stosunku do amplitudy początkowej w czasie równym czasowi relaksacji.

Straty mocy a współczynnik dobroci Q

Współczynnik dobroci Q układu drgającego jest to z definicji iloczyn 2π i stosunku energii zmagazynowanej do średniej energii traconej w jednym okresie T

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia zmagazynowana}}{\langle \text{energia tracona w } T \rangle}$$

Dla słabo tłumionego oscylatora harmonicznego

$$Q \approx \omega_0 \tau$$

Wielkość $\omega_0 \tau$ lub Q jest odpowiednią miarą braku tłumienia oscylatora. Duże $\omega_0 \tau$ lub duże Q oznacza, że oscylator jest słabo tłumiony, np. dla struny fortepianu $Q \approx 10^3$, dla atomu wzbudzonego $Q \approx 10^7$

ZADANIE DOMOWE 10.3

W jakim czasie energia oscylatora harmonicznego tłumionego zmniejsza się do e^{-1} swej wartości początkowej? Ile pełnych drgań wykona w tym czasie oscylator?

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem - rezonans

Zakładamy periodyczne wymuszenie w postaci siły wymuszającej danej jako:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

częstość wymuszenia

Równanie oscylatora harmonicznego z tłumieniem i wymuszeniem ma postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\omega t)$$

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

lub po podzieleniu przez masę:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

i wprowadzeniu standardowych oznaczeń:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t)$$

W stanie ustalonym drgania oscylatora zachodzą z częstotliwością wymuszenia ω

Oscylator harmoniczny z wymuszeniem cd.

Rozwiązaniem równania:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t)$$

jest:
$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

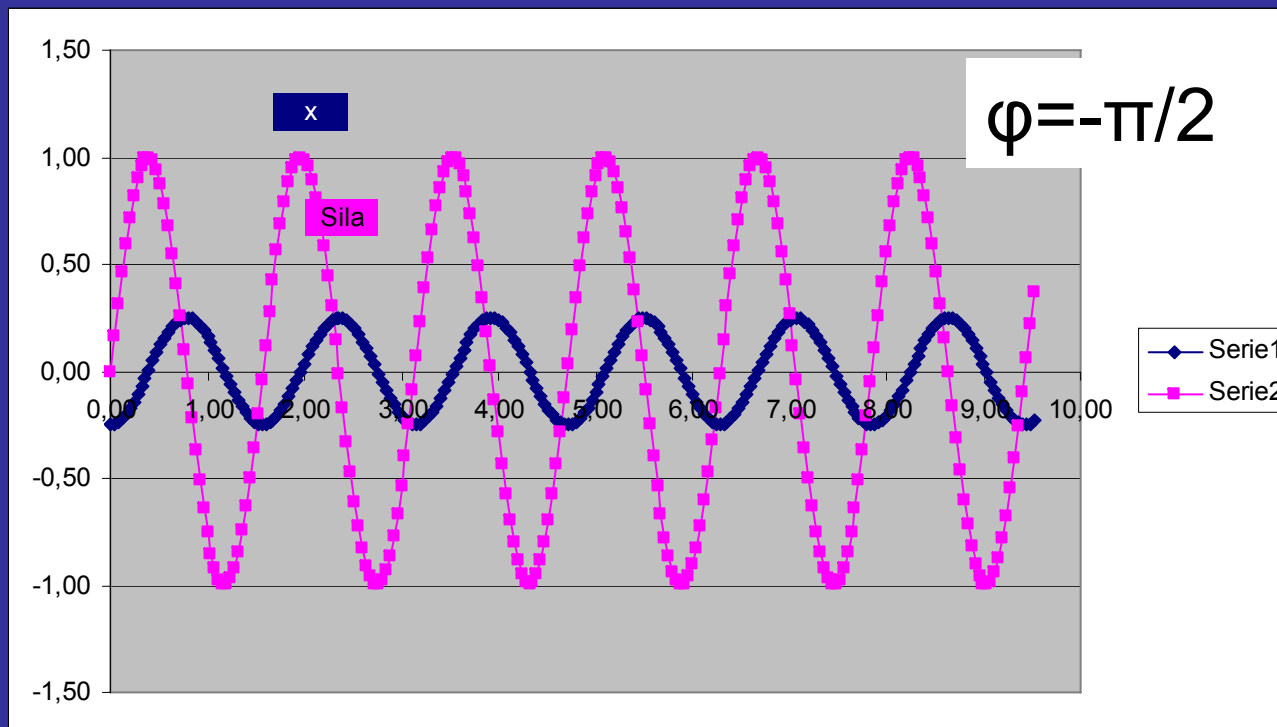
Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

- ✓ amplituda x_0 jest funkcją częstości wymuszenia
- ✓ przesunięcie fazowe nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia

Przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$ mówi nam, o jaki kąt maksimum przemieszczenia x wyprzedza maksimum siły wymuszającej F .

$$x(t) = x_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$



Można pokazać, że:

amplituda drgań

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2 \right)^{1/2}}$$

przesunięcie fazowe

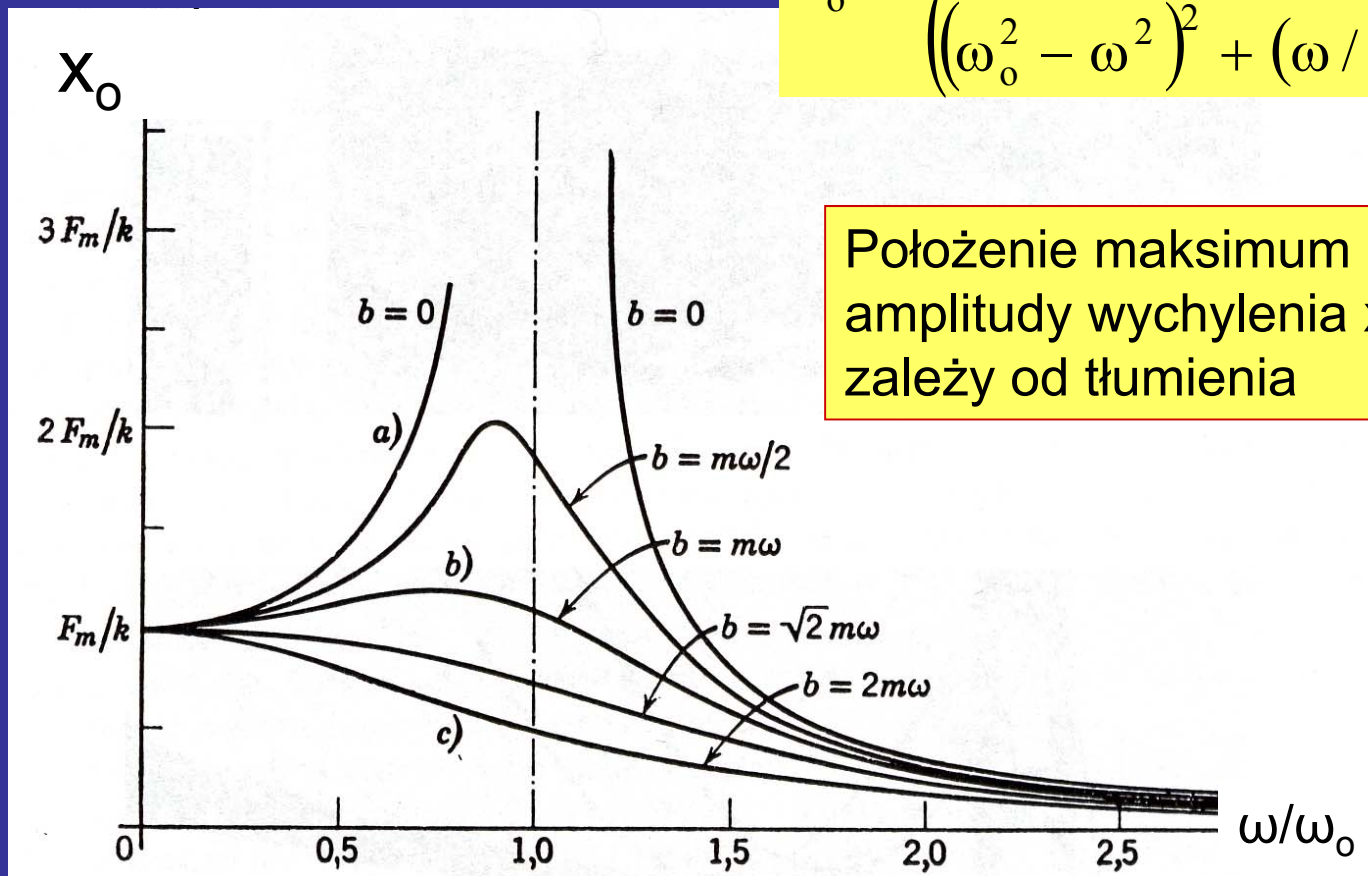
$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

zależą w określony sposób od częstości drgań

[wymuszony2.XLS](#)

Rezonans występuje amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza gdy częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right)^{1/2}}$$



Położenie maksimum amplitudy wychylenia x_0 zależy od tłumienia

Przykład 5. Znaleźć warunek rezonansu w przypadku gdy:

a) rozważamy maksymalną amplitudę wychylenia x_{\max} ,

b) rozważamy maksymalną amplitudę prędkości v_{\max} .

Rozwiązanie:

a)

$$x_o = \frac{\alpha_o}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2 \right)^{1/2}}$$

$$\frac{dx_o}{d\omega} = ?$$

Wystarczy znaleźć minimum mianownika

$$f(\omega) = (\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega) = 2(\omega_o^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2(\omega / \tau^2)$$

$$\frac{d}{d\omega} f(\omega_{\text{rez}}) = 0$$

dla

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

Częstość rezonansu w przypadku (a) zależy od współczynnika tłumienia

Gdy $\tau \rightarrow \infty$ tzn. przy braku tłumienia: $\omega_{\text{rez}} = \omega_0$

Amplituda drgań

$$x_0(\omega_{\text{rez}}) = \frac{\alpha_0}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2 \right)^{1/2}} \rightarrow \infty$$

$\rightarrow 0$

b) amplituda prędkości

$$x(t) = x_o(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \omega x_o(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$V_{\max} = \omega X_o(\omega)$$

$$V_{\max} = \frac{\omega \alpha_o}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega / \tau)^2 \right)^{1/2}}$$

$$\frac{dv_{\max}}{d\omega} = ?$$

ZADANIE DOMOWE 10.4

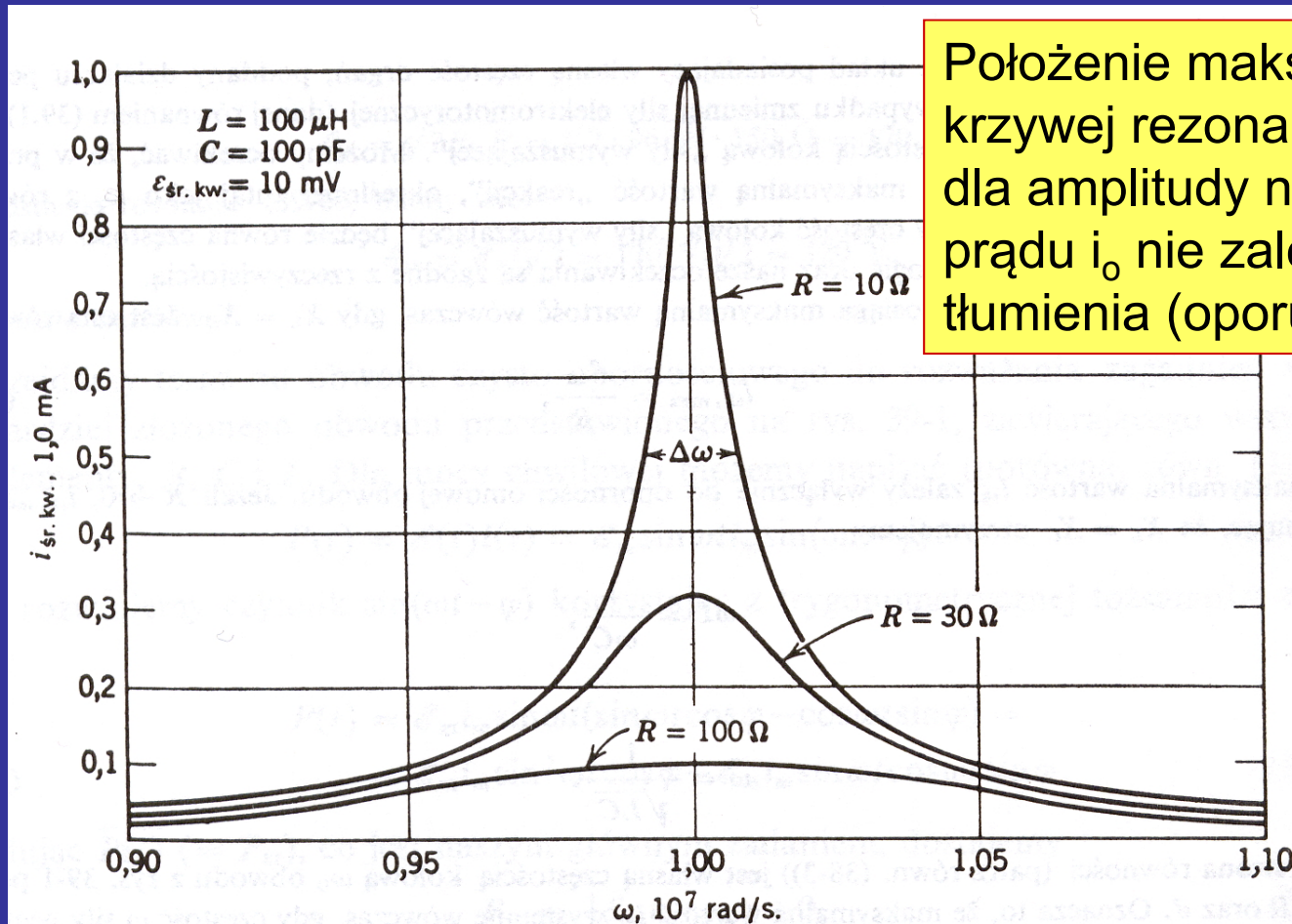
Znaleźć $\frac{dv_{\max}}{d\omega}$ Pokazać, że częstość, przy której występuje maksimum amplitudy prędkości jest równa częstości drgań własnych, niezależnie od tłumienia.

Kiedy obserwujemy rezonans tego typu?

Najczęściej w obwodach LRC, mierząc natężenie w obwodzie.

Oscylator mechaniczny	Obwód LRC
wychylenie z położenia równowagi, x	ładunek elektryczny, q
prędkość $v=dx/dt$	natężenie prądu $i=dq/dt$
masa, m	indukcyjność, L
stała sprężystości, k	odwrotność pojemności, $1/C$
stała tłumienia, b	rezystancja, R
siła, F	napięcie, U

Krzywa rezonansowa dla amplitudy prędkości



Położenie maksimum krzywej rezonansowej dla amplitudy natężenia prądu i_0 nie zależy od tłumienia (oporu) R

Składanie drgań harmoniczných

✓ zachodzących w tym samym kierunku

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

✓ zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

krzywa $y(x)$

Wygaszanie i wzmacnianie drgań zachodzących w jednym kierunku

Założmy: $x_1(t) = A \cos(\omega t)$ $x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

drzania o tej samej amplitudzie A zachodzą z tą samą częstotnością ω , lecz mogą być przesunięte w fazie o φ

W wyniku złożenia otrzymujemy:

$$x_{\text{wyp}} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

drzania o amplitudzie zależnej od φ

$$x_{\text{wyp}} = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

dla $\varphi = \pi$, $x_{\text{wyp}} = 0$ całkowite wygaszenie drgań

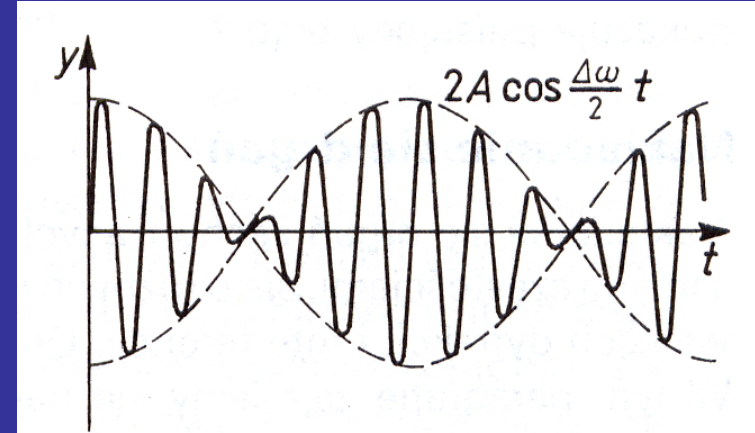
dla $\varphi = 2\pi$, $x_{\text{wyp}} = 2A \cos(\omega t)$ dwukrotny wzrost amplitudy drgań - wzmocnienie

Dudnienia

Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach

$$y_1(t) = A \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

$$y_2(t) = A \sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$



$$y = y_1 + y_2 = A \left[\sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \right]$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Otrzymujemy:

$$y = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin \omega t$$

drgania o modulowanej amplitudzie

Składanie drgań harmoniczných w kierunkach wzajemnie prostopadłych

Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857

Przykład 6. Znaleźć wynik złożenia drgań prostopadłych opisanych równaniami:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

gdy: $\varphi=0$, $\varphi=90^\circ$, $\varphi=180^\circ$

[liss-prez.XLS](#)

Elipsa jest wynikiem
złożenia drgań:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Rozwiązanie analityczne:

$$x(t) = A_x \sin \omega t$$

$$y(t) = A_y \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_y \cos(\omega t)$$

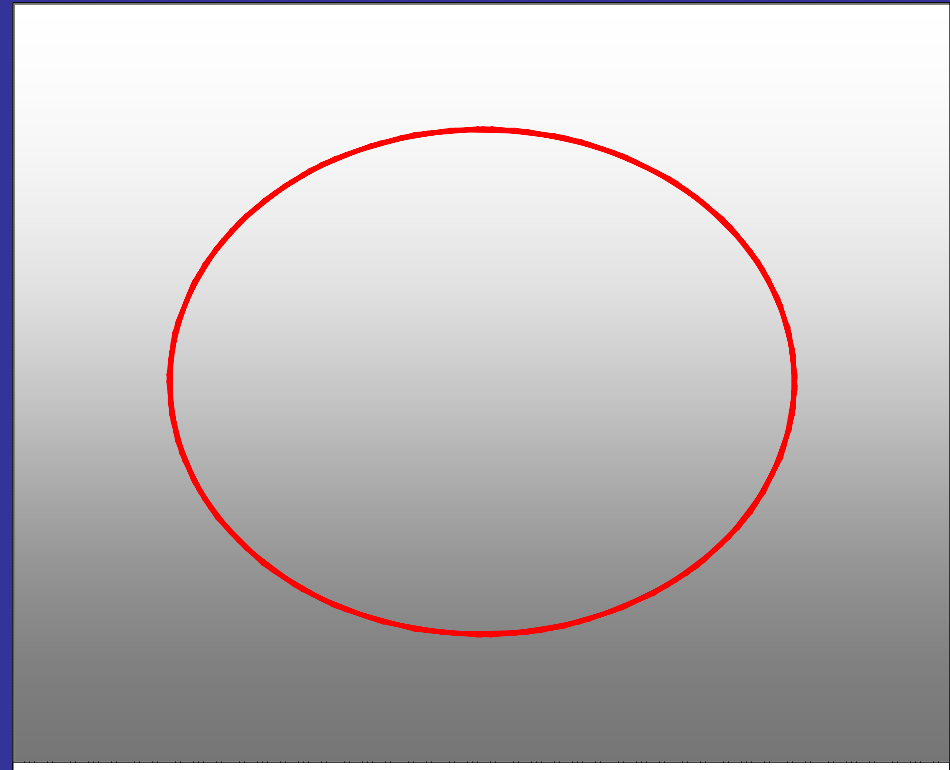
$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} = \sin^2 \omega t$$

$$\frac{y^2(t)}{A_y^2} = \cos^2 \omega t$$



$$\frac{x^2(t)}{A_x^2} + \frac{y^2(t)}{A_y^2} = 1$$

równanie elipsy



PODSUMOWANIE

- ❑ Oscylator harmoniczny: małe drgania (mała amplituda drgań) oraz małe tłumienia
- ❑ Energia jest zachowana jeśli nie ma tłumienia
- ❑ Tłumienie powoduje spadek amplitudy w funkcji czasu i straty energii
- ❑ Oscylator wymuszony charakteryzuje się amplitudą zależną od częstości wymuszenia i może wykazywać rezonansowy wzrost amplitudy