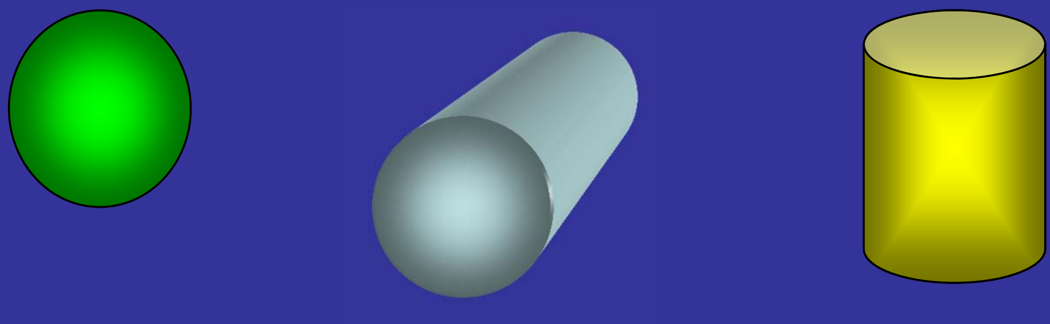
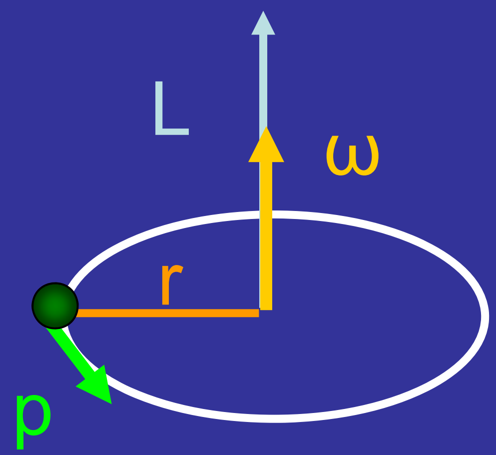
RUCH OBROTOWY- MECHANIKA BRYŁY SZTYWNEJ



MOMENT PĘDU I ENERGIA KINETYCZNA W RUCHU PUNKTU MATERIALNEGO PO OKRĘGU

Definicja momentu pędu

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$



$L=mrv=mr^2\omega$

$L=I\omega$

$I= mr^2$

Moment bezwładności I

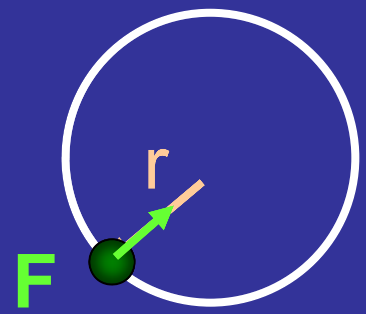
Jednostką I jest 1 kg m^2

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_k = mv^2/2 = mr^2\omega^2/2 = I\omega^2/2$$

Ruch po okręgu powoduje siła dośrodkowa. Jest to siła centralna.

$$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$$



Moment siły centralnej względem „centrum” wynosi zero.

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times f(r)\,\hat{\mathbf{r}} = r\;f(r)\,\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$$

Konsekwencja: Moment pędu jest zachowany

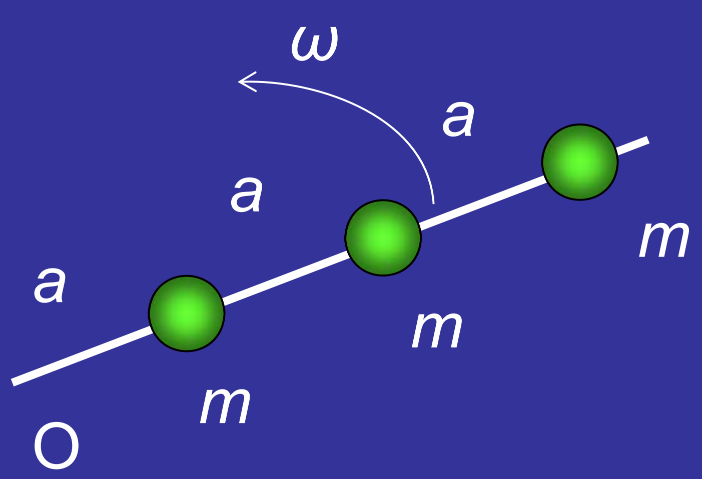
Przez analogię do: $\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$ mamy: $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$

czyli gdy $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$

to

$$\vec{\mathbf{L}} = const$$

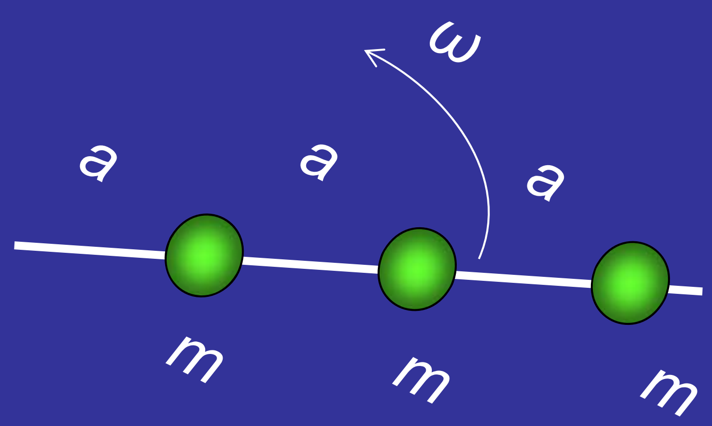
Przykład 1Trzy punkty materialne o masach *m* są połączone ze sobą i z osią obrotu trzema cienkimi sznurkami każdy o długości *a*. Układ obraca się względem osi obrotu z prędkością kątową ω w taki sposób, że punkty materialne znajdują się na jednej prostej. Obliczyć całkowity moment pędu tych trzech punktów materialnych Przyjąć, że dane są wielkości m, a, ω.



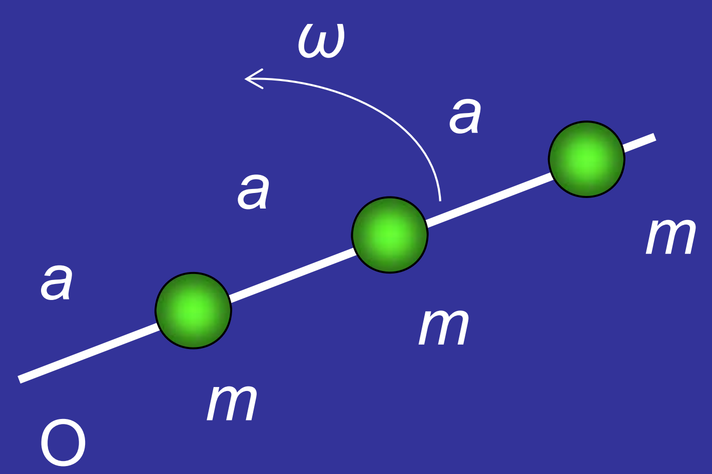
$v_3 = 3\omega a$

$v_2 = 2\omega a$

$v_1 = \omega a$



Całkowity moment pędu układu jest sumą momentów pędu poszczególnych mas



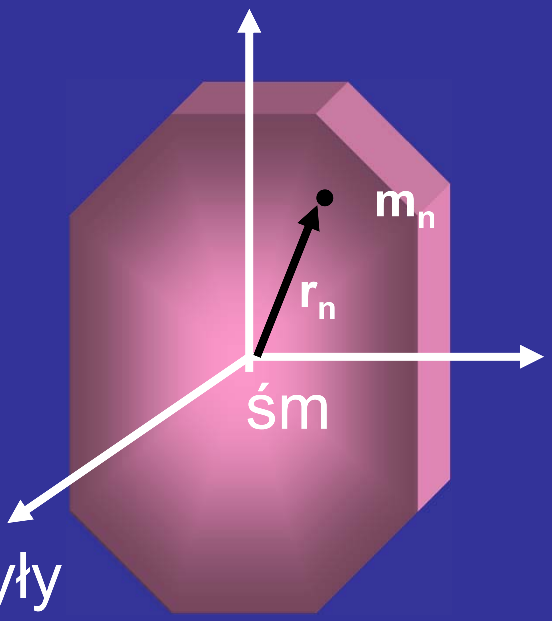
$$L = ma^2\omega + m(2a)^2\omega + m(3a)^2\omega = \underbrace{14\ ma^2}_{I}\ \omega$$

Moment bezwładności I układu też jest sumą momentów bezwładności poszczególnych mas

$$\boxed{\vec{L} \parallel \vec{\omega}}$$

Moment pędu układu punktów materialnych

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} \vec{L}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n$$



ale $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{\omega}$ jest takie samo dla wszystkich punktów bryły sztywnej

czyli

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

Korzystając z tożsamości wektorowej

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}$$

otrzymujemy

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[r_n^2 \, \vec{\omega} - (\vec{r}_n \circ \vec{\omega})\vec{r}_n \right]$$

definicja momentu pędu bryły sztywnej

$$\vec{r}_n = x_n\hat{\mathbf{i}} + y_n\hat{\mathbf{j}} + z_n\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[r_n^2\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{r}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}})\vec{r}_n\right]$$

$$\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$$

$$L_x = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[r_n^2\,\omega_x - (\vec{r}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}})x_n\right]$$

$$L_y = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[r_n^2\,\omega_y - (\vec{r}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}})y_n\right]$$

$$L_z = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[r_n^2\,\omega_z - (\vec{r}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}})z_n\right]$$

$$\vec{\mathbf{r}}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}} = x_n\omega_x + y_n\omega_y + z_n\omega_z$$

$$r_n^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2$$

$$L_x = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[r_n^2\,\omega_x - (\vec{\mathbf{r}}_n \circ \vec{\boldsymbol{\omega}})x_n\right]$$

$$L_x = \omega_x \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{N} m_n(r_n^2 - x_n^2)}}_{I_{xx}} + \omega_y \underbrace{\boxed{\left(-\sum_{n=1}^{N} m_n x_n y_n\right)}}_{I_{xy}} + \omega_z \underbrace{\boxed{\left(-\sum_{n=1}^{N} m_n x_n z_n\right)}}_{I_{xz}}$$

elementy tensora momentu bezwładności

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

TENSOR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{L}} = \widetilde{\mathrm{I}}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

elementy diagonalne

Tensor momentu bezwładności

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

definicja elementów diagonalnych

$$I_{xx} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n (y_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{yy} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 - y_n^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n (x_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 - z_n^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n (x_n^2 + y_n^2)$$

definicja elementów pozadiagonalnych

$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_n y_n = -\sum_{n=1}^{N} m_n y_n x_n = I_{yx}$$

$$I_{xz} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_n z_n = I_{zx}$$

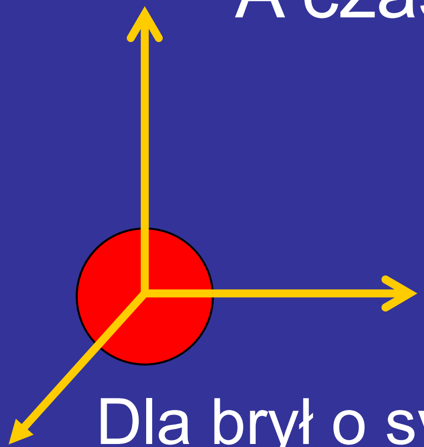
$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^{N} m_n y_n z_n = I_{zy}$$

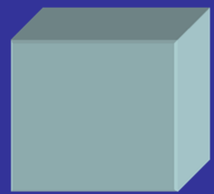
Tensor jest symetryczny $I_{xy}=I_{yx}$

Ile jest niezależnych elementów? 9?

Nie, jest 6 elementów bo tensor symetryczny

A czasami do 3 – tensor diagonalny

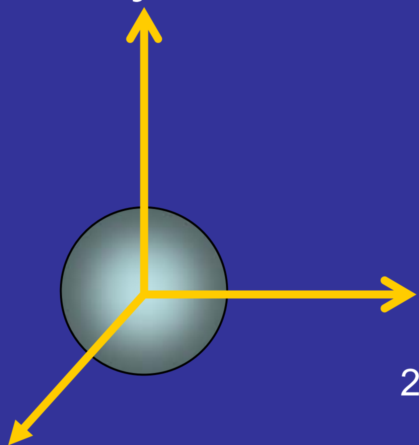




$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Układ osi głównych

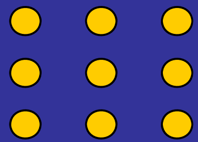
Dla brył o symetrii sferycznej jest tylko jeden element



$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Tensor momentu bezwładności dla ciągłego rozkładu masy

rozkład dyskretny



$$I_{xx} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n^2 - x_n^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n (y_n^2 + z_n^2)$$

$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_n y_n$$

rozkład ciągły

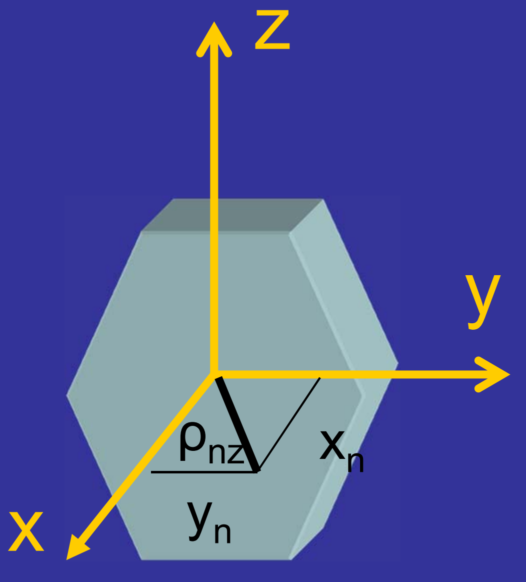
$$I_{xx} = \int \rho(\vec{\mathbf{r}})(r^2 - x^2)dV$$

$$I_{xy} = -\int \rho(\vec{\mathbf{r}})xydV$$

INTERPRETACJA ELEMENTÓW TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

$$I_{zz} = \sum_{n=1}^{N} m_n (x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^{N} m_n \rho_{nz}^2$$

kwadrat odległości od osi OZ

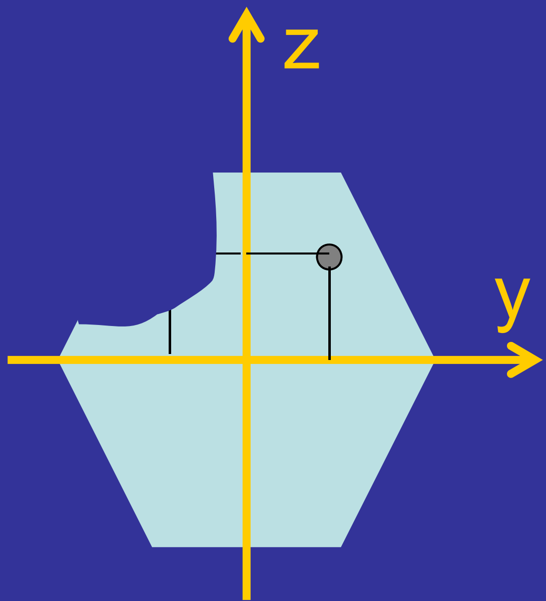


$$x_n^2 + y_n^2 = \rho_{nz}^2$$

Elementy diagonalne mają klasyczną interpretację

INTERPRETACJA ELEMENTÓW TENSORA MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

$$I_{yz} = -\sum_{n=1}^{N} m_n y_n z_n$$



$I_{yz} \neq 0$

Elementy pozadiagonalne pojawiają się gdy pojawia się asymetria

Moment bezwładności jest tensorem, zatem w ogólnym przypadku wektor momentu pędu nie musi być równoległy do wektora prędkości kątowej.

Przykład 2 Rozważyć układ czterech mas $m_1(a/2,a/2)$, $m_2(-a/2,a/2)$, $m_3(-a/2,-a/2)$ oraz $m_4(a/2,-a/2)$ gdzie $m_1 = m_3 = m = 1$ kg, $m_2=m_4=2$ kg, rozmieszczonych w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 2$ cm. Układ mas narysować. (a) Znaleźć tensor momentu bezwładności tego układu mas. Wskazać elementy diagonalne i pozadiagonalne. (b) Zakładając, że podczas obrotu z prędkością kątową $\vec{\omega}=\omega\mathbf{i}$ wzajemne odległości między masami nie ulegają zmianie, znaleźć wektor momentu pędu tego układu mas i sprawdzić czy jest równoległy do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$.

$$I_{xx}=\sum_{n=1}^{N} m_n y_n^2$$

$$I_{xx}=m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2+m_3\left(-\frac{a}{2}\right)^2+m_4\left(-\frac{a}{2}\right)^2$$

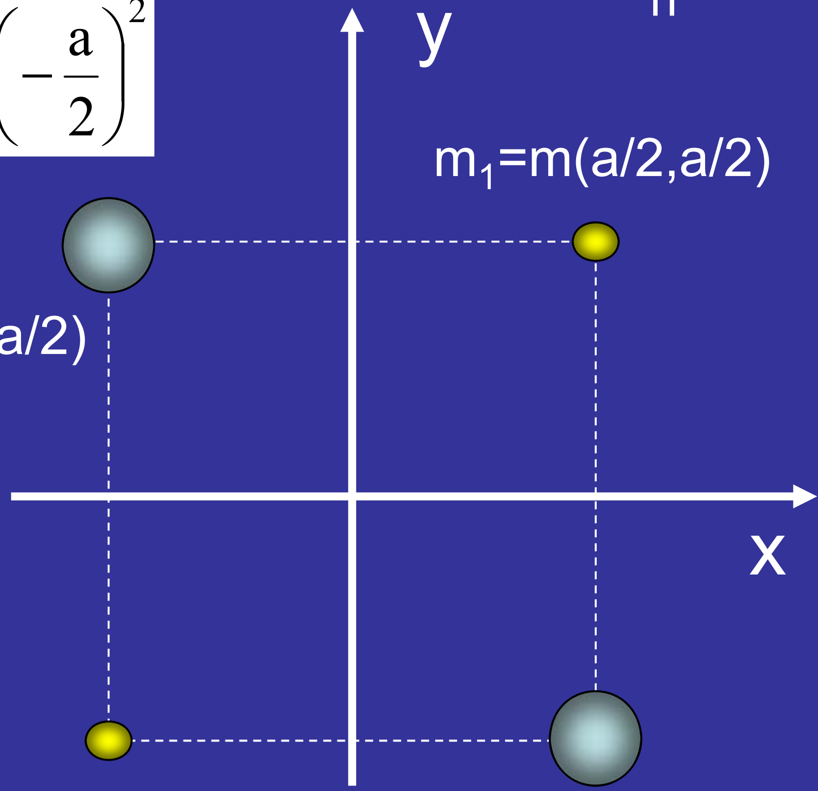
$$I_{xx}=\frac{3}{2}ma^2$$

$$I_{yy}=\sum_{n=1}^{N} m_n x_n^2=\frac{3}{2}ma^2$$

$$I_{zz}=\sum_{n=1}^{N} m_n (x_n^2+y_n^2)=\sum_{n=1}^{N} m_n x_n^2+\sum_{n=1}^{N} m_n y_n^2$$

$$I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=3ma^2$$

$z_n=0$



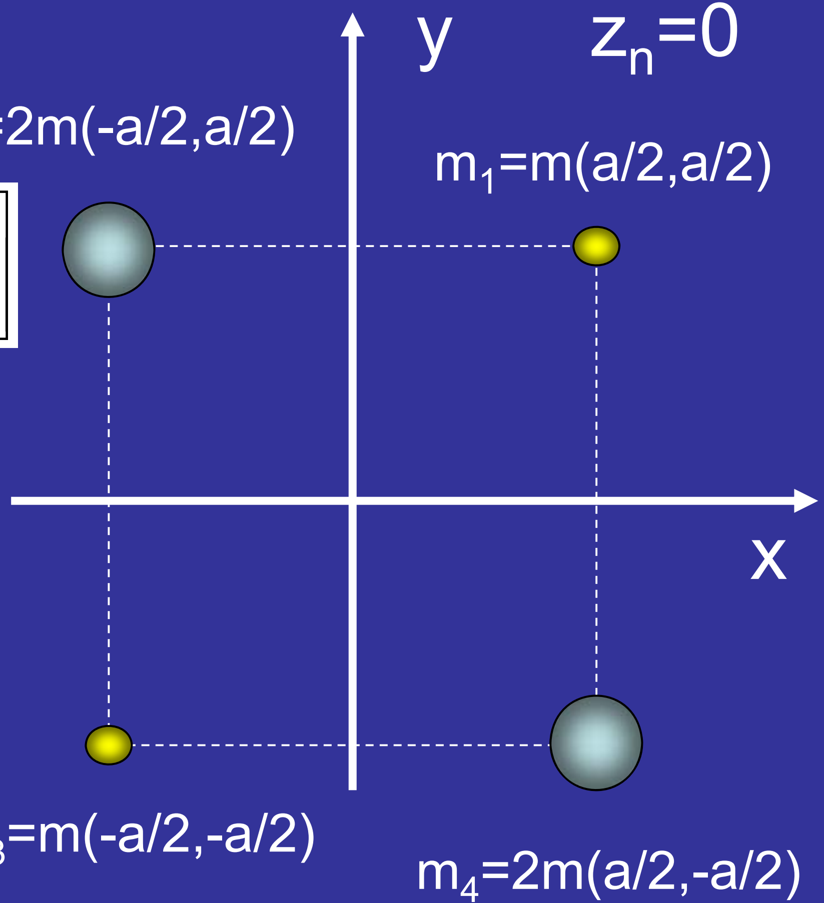
$$I_{xy} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_n y_n$$

$$I_{xy} = -\left[m_1 \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_2 \left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) + m_3 \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - m_4 \frac{a^2}{4} \right]$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} m a^2$$

$$I_{xz} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_n z_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m a^2 & \frac{1}{2} m a^2 & 0 \\ \frac{1}{2} m a^2 & \frac{3}{2} m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 m a^2 \end{bmatrix}$$

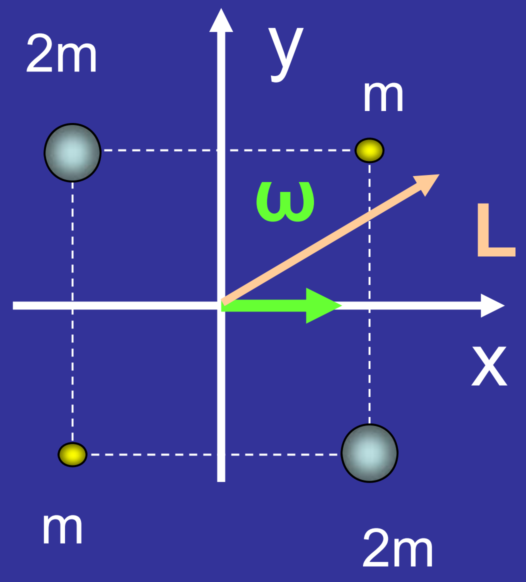


Tensor momentu bezwładności

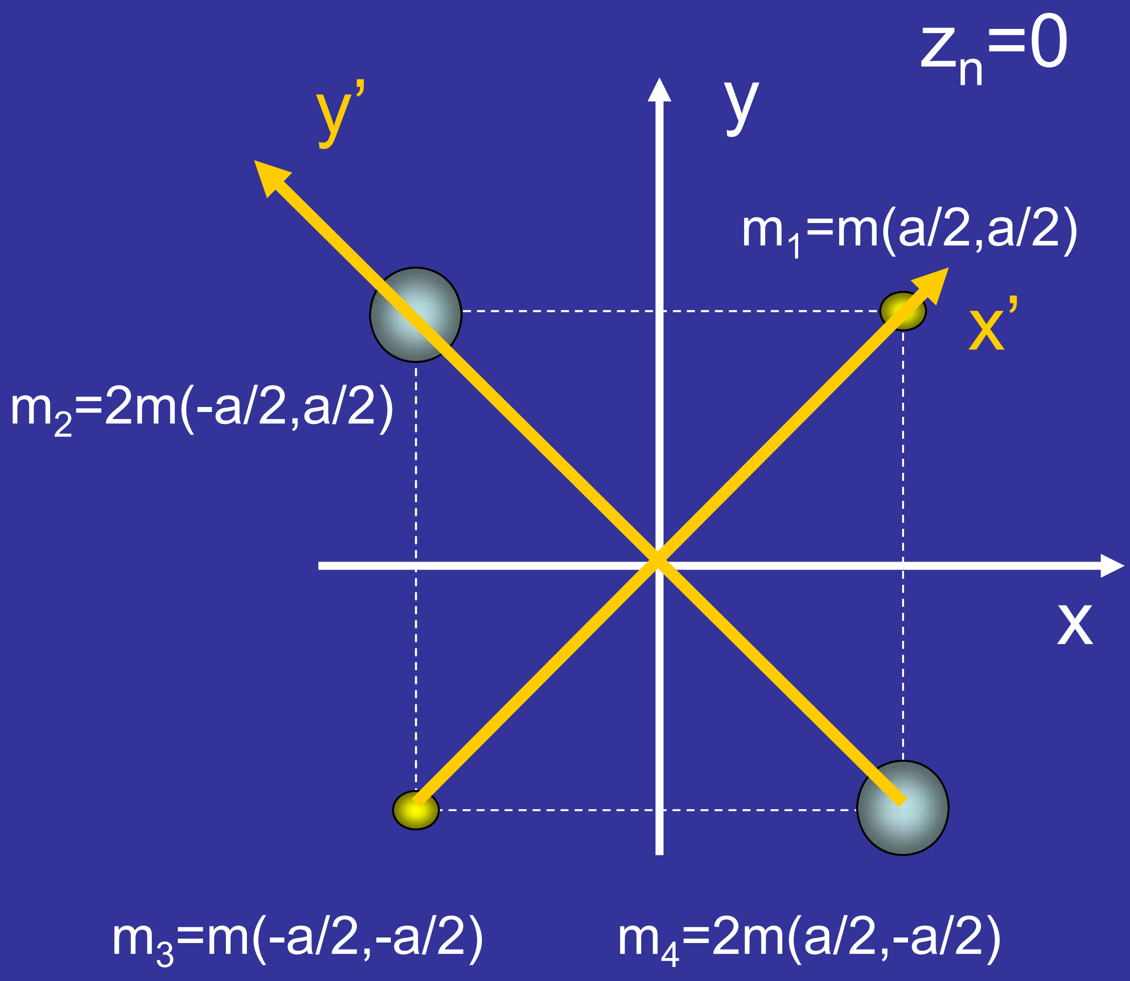
Wektor momentu pędu

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}ma^2 & \frac{1}{2}ma^2 & 0 \\ \frac{1}{2}ma^2 & \frac{3}{2}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}ma^2\omega + \left(\frac{1}{2}ma^2\right) \cdot 0 + 0 \\ \frac{1}{2}ma^2\omega \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{\mathbf{L}} = \frac{3}{2}ma^2\omega\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}ma^2\omega\hat{\mathbf{j}}$$



W układzie odniesienia XY tensor momentu bezwładności nie jest diagonalny

W układzie odniesienia X'Y' tensor momentu bezwładności jest diagonalny

ZADANIE DOMOWE 5.1

Dwa ciała o masach 200 g i 300 g są połączone lekkim prętem o długości 50 cm. Środek masy układu jest początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych. Pręt leży w płaszczyźnie XY i tworzy kąt 20^{o} z osią OY. (a) Znaleźć tensor momentu bezwładności w tym układzie odniesienia. (b) Sprawdzić, czy wektor momentu pędu jest równoległy wektora prędkości kątowej gdy pręt obraca się dookoła osi OX z prędkością kątową ω.

ZADANIE DOMOWE 5.2

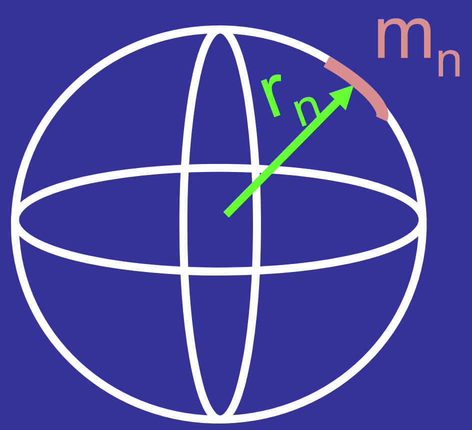
Udowodnić, że:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum_{n=1}^{N} m_n r_n^2$$

Jest to bardzo użyteczne twierdzenie, które pozwala obliczyć np. moment bezwładności powłoki kulistej

Moment bezwładności powłoki kulistej

Powłoka ma masę całkowitą M i promień R



$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum_{n=1}^{N} m_n r_n^2$$

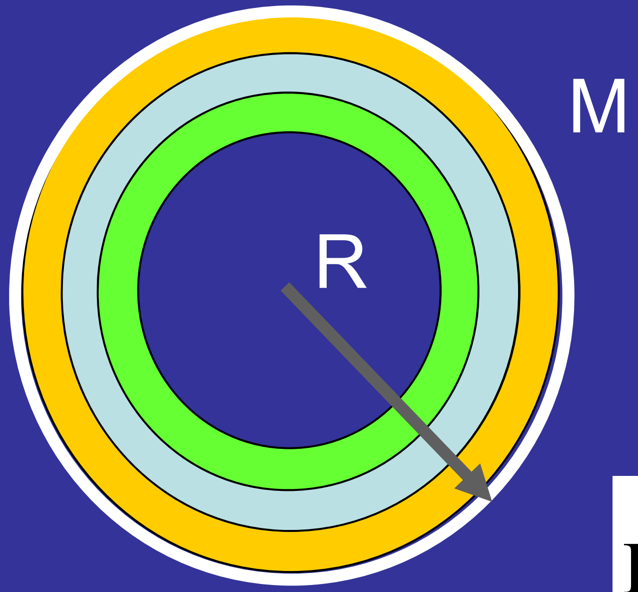
ale $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=I$

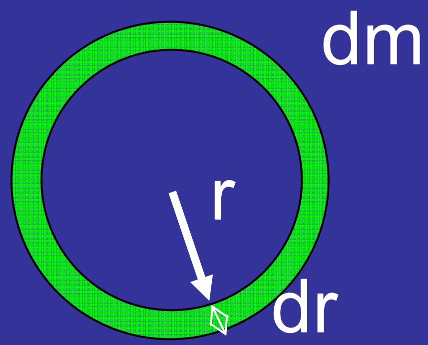
$$3I = 2\sum_{n=1}^{N} m_n r_n^2$$

$r_n=R$

$$3I = 2R^2\sum_{n=1}^{N} m_n = 2R^2 M \Rightarrow I = \frac{2}{3}MR^2$$

Moment bezwładności kuli





$$I_{sfery} = \frac{2}{3} R^2 M$$

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm$$

$$I = \int dI$$

$$I = \int \frac{2}{3} r^2 dm = \int \frac{2}{3} r^2 \rho dV$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$I = \int_0^R \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{8\pi}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$$

Tensor momentu bezwładności wybranych brył w układzie osi głównych

symetria sferyczna

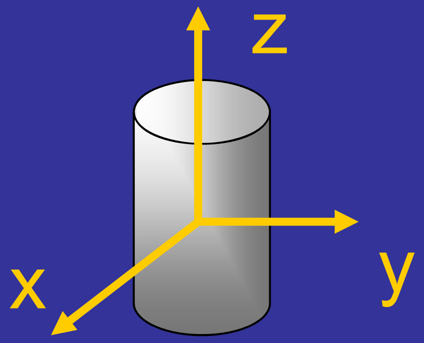
powłoka kulista-sfera

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}MR^2 \end{bmatrix}$$

pełna kula

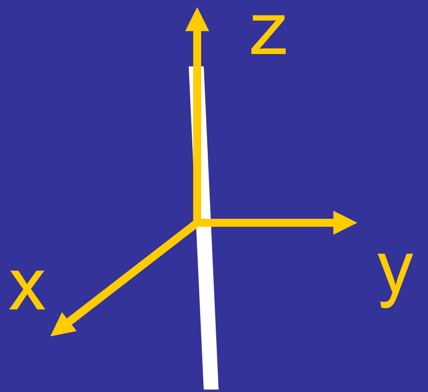
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix}$$

symetria cylindryczna



walec o promieniu podstawy R i wysokości H oraz masie M

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$



cienki pręt o długości L i masie M

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZADANIE DOMOWE 5.3

Zapoznać się z Tabelą 11.2 str.274 podręcznika HWR-1. Przeanalizować momenty bezwładności brył sztywnych tam umieszczonych.

ZADANIE DOMOWE 5.4

Znaleźć (w układzie osi głównych) tensor momentu bezwładności:

(a)obręczy o promieniu R i masie M

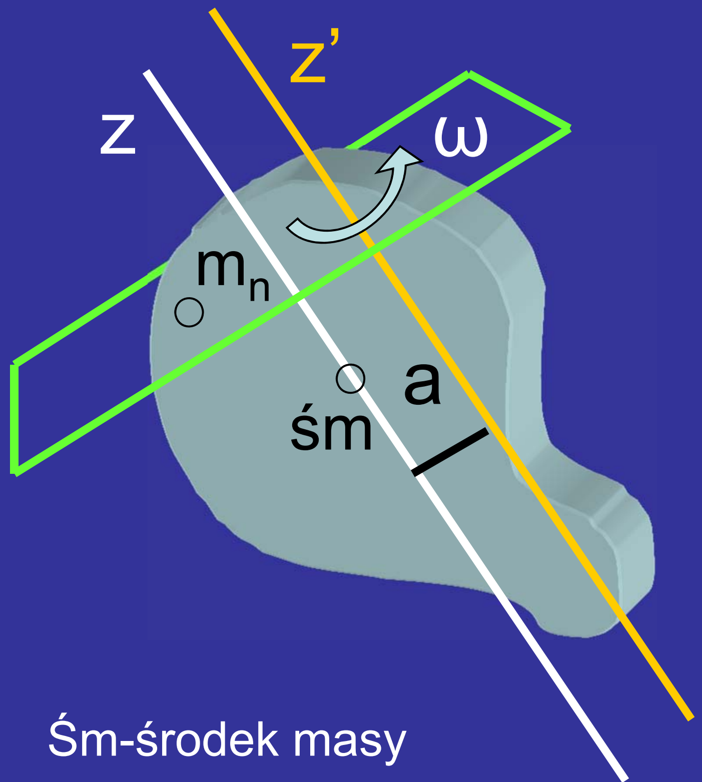
(b)pełnego dysku o promieniu R i masie M

(c) prostokąta o bokach a i b oraz masie M

ZADANIE DOMOWE 5.5 – dla ambitnych

Znaleźć (w układzie osi głównych) tensor momentu bezwładności walca o promieniu podstawy R i wysokości H oraz masie M

Twierdzenie o osiach równoległych – twierdzenie Steinera



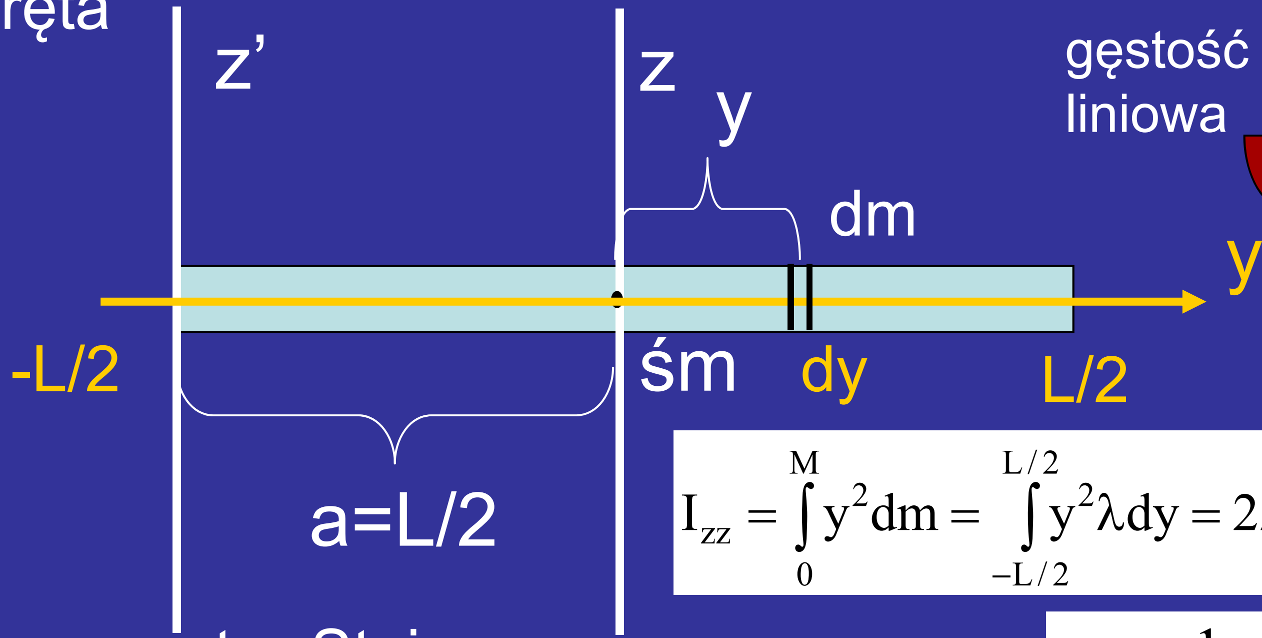
Śm-środek masy

Jeżeli oś z' jest równoległa do osi z, to

$$I_{z'z'} = I_{zz} + Ma^2$$

a jest odległością pomiędzy osiami

Przykład 3 Obliczyć moment bezwładności jednorodnego pręta o masie M i długości L względem osi przechodzącej przez (a) środek masy pręta (b) przez jeden z końców pręta



gęstość liniowa $\lambda = \frac{dm}{dy} = \frac{M}{L}$

$$I_{zz} = \int_0^M y^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = 2\lambda \int_0^{L/2} y^2 dy = \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} ML^2$$

tw. Steinera

$$I_{z'z'} = I_{zz} + Ma^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

ZADANIE DOMOWE 5.6

Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez koniec pręta można obliczyć nie korzystając z twierdzenia o osiach równoległych (tw. Steinera). Pokazać, że prawidłowy wynik otrzymamy poprzez prostą zmianę granic całkowania.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się dookoła nieruchomego środka masy nazywamy energią rotacyjną i wyrażamy wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_n m_n v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_n m_n \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_n\right)^2$$

korzystając z tożsamości wektorowej

$$\left(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right) \circ \left(\vec{\mathbf{c}} \times \vec{\mathbf{d}}\right) = \left(\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{c}}\right)\left(\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{d}}\right) - \left(\vec{\mathbf{a}} \circ \vec{\mathbf{d}}\right)\left(\vec{\mathbf{b}} \circ \vec{\mathbf{c}}\right)$$

znajdujemy
$$\left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}\right)^2 = \omega^2 r^2 - \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \circ \vec{\mathbf{r}}\right)^2$$

Energię kinetyczną (rotacyjną) bryły sztywnej o dowolnym kształcie zapisujemy jako:

$$E_k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2\omega_x\omega_y I_{xy} + 2\omega_y\omega_z I_{yz} + 2\omega_z\omega_x I_{zx})$$

dla brył o symetrii sferycznej

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$$

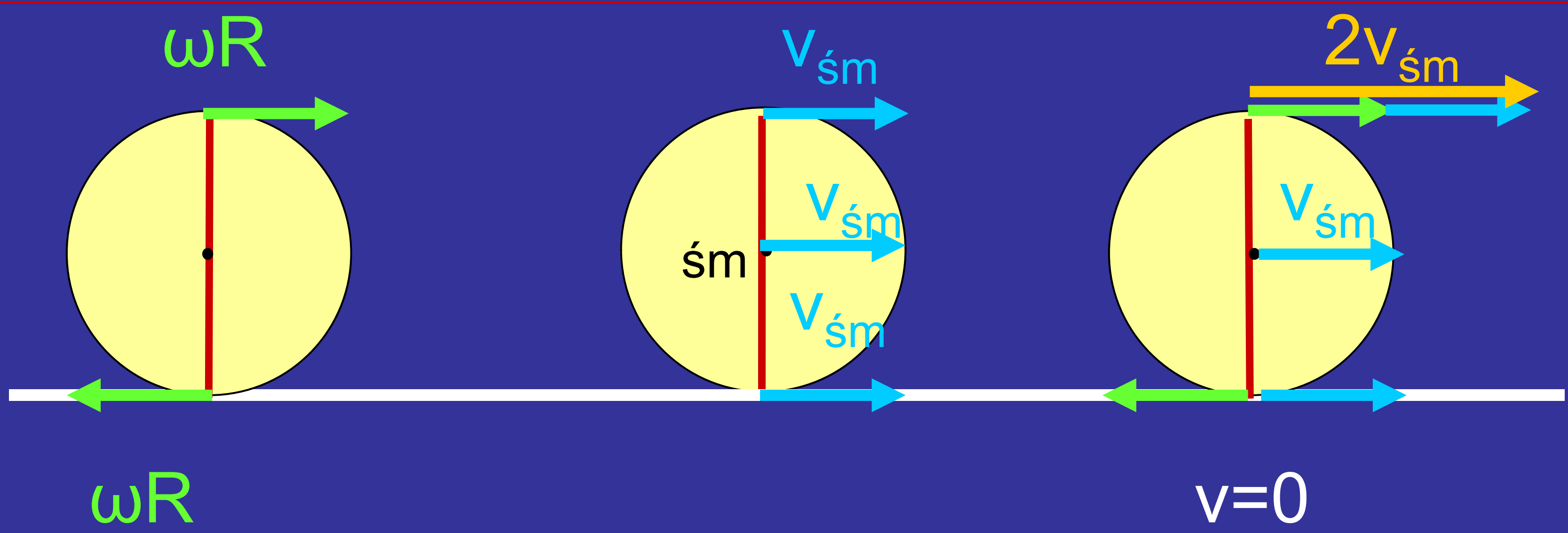
$$E_k = \frac{1}{2} I(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) = \frac{1}{2} I\omega^2$$

TOCZENIE BEZ POŚLIZGU

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy

2R

śm



ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez środek masy

ruch postępowy

$$v_{śm} = \omega R$$

toczenie bez poślizgu jako złożenie ruchów

Przyczyną toczenia bez poślizgu jest siła tarcia statycznego

$$a_{śm} = \varepsilon R$$

Przykład 4 Obliczyć energię kinetyczną toczących się bez poślizgu brył: a) walca b) kuli c) cienkiej obręczy. Wszystkie bryły mają tę samą masę m=1 kg i tę samą prędkość liniową środka masy $v_{śm}$=10 m/s

$$E_k = E_{kp} + E_{ko}$$

całkowita energia kinetyczna

energia kinetyczna ruchu postępowego

energia kinetyczna ruchu obrotowego

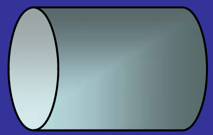
$$E_{kp} = \frac{1}{2} m v_{śm}^2$$

$$v_{śm} = \omega R$$

$$E_{ko} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

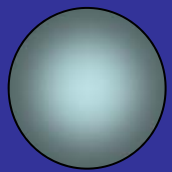
Całkowita energia kinetyczna



$$I_{walca} = \frac{1}{2} mR^2$$

walca

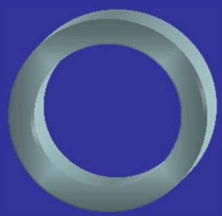
$$E_{kw} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{4} mR^2\omega^2 = \frac{3}{4} mv_{śm}^2$$



$$I_{kuli} = \frac{2}{5} mR^2$$

kuli

$$E_{kk} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{5} mR^2\omega^2 = \frac{7}{10} mv_{śm}^2$$



obręczy

$$E_{kobr} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2 = mv_{śm}^2$$

$$I_{obr} = mR^2$$

$$E_{kobręczy} > E_{kwalca} > E_{kkuli}$$

ZADANIE DOMOWE 5.7

Pod górę równi pochyłej wtaczają się: kula i walec. Obie bryły u podstawy równi miały tę samą prędkość środka masy. Która z brył wtoczy się wyżej?

RÓWNANIA RUCHU BRYŁY SZTYWNEJ – RÓWNANIA EULERA

W układzie związanym ze środkiem masy bryły, czyli w układzie obracającym się razem z bryłą (w układzie nieinercjalnym)

wypadkowy moment siły

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_r + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{L}}$$

zmiana momentu pędu w układzie inercjalnym

zmiana momentu pędu w układzie nieinercjalnym

Założenie: układ osi głównych:

$$L_x = I_{xx}\omega_x$$
$$L_y = I_{yy}\omega_y$$
$$L_z = I_{zz}\omega_z$$

Równania Eulera

$$\tau_x = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\omega_y\omega_z$$
$$\tau_y = I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} + \left(I_{xx} - I_{zz}\right)\omega_x\omega_z$$
$$\tau_z = I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_{yy} - I_{xx}\right)\omega_x\omega_y$$

gdy $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$

$\Rightarrow$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = I\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Precesja swobodna

$$\vec{\tau} = 0$$

$$0 = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_{zz} - I_{yy}\right)\omega_y\omega_z$$

$$0 = I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} + \left(I_{xx} - I_{zz}\right)\omega_x\omega_z$$

$$0 = I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_{yy} - I_{xx}\right)\omega_x\omega_y$$

Kula: $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=I$

$$0 = I\frac{d\omega_x}{dt}$$

$$0 = I\frac{d\omega_y}{dt}$$

$$0 = I\frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\omega_x = \text{const}$$

$$\omega_y = \text{const}$$

$$\omega_z = \text{const}$$

$$\vec{\omega} = \text{const}$$

ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

W układzie inercjalnym, wypadkowy moment sił zewnętrznych

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{wyp} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

zmiana momentu pędu bryły sztywnej

Jeżeli $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{wyp} = 0$ to $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0$ czyli $\vec{\mathbf{L}} = \mathrm{const}$

moment pędu jest zachowany

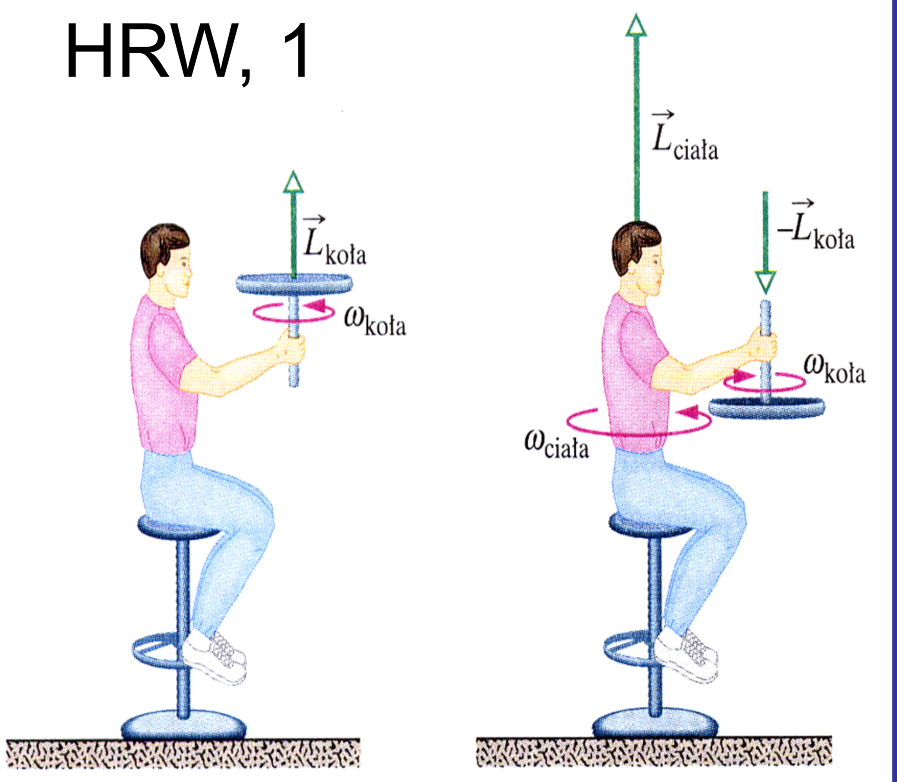
Zasada zachowania momentu pędu

Ilustracja zasady zachowania momentu pędu

- Moment pędu L = I ω
- Moment bezwładności I opisujący rozkład masy obiektu I=(masa) x (odległość od osi obrotu)^2 maleje, to prędkość kątowa ω rośnie

Przykład 5 Na rysunku przedstawiono studenta siedzącego na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, które ma moment bezwładności I_k=1.2 kg·m^2 względem swojej osi. Koło obraca się z prędkością kątową $\omega_{koła}$ = 3,9 obrotów/s. W pewnej chwili student obraca koło w wyniku czego student, stołek i środek masy koła zaczynają się obracać razem wokół osi obrotu stołka. Moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi $I_{ciała}$=6,8 kg ·m^2. Obliczyć prędkość kątową $\omega_{ciała}$ po obróceniu koła. W jakim kierunku obraca się student wraz z kołem?

HRW, 1

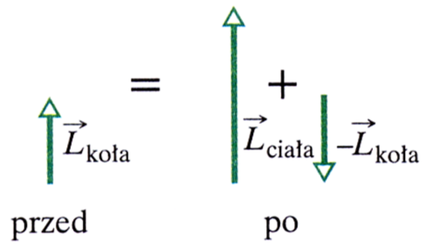


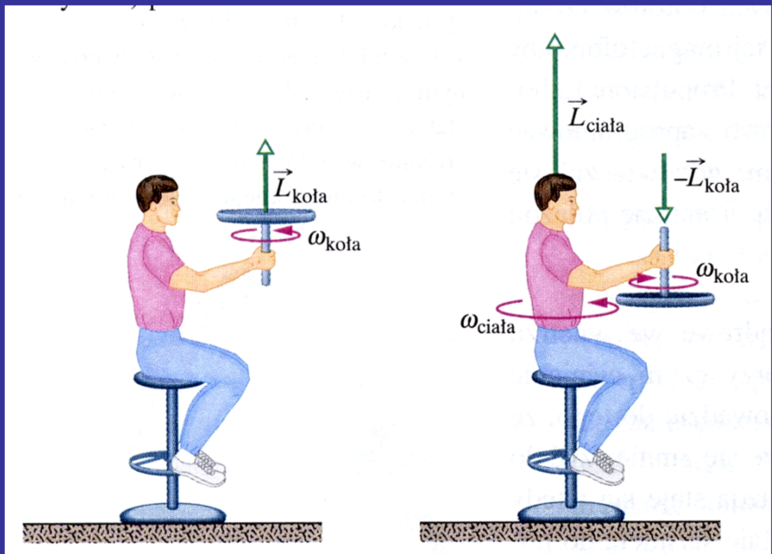
Rozwiązanie:

z zasady zachowania momentu pędu

$$\vec{\mathbf{L}}_{przed} = \vec{\mathbf{L}}_{po}$$

HRW, 1





$$L_{koło} = L_{ciał} - L_{koło}$$

$$L_{ciał} = 2L_{koło}$$

$$\omega_{ciał} I_{ciał} = 2\omega_{koło} I_{koło}$$

$$\omega_{ciał} = 2\omega_{koło} \frac{I_{koło}}{I_{ciał}}$$

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów

Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś obrotu)	
położenie	x (m)	położenie kątowe	α (rad)
prędkość liniowa v (m/s)	$v = \frac{dx}{dt}$	prędkość kątowa ω (rad/s)	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
przyspieszenie liniowe a (m/s^2)	$a = \frac{dv}{dt}$	przyspieszenie kątowe ε (rad/s^2)	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
masa	m (kg)	moment bezwładności	I ($kg\ m^2$)

Porównanie podstawowych wielkości fizycznych i wzorów cd.

siła F (N)	$\vec{\mathbf{F}} = m\,\vec{\mathbf{a}}$	moment siły τ (N m)	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\,\vec{\varepsilon}$
pęd p (kg m/s)	$\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$	moment pędu L (kg m^{2}s)	$\vec{\mathbf{L}} = I\,\vec{\omega}$
energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{m}{2} v^2$	energia kinetyczna E_k (J)	$E_k = \frac{I}{2} \omega^2$
uogólniona zasada dynamiki	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	uogólniona zasada dynamiki	$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\,\vec{\mathbf{L}}}{dt}$

PODSUMOWANIE

- Do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej używamy wektorów: momentu pędu, wektor momentu siły i prędkości kątowej. Wprowadzamy również pojęcie rotacyjnej energii kinetycznej.
- Wektory momentu pędu i prędkości kątowej nie muszą być do siebie równoległe, bo $\vec{\mathbf{L}} = \tilde{\mathrm{I}}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$ gdzie $\tilde{\mathrm{I}}$ jest tensorem momentu bezwładności
- Postać tensora momentu bezwładności ma ścisły związek z symetrią bryły sztywnej i wybranym układem odniesienia
- Równania Eulera opisują dynamikę bryły sztywnej