METODY NUMERYCZNE

Wykład 3.

dr hab.inż. Katarzyna Zakrzewska, prof.AGH

Plan

- Aproksymacja
- Interpolacja wielomianowa
- Przykłady

Aproksymacja

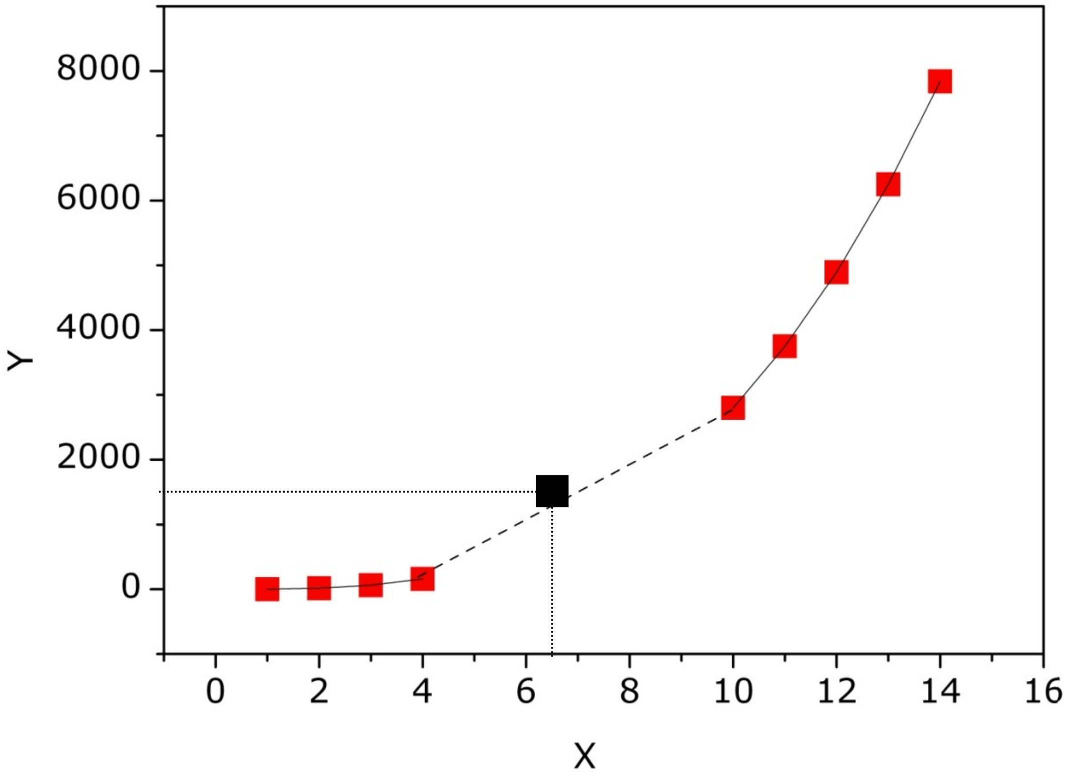
Metody numeryczne zajmują się rozwiązywaniem zadań matematycznych za pomocą działań arytmetycznych. Zachodzi zatem potrzeba **przybliżania** wielkości nie arytmetycznych wielkościami arytmetycznymi i badania **błędów** wywołanych takimi przybliżeniami. Wybór przybliżenia zależy od tego, którym z możliwych **kryteriów** posłużymy się w ocenie skuteczności danego przybliżenia.

Jaki jest dopuszczalny błąd wyniku?

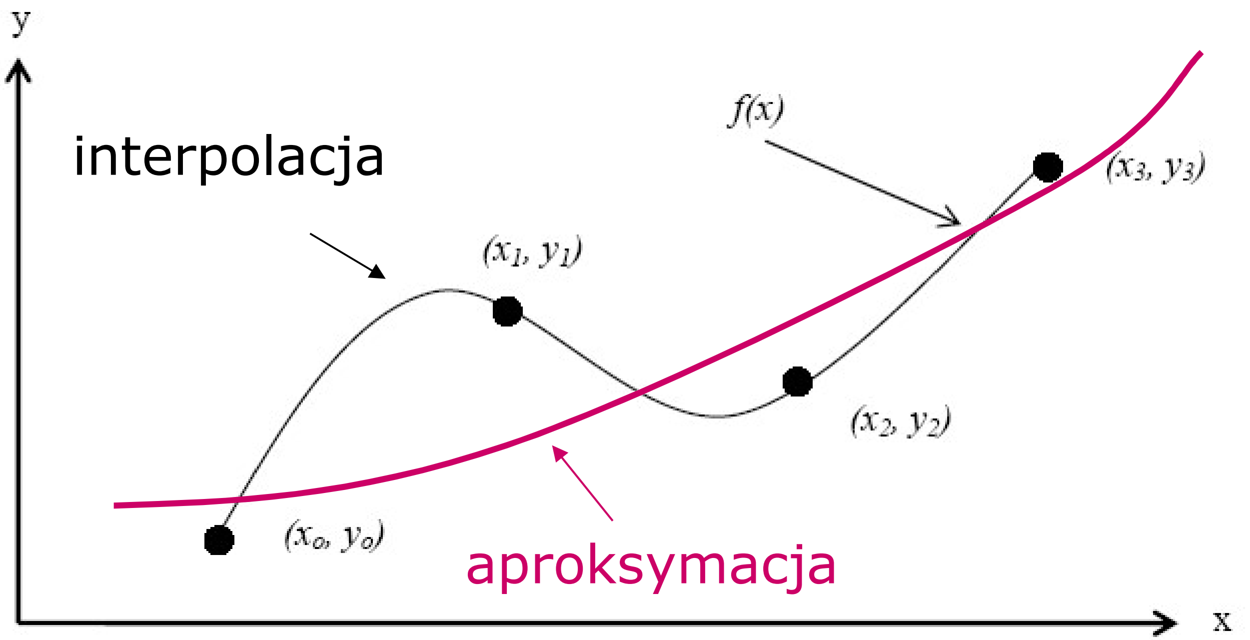
Jak szybko można otrzymać rozwiązanie – jaka jest szybkość zbieżności danej metody, np. procesu iteracyjnego?

Co to jest interpolacja ?

Dane są punkty (x_0,y_0), (x_1,y_1), ….(x_n,y_n). Znaleźć nieznaną wartość y dla dowolnego x.



Różnica pomiędzy aproksymacją i interpolacją



Aproksymacja

Chcemy przybliżyć funkcję f(x) kombinacją (najczęściej liniową) funkcji należących do pewnej szczególnej klasy.

Klasy funkcji:

$\{x^n\}\ (n = 0, 1, ...)$ dla N pierwszych wyrazów szeregu Taylora

$\{p_n(x)\}\ (n = 0, 1, ...)$ ogólniej: $p_n(x)$ jest wielomianem stopnia n

$\{\sin(nx), \cos(nx)\}\ (n = 0, 1, 2 ...)$ wielomiany trygonometryczne

Największe znaczenie posiada aproksymacja wielomianowa

Aproksymacja

Aproksymacja **liniowa** funkcji f(x)

$$f(x) \approx a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_m g_m(x)$$

klasy funkcji: $\{g_n(x)\}\ (n = 0, 1, \ldots)$

współczynniki stałe: $a_i (i = 0, 1, \ldots, m)$

Przybliżenia liniowe stosuje się ponieważ badanie aproksymacji kombinacjami nieliniowymi funkcji przybliżających jest bardzo trudne jak analiza większości zagadnień nieliniowych.

Czasami stosuje się przybliżenia wymierne:

$$f(x) \approx \frac{a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_m g_m(x)}{b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \ldots + b_k g_k(x)}$$

Aproksymacja

Kryteria wyboru stałych współczynników $a_i (i = 0, 1, \ldots, m)$

<u>Trzy typy przybliżeń o dużym znaczeniu</u>

•**przybliżenie interpolacyjne**

współczynniki są tak dobrane, aby w punktach

$$x_i (i = 1, 2, \ldots, p)$$

funkcja przybliżająca wraz z jej pierwszymi r_i pochodnymi (r_i jest liczbą całkowitą nieujemną) była zgodna z f(x) i jej pochodnymi (z dokładnością do błędów zaokrągleń)

Aproksymacja

Kryteria wyboru stałych współczynników $a_i (i = 0, 1, \ldots, m)$

- **przybliżenie średniokwadratowe**

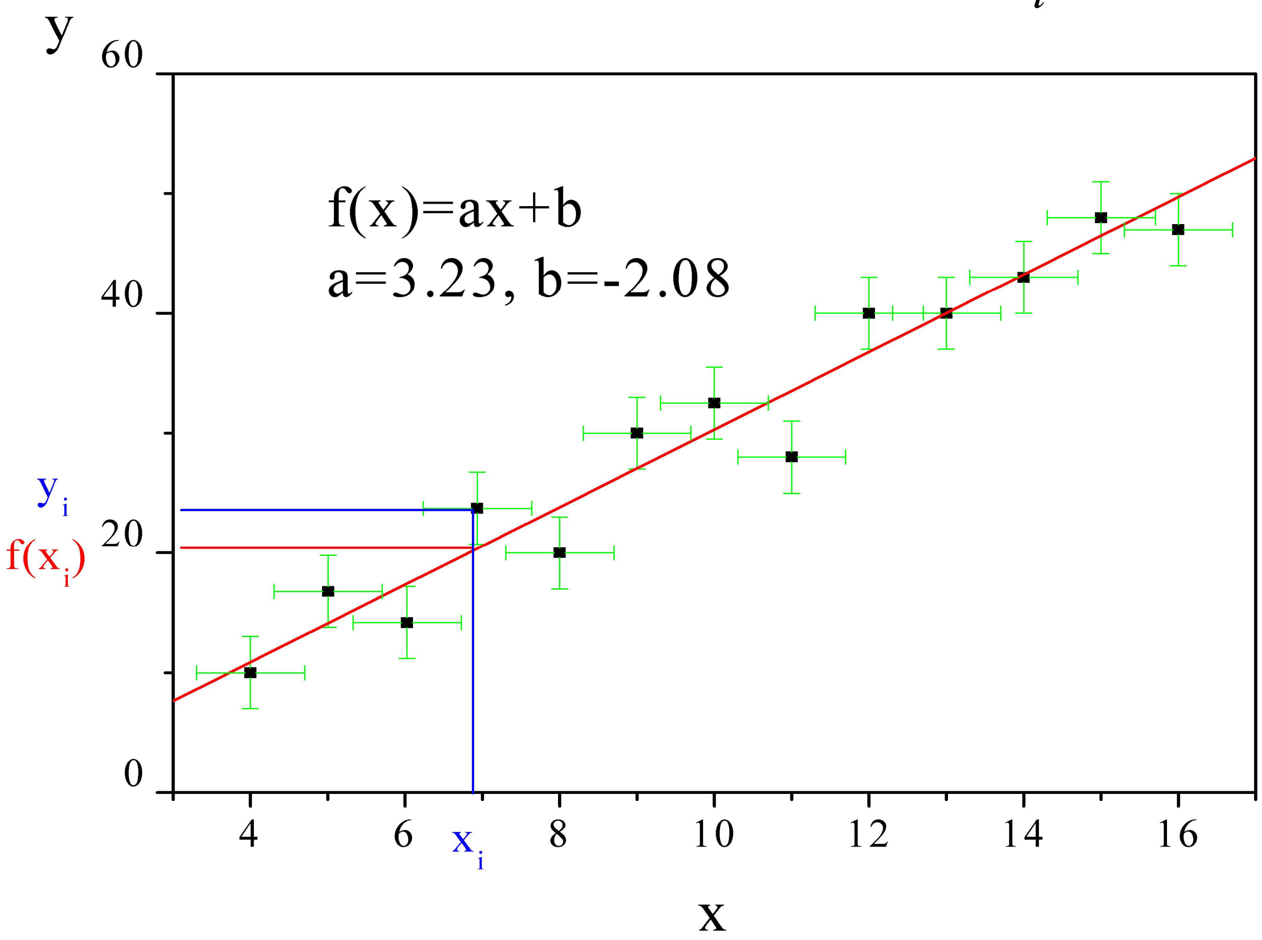
  szukamy minimum wyrażenia będącego całką z kwadratu różnicy pomiędzy f(x) i jej przybliżeniem w przedziale <x_1,x_2> lub sumą ważoną kwadratów błędów rozciągniętą na zbiór dyskretny punktów z przedziału <x_1,x_2>

- **przybliżenie jednostajne**

  znalezienie najmniejszego maksimum różnicy między f(x) i jej przybliżeniem w przedziale <x_1,x_2>

Metoda najmniejszych kwadratów
Regresja liniowa

$$S^2 = \sum_i^n \left[y_i - \left(ax_i + b \right) \right]^2 = \min$$



Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymujemy układ równań liniowych dla niewiadomych *a* i *b*

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań uzyskuje się wyrażenia na *a* i *b*

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

gdzie: wyznacznik główny W wyraża się wzorem

$$W = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

Z praw statystyki można wyprowadzić wyrażenia na odchylenia standardowe u(a) i u(b) obu parametrów prostej a,b:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a)\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Aproksymacja wielomianowa

Zastosowanie w obliczeniach wielomianów jako funkcji przybliżających wiąże się z faktem, że maszyna cyfrowa wykonuje w praktyce działania arytmetyczne.

Wspólną właściwością potęg zmiennej i wielomianów trygonometrycznych (a także funkcji wykładniczych) jest to, że w przybliżeniach korzystających z każdej z tych klas przesunięcie układu współrzędnych zmienia współczynniki, ale nie zmienia postaci przybliżenia.

Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem lub funkcją wymierną to $P(x+\alpha)$ jest również tej postaci, a jeśli $T(x)$ jest liniowym lub wymiernym przybliżeniem zbudowanym z sinusów lub cosinusów, to takie jest również $T(x+\alpha)$.

Aproksymacja wielomianowa

Przybliżenia funkcjami $\{x^n\}\ (n = 0,1,...)$

mają taką zaletę, że przy zmianie skali zmiennej zmieniają się tylko współczynniki, a nie zmienia się kształt przybliżenia. Przykład: wielomian P(kx) jest również wielomianem zmiennej x.

Tej własności nie mają przybliżenia trygonometryczne, gdyż dla niecałkowitego k na ogół sin(nkx) nie jest elementem klasy

$$\{\sin(nx)\}\ (n = 0,1,2...)$$

Aproksymacja wielomianowa

Najczęściej wybiera się wielomiany gdyż można łatwo:

- obliczać ich wartości
- różniczkować
- całkować

Aproksymacja wielomianowa

Z przybliżeń wielomianowych wywodzą się metody:

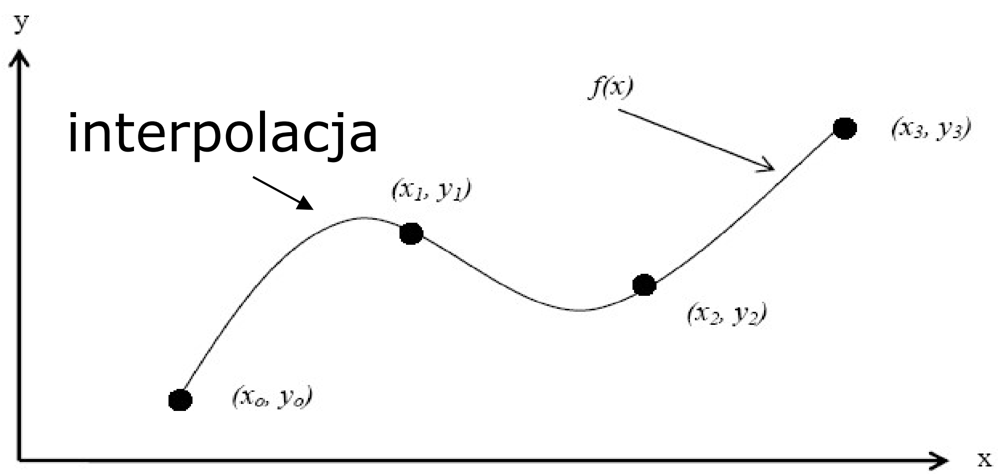
- interpolacji
- ekstrapolacji
- różniczkowania numerycznego
- kwadratur
- rozwiązywania numerycznego równań różniczkowych zwyczajnych

Powiązania pomiędzy tymi metodami są łatwo dostrzegalne, gdyż metody interpolacyjne są podstawą wzorów różniczkowania numerycznego, kwadratur i rozwiązywania numerycznego równań różniczkowych.

Założenie:

W przedziale [*a*,*b*] danych jest (n+1) różnych punktów x_0, x_1, …, x_n, które nazywamy węzłami interpolacji, oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach:

$$f(x_i) = y_i \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, n.$$



INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

Zadanie interpolacji:

Wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz oszacowanie błędu tych przybliżonych wartości.

1. W tym celu należy znaleźć funkcję $F(x)$, zwaną *funkcją interpolującą*, która będzie „przybliżać" funkcję $f(x)$ w przedziale $[a,b]$.
2. Funkcja $F(x)$ w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości co funkcja $y = f(x)$.
3. W zagadnieniu interpolacji wielomianowej funkcja $F(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n.

Twierdzenie

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Interpolacja - metoda bezpośrednia

Przez n+1 punktów (x_0,y_0), (x_1,y_1), ….(x_n,y_n) przechodzi dokładnie jeden wielomian stopnia n

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x^n.$$

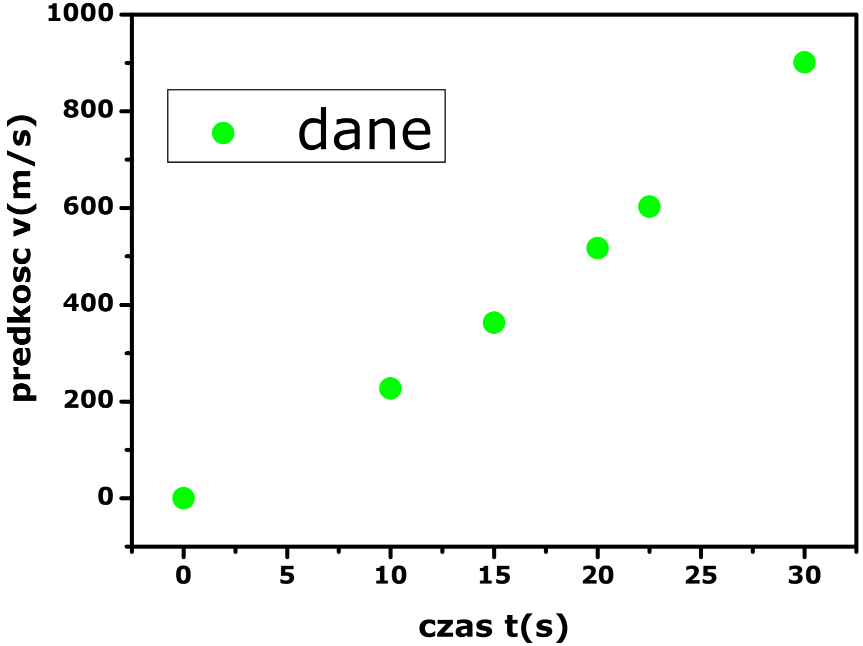
gdzie a_0, a_1, …. a_n są stałymi współczynnikami (R)

- Ułożyć n+1 równań aby znaleźć n+1 stałych
- Podstawić wartość x do wielomianu, aby znaleźć y

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



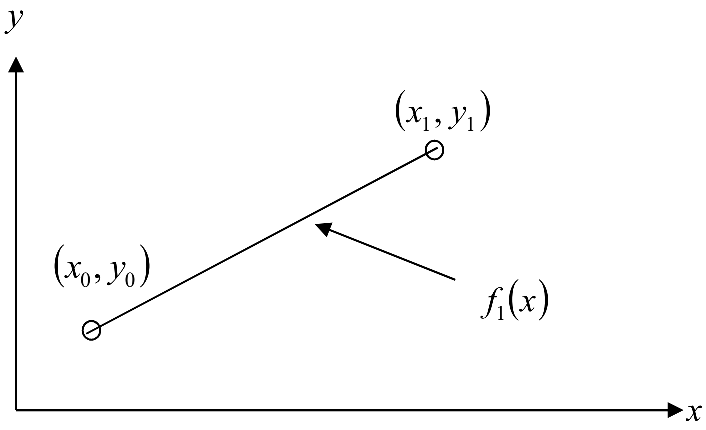
Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę bezpośrednią dla dwóch punktów

Interpolacja liniowa

$$v(t) = a_0 + a_1 t$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35$$



Rozwiązanie układu równań

$$a_0 = -100.93$$

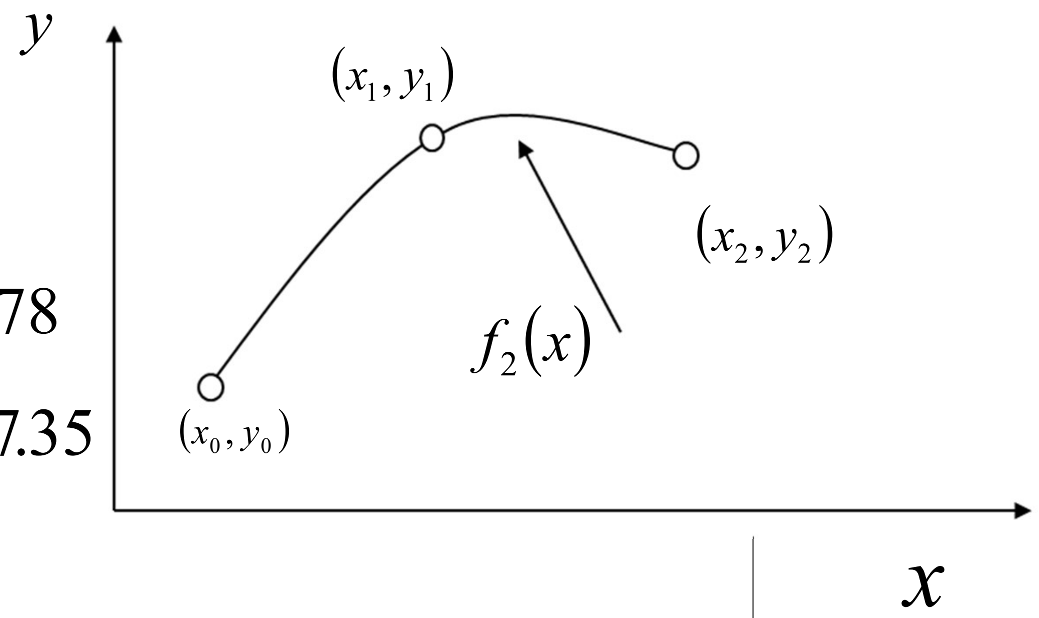
$$a_1 = 30.914$$

A zatem $\quad v(t) = -100.93 + 30.914t, \; 15 \le t \le 20$

$$\text{v}(16) = -100.93 + 30.914(16) = 393.7 \text{ m/s}$$

Interpolacja kwadratowa

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$



$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$

Rozwiązanie układu równań

$$a_0 = 12.05 \quad a_1 = 17.733 \quad a_2 = 0.3766$$

$$v(t) = 12.05 + 17.733t + 0.3766t^2, \; 10 \le t \le 20$$

$$v(16) = 12.05 + 17.733(16) + 0.3766(16)^2 = 392.19 \text{ m/s}$$

Interpolacja kwadratowa

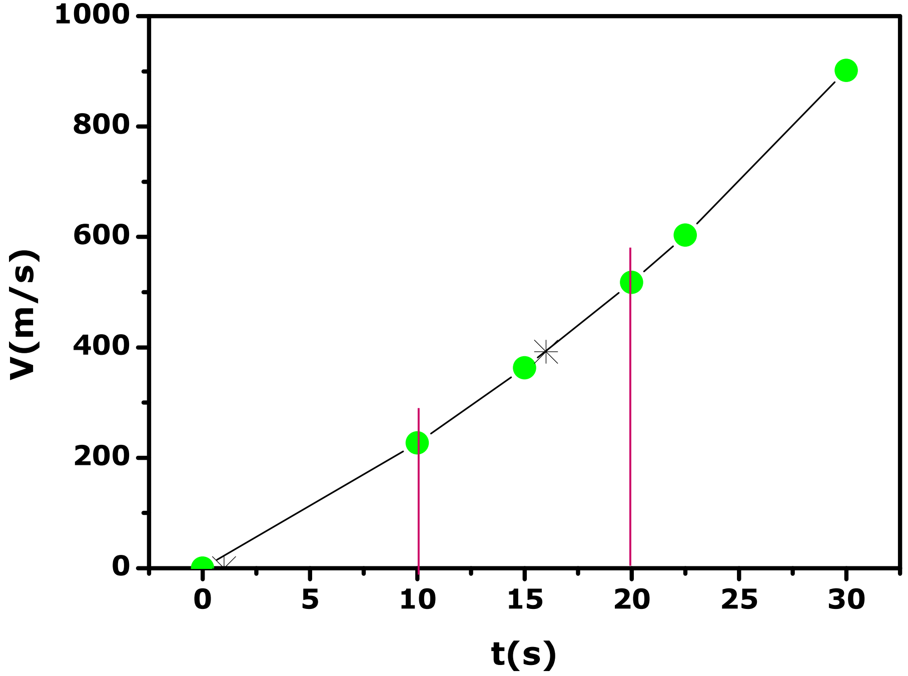
$$v(t) = 12.05 + 17.733t + 0.3766t^2, \ 10 \leq t \leq 20$$

$$v(16) = 392.19 m/s$$

Błąd względny

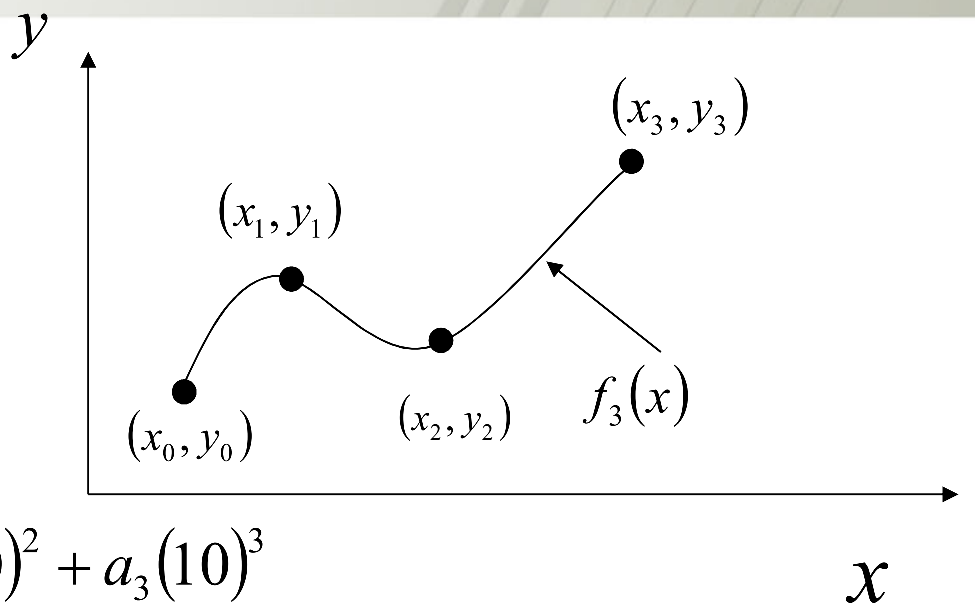
$$|\in_a| = \left| \frac{392.19 - 393.70}{392.19} \right| \times 100$$

$$= 0.38410\%$$



Interpolacja sześcienna

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$



$$v(10) = 227.04 = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 + a_3(10)^3$$

$$v(15) = 362.78 = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 + a_3(15)^3$$

$$v(20) = 517.35 = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 + a_3(20)^3$$

$$v(22.5) = 602.97 = a_0 + a_1(22.5) + a_2(22.5)^2 + a_3(22.5)^3$$

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 = 227.04 \\ a_0 + 15a_1 + 225a_2 + 3375a_3 = 362.78 \\ a_0 + 20a_1 + 400a_2 + 8000a_3 = 517.35 \\ a_0 + 22.5a_1 + 506.25a_2 + 11390.625a_3 = 602.97 \end{cases}$$

Podać i narysować v(t)

Interpolacja sześcienna -rozwiązanie

$$a_0 = -4.2540$$

$$a_1 = 21.266$$

$$a_2 = 0.13204$$

$$a_3 = 0.0054347$$

$$10 \le t \le 22.5$$

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3,$$

$$v(16) = 392.06\ m/s$$

Błąd względny

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{392.06 - 392.19}{392.06}\right| \times 100$$

$$= 0.033269\,\%$$

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
$v(t=16)\,\mathrm{m/s}$	393.7	392.19	392.06
błąd względny	----------	0.38410 %	0.033269 %

Obliczenia przemieszczenia

od t=11s do t=16s

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3, 10 \le t \le 22.5$$

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t)\,dt$$

$$= \int_{11}^{16} \left(-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3\right)dt$$

$$= \left[-4.2540t + 21.266\frac{t^2}{2} + 0.13204\frac{t^3}{3} + 0.0054347\frac{t^4}{4}\right]_{11}^{16}$$

$$= 1605\,m$$

Obliczenia przyspieszenia

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204^{2} + 0.0054347\,t^{3}, 10 \le t \le 22.5$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-4.2540 + 21.266t + 0.13204\,t^{2} + 0.0054347\,t^{3}\right)$$

$$= 21.266 + 0.26408\,t + 0.016304\,t^{2}, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$a(16) = 21.266 + 0.26408(16) + 0.016304(16)^{2}$$

$$= 29.665\ m/s^{2}$$

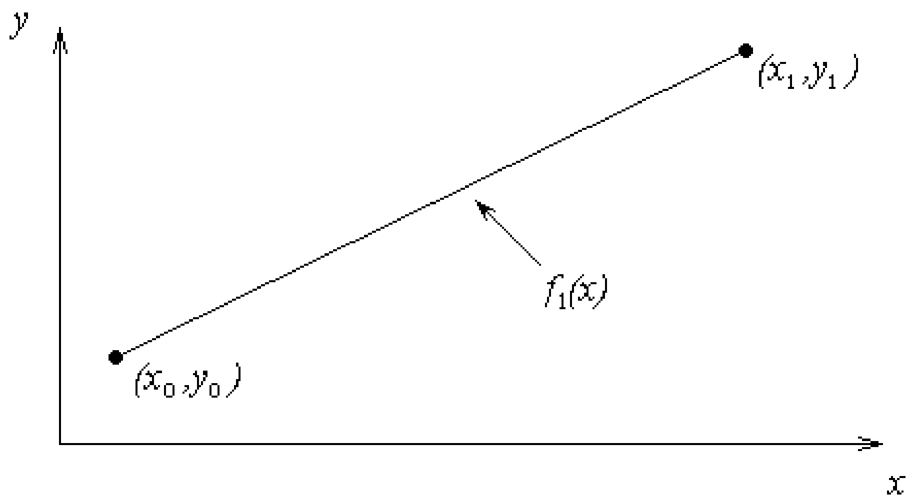
Wzór interpolacyjny Newtona

Interpolacja liniowa: dane są punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1),

szukamy

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

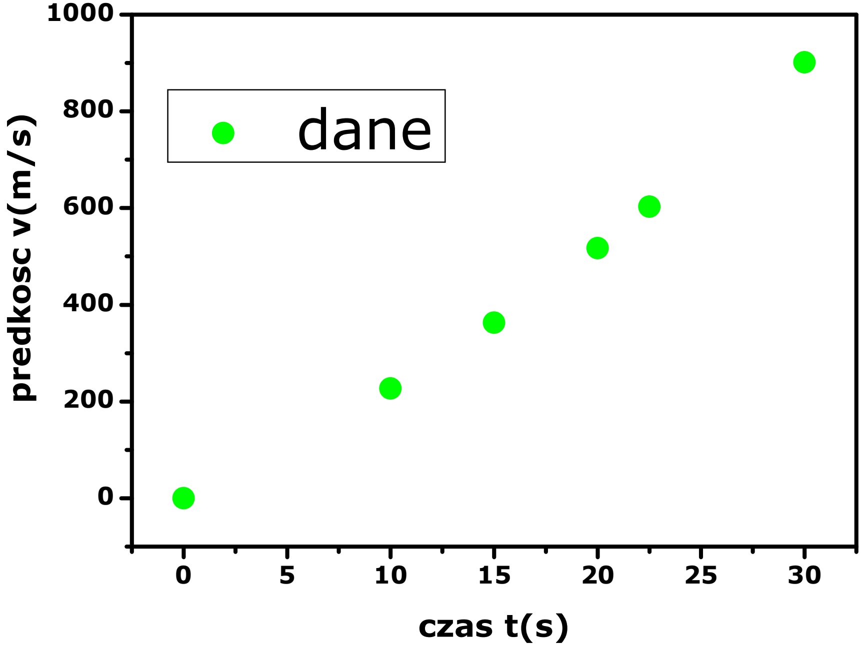
$$\begin{cases} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{cases}$$



Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę Newtona

Interpolacja liniowa

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

Wiadomo, że:

$$t_0 = 15,\ \ v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20,\ \ v(t_1) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$b_0 = v(t_0) = 362.78$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 30.914$$

A zatem:

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) =$$

$$= 362.78 + 30.914(t - 15),\ \ 15 \le t \le 20$$

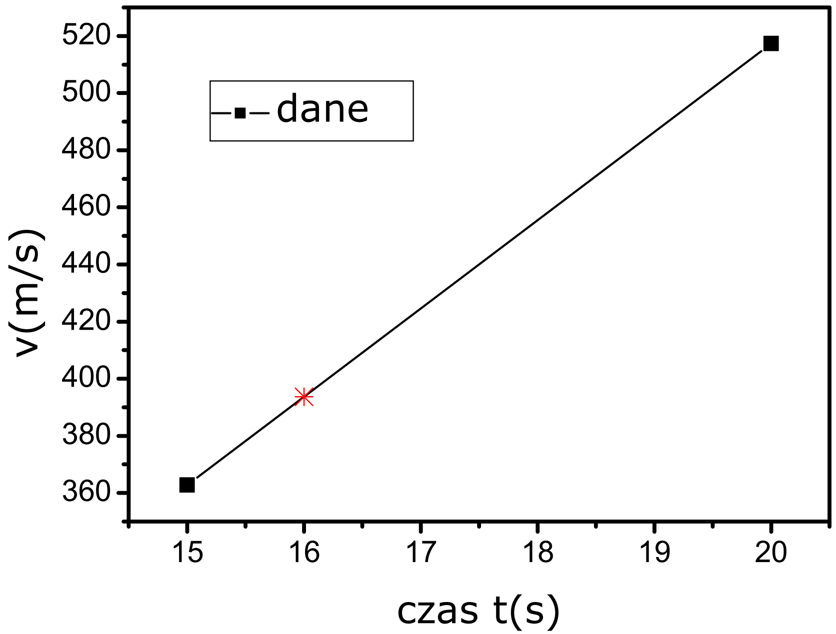
Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja liniowa

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

Szukana prędkość w chwili t=16 s wynosi:

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) =$$
$$= 362.78 + 30.914(16 - 15)$$
$$= 393.69 \;\; m/s$$



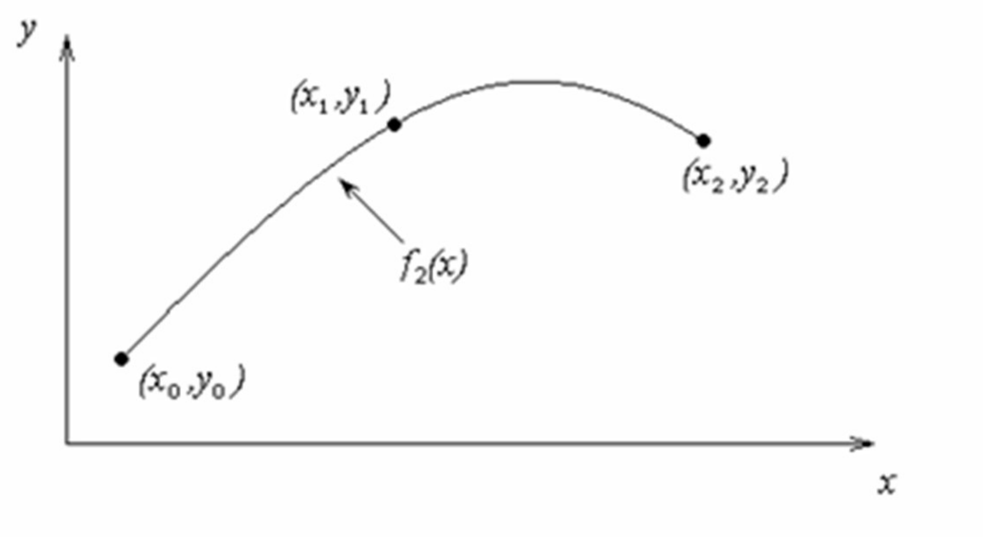
Interpolacja kwadratowa

Dane są punkty $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),$

szukamy

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\begin{cases} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ b_2 = \dfrac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{cases}$$



Interpolacja kwadratowa

Wiadomo, że:

$$t_0 = 10,\ \ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ \ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ \ v(t_2) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$b_0 = v(t_0) = 227.04$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10} =$$

$$= 27.148$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} - \dfrac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} = \frac{30.914 - 27.148}{10} =$$

$$= 0.37660$$

Interpolacja kwadratowa

A zatem:

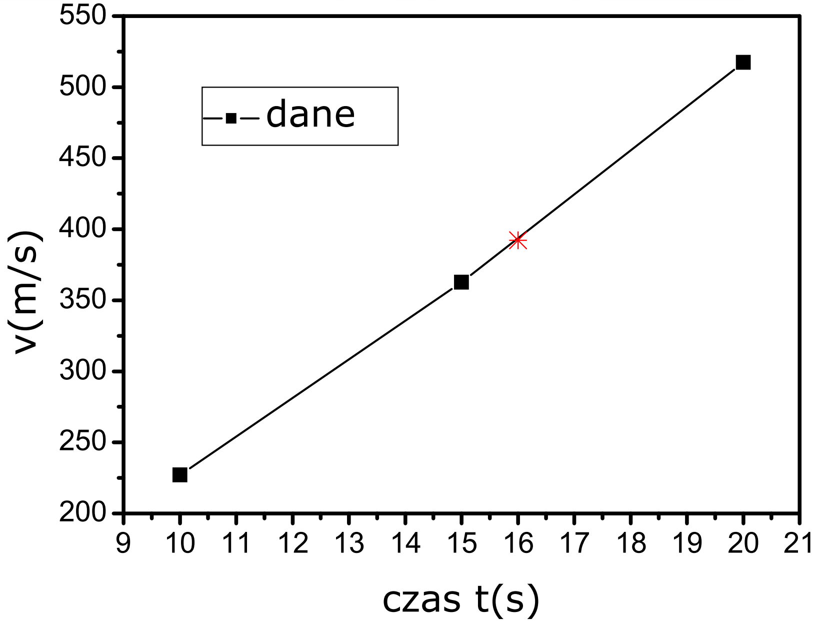
$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) =$$
$$= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15), \;\; 10 \le t \le 20$$

dla t=16s:

$$v(16) = b_0 + b_1(16 - t_0) + b_2(16 - t_0)(16 - t_1) =$$
$$= 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15)$$
$$= 392.19 \; m/s$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja kwadratowa



Błąd względny w odniesieniu do poprzedniej interpolacji

$$|\in_a| = \left|\frac{392.19 - 393.69}{392.19}\right| x100$$

$$= 0.38502\ \%$$

Ogólna formuła

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

gdzie

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$ ← iloraz różnicowy pierwszego rzędu

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

iloraz różnicowy drugiego rzędu

A zatem

$$\boxed{f_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)}$$

Ogólna formuła

Mając (n+1) punktów

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots. + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

gdzie

$$b_0 = f[x_0]$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} = f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots., x_0]$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots., x_0]$$

Interpolacja sześcienna

Wielomian 3-ciego stopnia, mając dane (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), i (x_3, y_3), ma postać

$$f_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

	b_0	b_1	b_2	b_3
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_1, x_0]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_2, x_1, x_0]$	
		$f[x_2, x_1]$		$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_3, x_2, x_1]$	
		$f[x_3, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Znaleźć równanie na prędkość i obliczyć v(16s) na podstawie interpolacji sześciennej Newtona :

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$

Dane

$$t_0 = 10,\ \ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ \ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ \ v(t_2) = 517.35$$

$$t_3 = 22.5,\ \ v(t_3) = 602.97$$

Znaleźć współczynniki b_i

Znaleźć drogę przebytą w czasie od 11s do 16 s. Znaleźć przyspieszenie w chwili t=16 s.

Rozwiązanie

			b_0		
$t_0 = 10$	227.04			b_1	
		27.148			b_2
$t_1 = 15,$	362.78			0.37660	b_3
		30.914			$5.4347x10^{-3}$
$t_2 = 20,$	517.35			0.44453	
		34.248			
$t_3 = 22.5,$	602.97				

$b_0 = 227.04$; $b_1 = 27.148$; $b_2 = 0.37660$; $b_3 = 5.4347*10^{-3}$

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Błąd względny przybliżenia	----------	0.38502 %	0.033427 %

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Dane są wartości funkcji $f(x_i)=y_i$ dla $i=0,1,\ldots n$ w punktach rozmieszczonych w jednakowych odstępach:

$$x_i = x_0 + ih$$

Pierwszy wielomian interpolacyjny Newtona ma postać:

$$N_n^I(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_o) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_o)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_o)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

gdzie $\Delta^k f(x_0)$ jest różnica progresywna k-tego rzędu

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Różnice progresywne:

$$\Delta y_i = f(x_i + h) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Jeśli wprowadzimy:

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

otrzymamy

$$W_n(x_q) = W_n(x_0 + qh) = y_0 + \frac{q}{1!}\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Ten wielomian interpolacyjny Newtona jest korzystny w pobliżu początku tablicy.

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Drugi wielomian interpolacyjny Newtona:

$$N_n^{II}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}).....(x - x_1)$$

Różnice wsteczne: $\nabla y_i = f(x_i) - f(x_i - h) = y_i - y_{i-1}$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

Można udowodnić, że:

$$\nabla^k y_i = \Delta^k y_{i-k}$$

Interpolacja z równo-odległymi węzłami

Jeśli wprowadzimy: $q = \frac{x_0 - x}{h}$

Drugi wielomian interpolacyjny Newtona przybiera postać:

$$W_n(x) = y_0 - q\nabla y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\nabla^2 y_0 - ... + (-1)^n \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\nabla^n y_0$$

Wzór ten jest korzystny w pobliżu końca tablicy i zawiera różnice wsteczne:

$$\nabla y_i = f(x_i) - f(x_i - h) = y_i - y_{i-1}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Inaczej:

$$W_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

Ogólnie:

$$W_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right)\frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\left\{\dfrac{\omega_n(x)}{x-x_j}\right\}\Bigg|_{x=x_j}} =\sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right)\frac{\omega_n(x)}{(x-x_j)\omega'_n(x_j)}$$

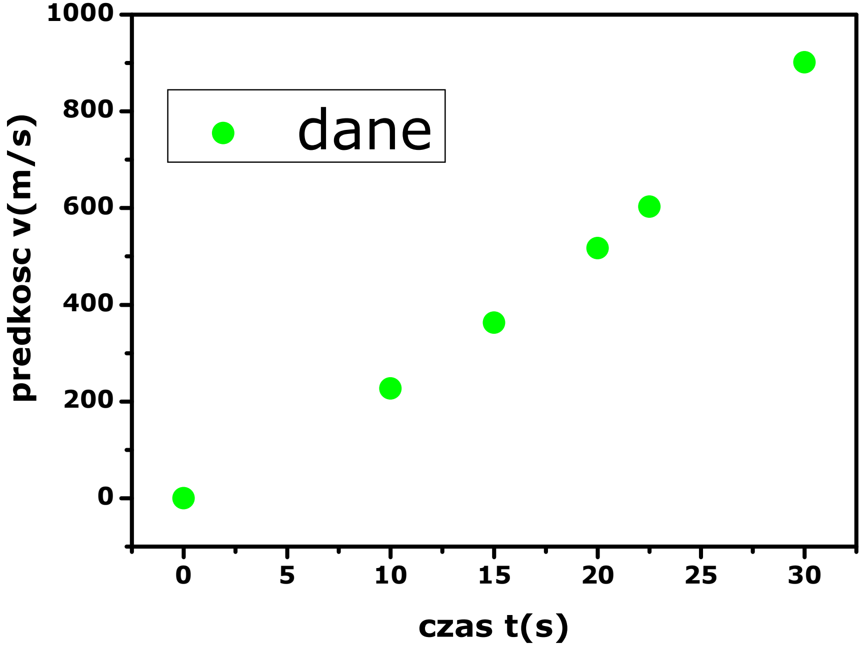
gdzie: $\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$\omega'_n(x_j)$ jest wartością pochodnej wielomianu $\omega_n(x)$ punkcie x_j będącym zerem tego wielomianu

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili t=16 s stosując metodę interpolacji wielomianem Lagrange'a dla dwóch punktów

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$v(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t)v(t_i) = L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1)$$

Wiadomo, że:

$$t_0 = 15, \ \ v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, \ \ v(t_1) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

A zatem:

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} v(t_1) =$$

$$= \frac{t - 20}{15 - 20} 362.78 + \frac{t - 15}{20 - 15} 517.35$$

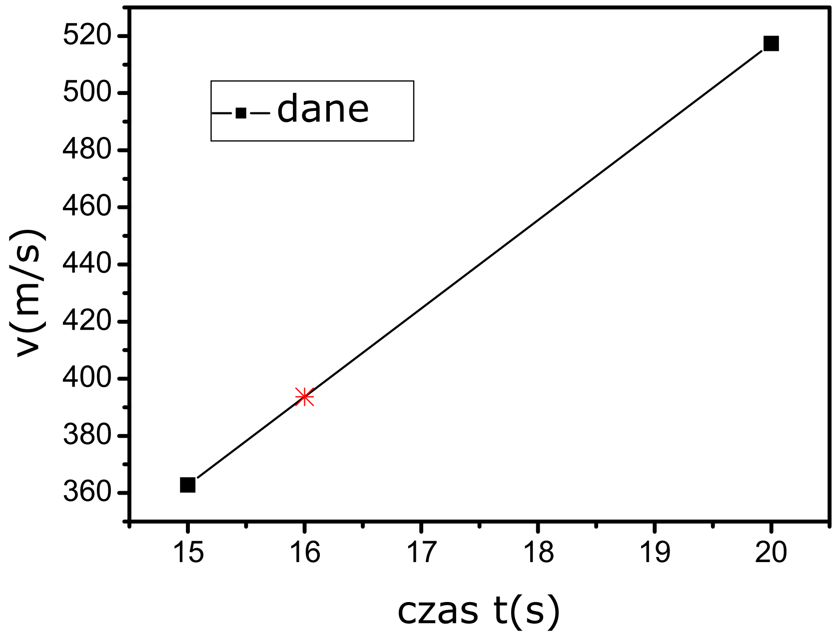
Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej

Interpolacja liniowa wielomianem Lagrange'a

$$v(16) = \frac{16-20}{15-20}(362.78) + \frac{16-15}{20-15}(517.35)$$

$$= 0.8\ (362.78) + 0.2\ (517.35) =$$

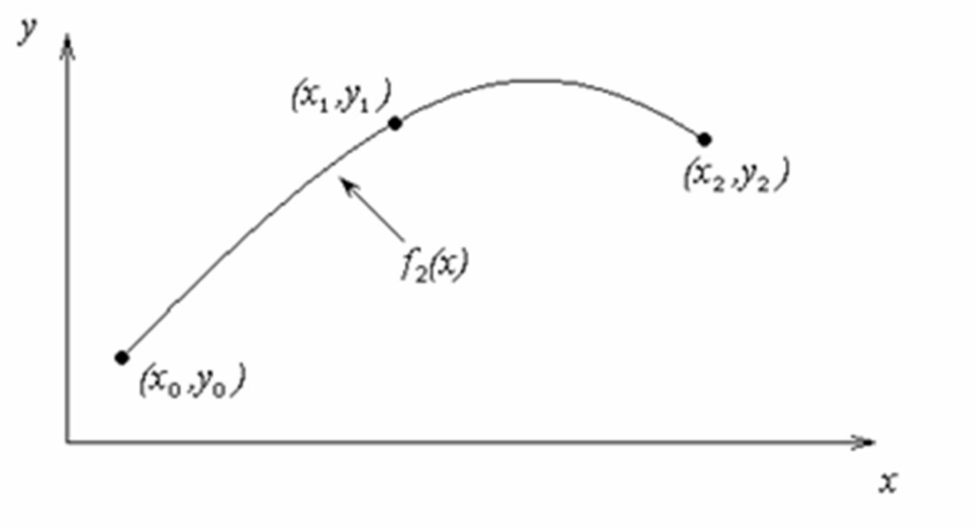
$$= 393.7\ m/s$$



Dane są punkty $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$

szukamy
$$v(t) = \sum_{i=0}^{2} L_i(t) v(t_i) =$$
$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$



Interpolacja kwadratowa

Wiadomo, że:

$$t_0 = 10,\ \ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ \ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ \ v(t_2) = 517.35$$

Znajdujemy:

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)}$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}$$

A zatem:

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}\frac{t - t_2}{t_0 - t_2}v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\frac{t - t_2}{t_1 - t_2}v(t_1) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}v(t_2)$$

dla t=16s:

$$v(16)=\frac{(16-15)}{(10-15)}\frac{(16-20)}{(10-20)}(227.04)+\frac{(16-10)}{(15-10)}\frac{(16-20)}{(15-20)}(362.78)$$

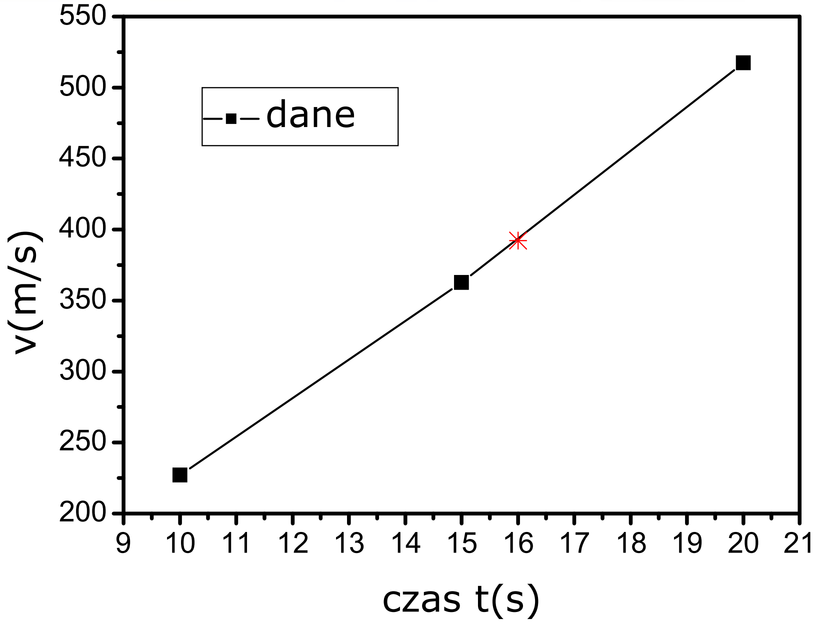
$$+\frac{(16-10)}{(20-10)}\frac{(16-15)}{(20-15)}(517.35)=$$

$$=(-0.08)(227.04)+(0.96)(362.78)+(0.12)(517.35)$$

$$=392.19\ m/s$$

Jako zadanie domowe, proszę sprawdzić czy wynik uzyskany jest zgodny z wynikiem interpolacji bezpośredniej i metodą Newtona.

Interpolacja kwadratowa



Błąd względny w odniesieniu do poprzedniej interpolacji

$$|\in_a| = \left|\frac{392.19 - 393.70}{392.19}\right| \times 100$$

$$= 0.38502\%$$

Interpolacja sześcienna

Zadanie domowe

Znaleźć równanie na prędkość i obliczyć v(16s) na podstawie interpolacji sześciennej Lagrange'a

Dane

$$t_0 = 10,\ \ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ \ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ \ v(t_2) = 517.35$$

$$t_3 = 22.5,\ \ v(t_3) = 602.97$$

Znaleźć drogę przebytą w czasie od 11s do 16 s. Znaleźć przyspieszenie w chwili t=16 s.
Porównać wyniki z uzyskanymi na podstawie interpolacji metodą bezpośredniej i Newtona.

Porównanie

Rząd wielomianu	1	2	3
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Błąd względny przybliżenia	----------	0.38502 %	0.033427 %

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład

Niech dane będą punkty: 0, 1, 3, 6. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który będzie przybliżać funkcję

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

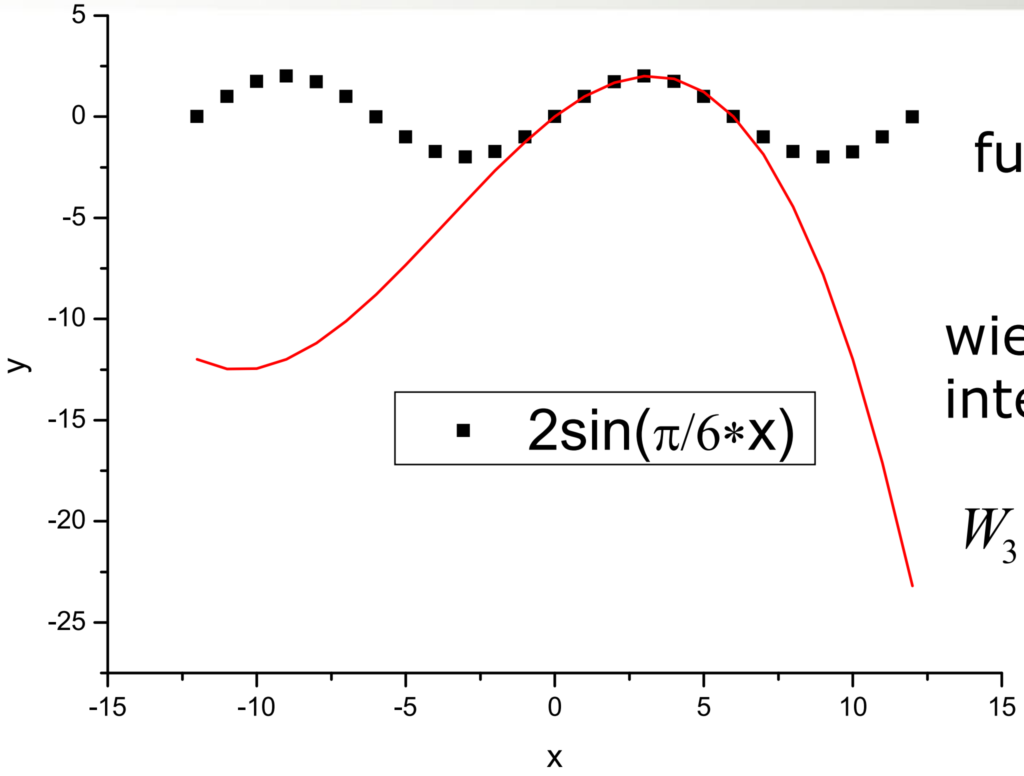
Rozwiązanie:
Wartości funkcji *f*(*x*) w węzłach interpolacji są następujące:

$$y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f(1) = 1, \quad y_2 = f(3) = 2, \quad y_3 = f(6) = 0.$$

Można pokazać, że wielomian interpolacyjny Lagrange'a przyjmuje postać:

$$W_3(x) = -\frac{x^3}{90} - \frac{11x^2}{90} + \frac{17x}{15}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a - przykład



funkcja f(x)

wielomian interpolacyjny $W_3(x)$

$$W_3(x) = -\frac{x^3}{90} - \frac{11x^2}{90} + \frac{17x}{15}$$

Wielomian interpolacyjny „przybliża" funkcję $f(x)$ tylko pomiędzy skrajnymi węzłami, tzn. w przedziale [0,6].
Im mniejsze odległości między węzłami, tym lepsze przybliżenie uzyskujemy

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Z jaką dokładnością wielomian interpolacyjny $W_n(x)$ przybliża funkcję *f*(*x*) w pozostałych punktach leżących wewnątrz przedziału <*a*, *b*>?

Zakładamy, że funkcja *f*(*x*) w rozpatrywanym przedziale <*a*, *b*> ma pochodne do rzędu (*n*+1) włącznie.

$$\left| f(x) - W_n(x) \right| \le \frac{\sup\limits_{x \in \langle a,b \rangle} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

zależy od wyboru węzłów interpolacji

Motywacja

Wady interpolacji wielomianowej:

Pogorszenie wyników interpolacji przy zwiększaniu liczby węzłów.

Przykład:

$$f(x) = |x|$$

Zjawisko Rungego (przykład źle uwarunkowanego zadania):

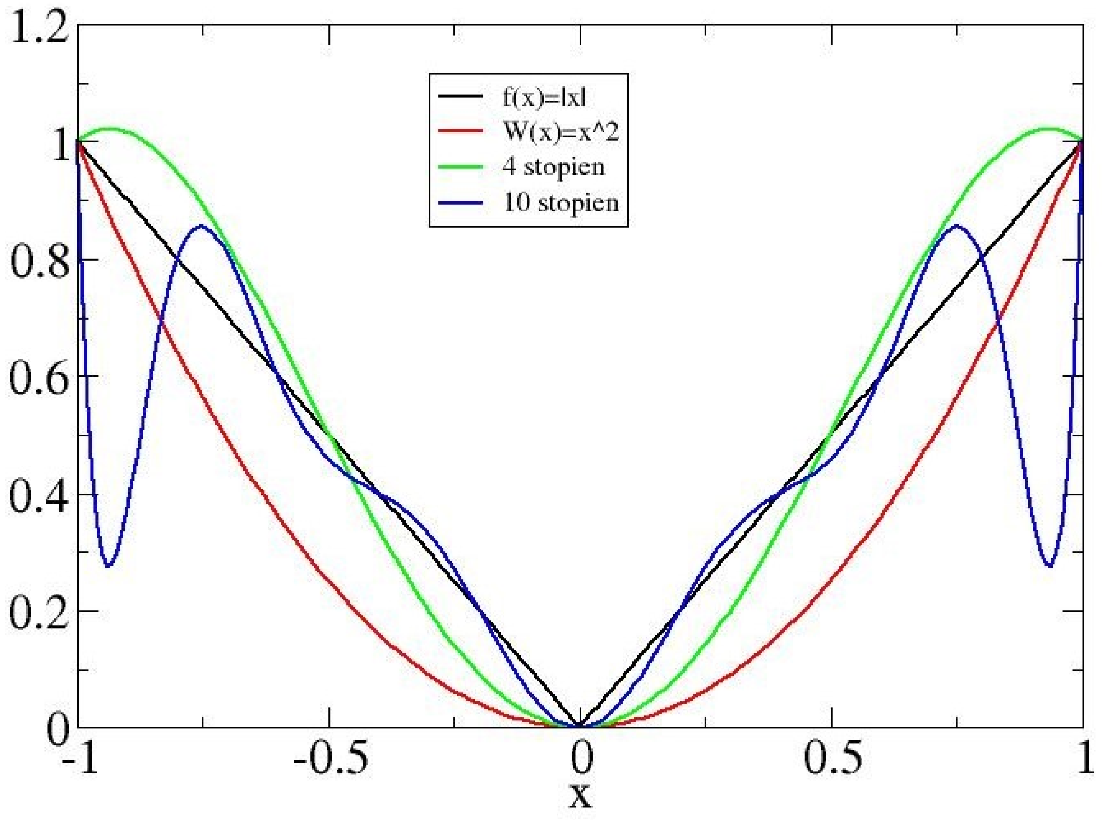
Interpolacja wielomianami wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów prowadzi do poważnych odchyleń od interpolowanej funkcji zwłaszcza na końcach przedziału. Interpolacja na środkowych częściach przedziału jest natomiast bardzo dobra i użyteczna

Przykład:

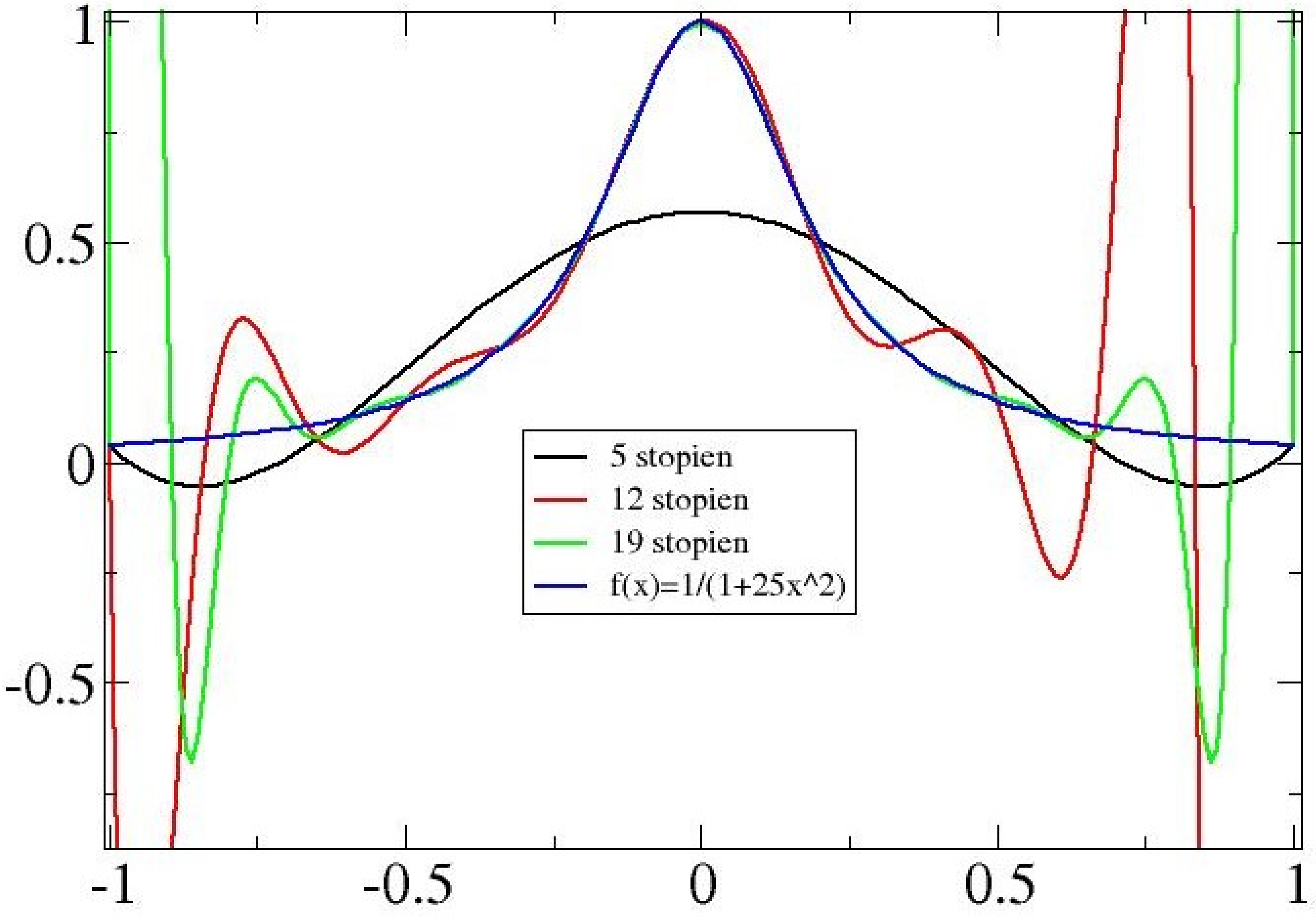
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Interpolacja wielomianowa szczególnych funkcji

$$f(x) = |x|$$



Zjawisko Rungego

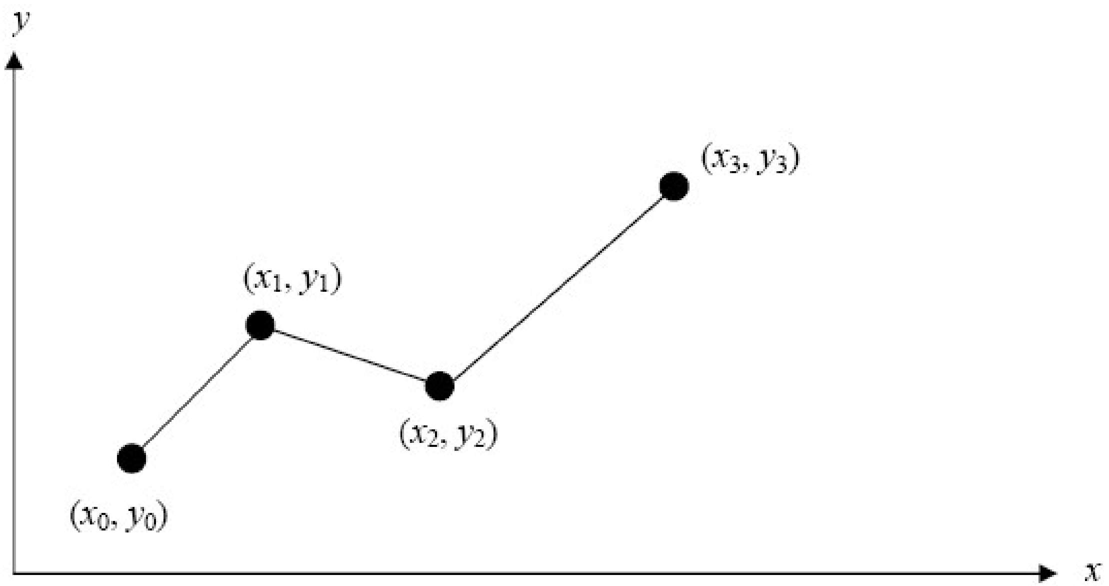


Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

Mając dane punkty:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_n)$$

prowadzimy linie proste pomiędzy punktami.



Interpolacja za pomocą liniowych funkcji sklejanych

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad x_1 \le x \le x_2$$

.

.

.

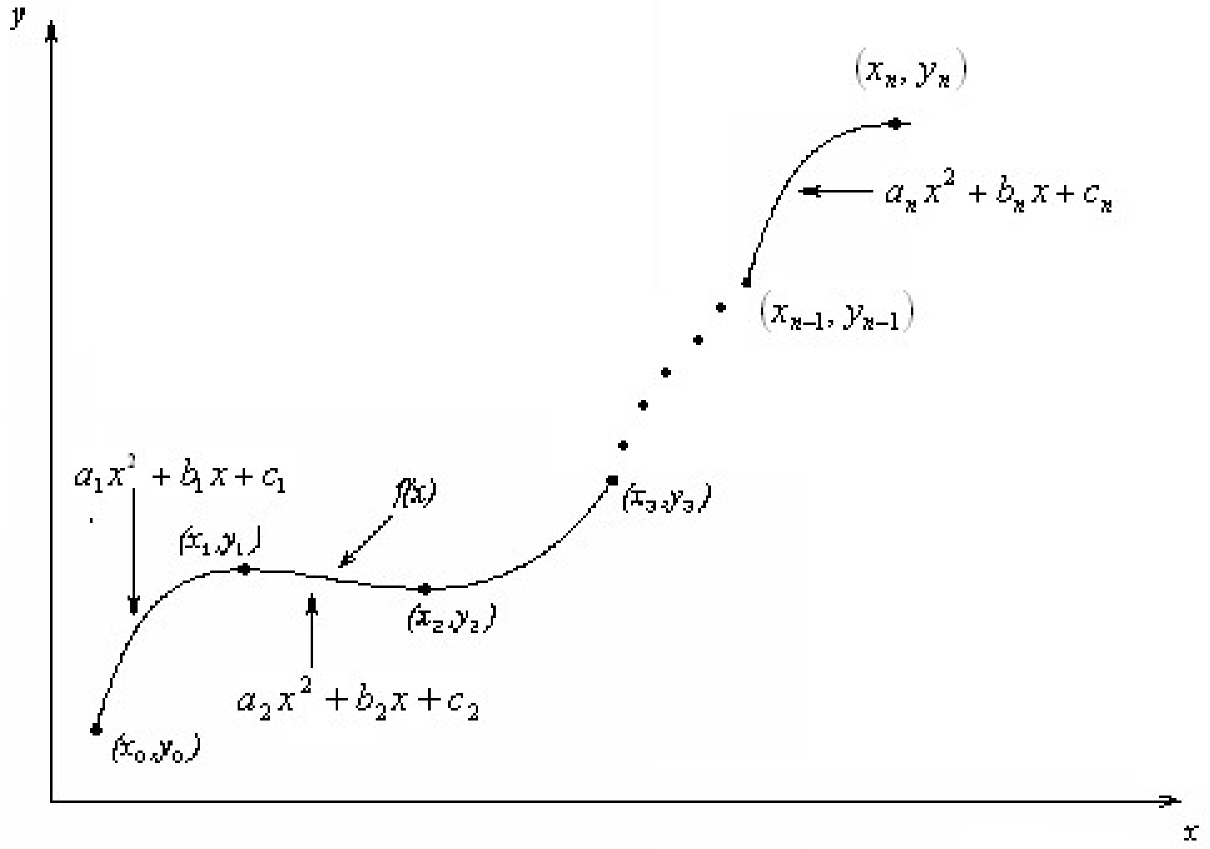
nachylenie prostej
pomiędzy węzłami

$$f(x) = f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Mając dane punkty: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

zapisujemy różne funkcje kwadratowe pomiędzy każdą parą punktów.



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

$$f(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \qquad x_0 \le x \le x_1$$

$$f(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \qquad x_1 \le x \le x_2$$

.

.

.

$$f(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

Znaleźć współczynniki $a_i, b_i, c_i \qquad i = 1,2,\ldots,n$

Mamy 3n niewiadomych czyli potrzebujemy 3n równań

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Każda parabola przechodzi przez dwa sąsiednie punkty, czyli mamy 2n równań

$$f(x_0) = a_1 x_0^{\;2} + b_1 x_0 + c_1$$

$$f(x_1) = a_1 x_1^{\;2} + b_1 x_1 + c_1$$

$$\vdots$$

$$f(x_{i-1}) = a_i x_{i-1}^{\;2} + b_i x_{i-1} + c_i$$

$$f(x_i) = a_i x_i^{\;2} + b_i x_i + c_i$$

$$\vdots$$

$$f(x_{n-1}) = a_n x_{n-1}^{\;2} + b_n x_{n-1} + c_n$$

$$f(x_n) = a_n x_n^{\;2} + b_n x_n + c_n$$

Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Dodatkowe warunki otrzymujemy żądając ciągłości pierwszych pochodnych w n-1 wewnętrznych punktach węzłowych:

dla $f(x) \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \begin{cases} 2a_1x + b_1 \\ 2a_2x + b_2 \end{cases}$

a zatem

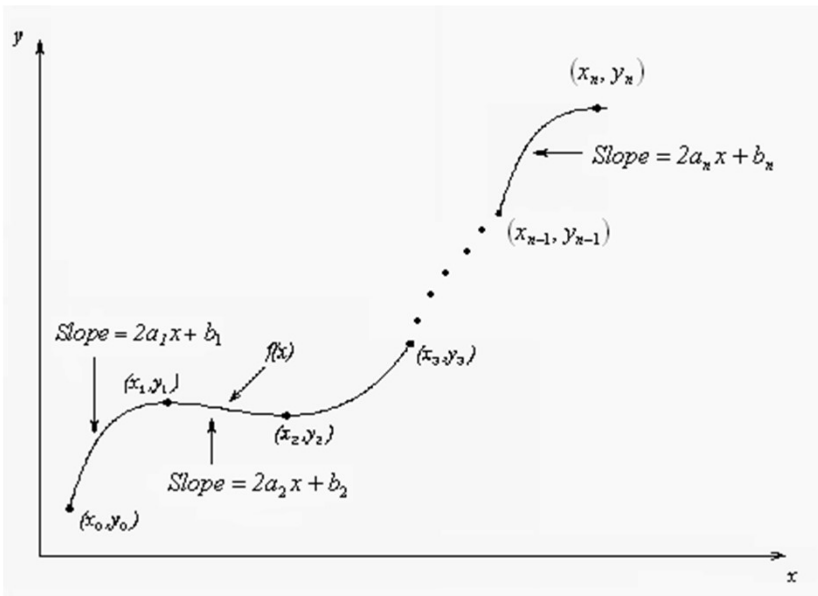
$$2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2$$

.

.

.

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} = 2a_nx_{n-1} + b_n$$



Interpolacja kwadratowa za pomocą funkcji sklejanych

Prowadzi to do n-1 równań postaci:

$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$

$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

Całkowita liczba równań wynosi 2n+(n-1)=3n-1

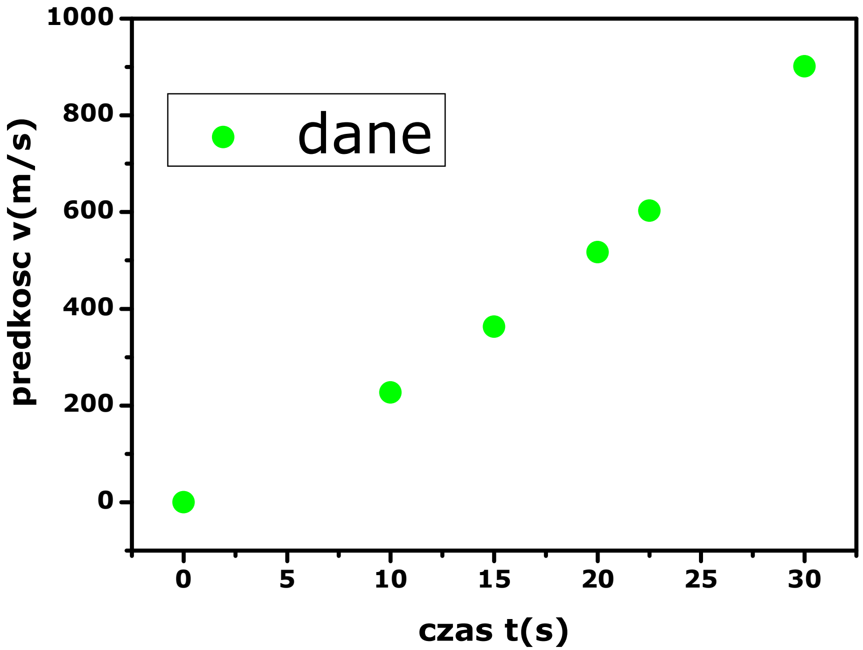
Potrzebne jedno równanie może przyjąć postać np. $a_1 = 0$

Pierwsza funkcja sklejana jest liniowa.

Przykład

Tabela 1 Prędkość v jako funkcja czasu t

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Znaleźć prędkość w chwili $t=16$ s stosując metodę interpolacji za pomocą kwadratowych funkcji sklejanych

Rozwiązanie

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \qquad 0 \le t \le 10$$

$$= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \qquad 10 \le t \le 15$$

$$= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, \qquad 15 \le t \le 20$$

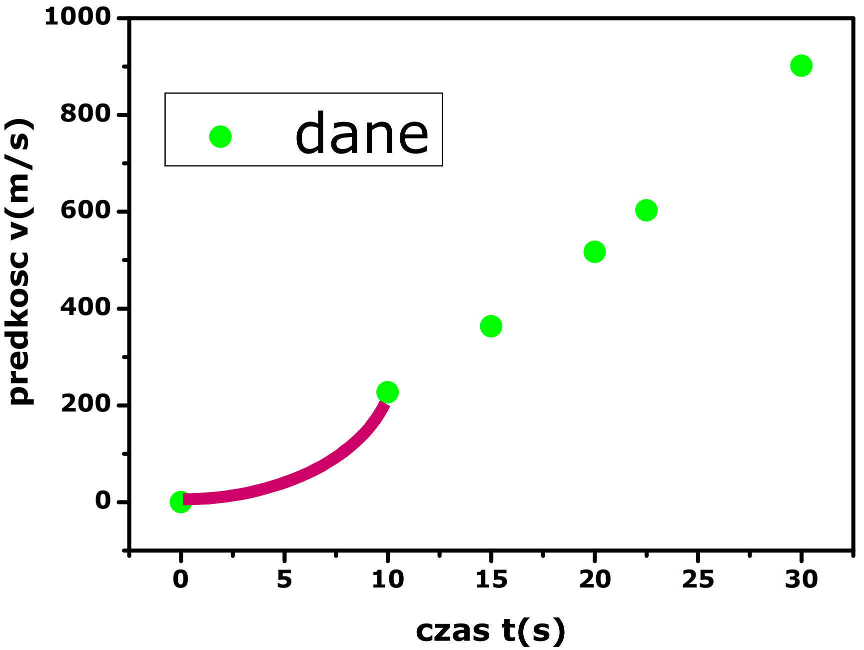
$$= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, \qquad 20 \le t \le 22.5$$

$$= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, \qquad 22.5 \le t \le 30$$

Każda funkcja sklejana przechodzi przez dwa sąsiednie punkty

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \qquad 0 \le t \le 10$$

$$\begin{cases} a_1(0)^2 + b_1(0) + c_1 = 0 \\ a_1(10)^2 + b_1(10) + c_1 = 227.04 \end{cases}$$



Dalsze równania

t(s)	v(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

$$a_2(10)^2 + b_2(10) + c_2 = 227.04$$
$$a_2(15)^2 + b_2(15) + c_2 = 362.78$$
$$a_3(15)^2 + b_3(15) + c_3 = 362.78$$
$$a_3(20)^2 + b_3(20) + c_3 = 517.35$$
$$a_4(20)^2 + b_4(20) + c_4 = 517.35$$
$$a_4(22.5)^2 + b_4(22.5) + c_4 = 602.97$$
$$a_5(22.5)^2 + b_5(22.5) + c_5 = 602.97$$
$$a_5(30)^2 + b_5(30) + c_5 = 901.67$$

Jest 10 równań, 15 poszukiwanych współczynników

Żądanie ciągłości pochodnych

$$v(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1, \quad 0 \le t \le 10$$

$$= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, \quad 10 \le t \le 15$$

$$\frac{d}{dt}\left(a_1 t^2 + b_1 t + c_1\right)\Big|_{t=10} = \frac{d}{dt}\left(a_2 t^2 + b_2 t + c_2\right)\Big|_{t=10}$$

$$\left(2a_1 t + b_1\right)\Big|_{t=10} = \left(2a_2 t + b_2\right)\Big|_{t=10}$$

$$2a_1(10) + b_1 = 2a_2(10) + b_2$$

$$20a_1 + b_1 - 20a_2 - b_2 = 0$$

Żądanie ciągłości pochodnych - cd

dla t=10s $$2a_1(10)+b_1-2a_2(10)-b_2=0$$

dla t=15s $$2a_2(15)+b_2-2a_3(15)-b_3=0$$

dla t=20s $$2a_3(20)+b_3-2a_4(20)-b_4=0$$

dla t=22.5s $$2a_4(22.5)+b_4-2a_5(22.5)-b_5=0$$

4 dodatkowe równania

ostatnie równanie $$a_1=0$$

Ostateczny układ 15 równań na 15 niewiadomych

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 506.25 & 22.5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 30 & 1 \\
20 & 1 & 0 & -20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -30 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 1 & 0 & -40 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 & 1 & 0 & -45 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ a_5 \\ b_5 \\ c_5
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 227.04 \\ 227.04 \\ 362.78 \\ 362.78 \\ 517.35 \\ 517.35 \\ 602.97 \\ 602.97 \\ 901.67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

b_i

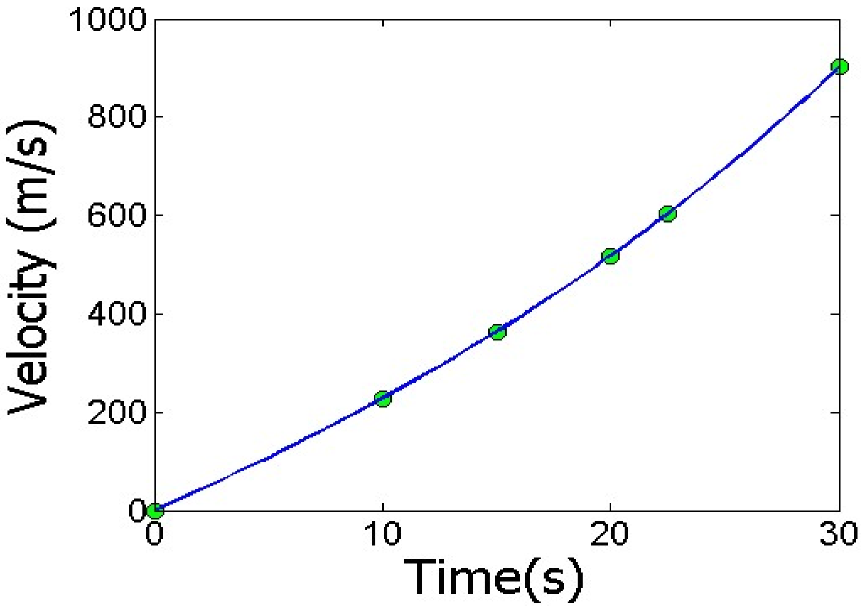
Wartości współczynników

i	a_i	b_i	c_i
1	0	22.704	0
2	0.8888	4.928	88.88
3	-0.1356	35.66	-141.61
4	1.6048	-33.956	554.55
5	0.20889	28.86	-152.13

Proszę sprawdzić czy podane wartości są prawidłowe

Ostateczne rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, && 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, && 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, && 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, && 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, && 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$



Prędkość w określonym punkcie

a) Prędkość w chwili t=16s

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(16) &= -0.1356(16)^2 + 35.66(16) - 141.61 \\
&= 394.24 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość prędkości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Przyspieszenie w określonym punkcie

b) Przyspieszenie w t=16 s

$$v(t) = 22.704t, \qquad 0 \le t \le 10$$

$$= 0.8888\,t^2 + 4.928\,t + 88.88, \qquad 10 \le t \le 15$$

$$= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \qquad 15 \le t \le 20$$

$$= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, \quad 20 \le t \le 22.5$$

$$= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, \quad 22.5 \le t \le 30$$

$$a(16) = \frac{d}{dt} v(t)\Big|_{t=16}$$

Przyspieszenie w określonym punkcie

Funkcja kwadratowa sklejana prawdziwa w punkcie t=16s jest dana jako

$$v(t) = -0.1356\,t^2 + 35.66t - 141.61, \quad 15 \le t \le 20$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}(-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61)$$

$$= -0.2712t + 35.66,$$

$$a(16) = -0.2712(16) + 35.66 \quad = 31.321\,\mathrm{m/s^2}$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przyspieszenia z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Droga z profilu prędkości

c) Znaleźć drogę przebytą przez rakietę od t=11s do t=16s.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 22.704t, & 0 \le t \le 10 \\
&= 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, & 10 \le t \le 15 \\
&= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, & 15 \le t \le 20 \\
&= 1.6048t^2 - 33.956t + 554.55, & 20 \le t \le 22.5 \\
&= 0.20889t^2 + 28.86t - 152.13, & 22.5 \le t \le 30
\end{aligned}
$$

$$
S(16) - S(11) = \int_{11}^{16} v(t)\,dt
$$

Droga z profilu prędkości

$$v(t) = 0.8888t^2 + 4.928t + 88.88, \qquad 10 \le t \le 15$$

$$= -0.1356t^2 + 35.66t - 141.61, \qquad 15 \le t \le 20$$

$$S(16) - S(11) = \int_{11}^{16} v(t)dt = \int_{11}^{15} v(t)dt + \int_{15}^{16} v(t)dt$$

$$= \int_{11}^{15} (0.8888t^2 + 4.928t + 88.88)dt$$

$$+ \int_{15}^{16} (-0.1356t^2 + 35.66t - 141.61)dt \quad = 1595.9 \text{ m}$$

Jako zadanie domowe, proszę porównać obliczoną wartość przebytej odległości z wartością otrzymaną za pomocą interpolacji wielomianowej

Błąd wzoru interpolacyjnego

$$\left|f(x)-W_n(x)\right| \le \frac{\sup\limits_{x\in<a,b>}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\cdot\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

Przyjmujemy oznaczenia: $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in<a,b>}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

Kres górny modułu (n+1)-szej pochodnej funkcji f(x) na przedziale <a,b>

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Błąd wzoru interpolacyjnego

$$\left|f(x)-W_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|\omega_n(x)\right|$$

Przykład:

Ocenić, z jaką dokładnością można obliczyć wartość ln 100,5 przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości: ln 100, ln 101, ln 102, ln 103

$$f(x)=\ln(x),\ n=3,\ a=100,\ b=103,\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$$

$$M_4=\sup_{x\in<100,103>}\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{6}{100^4}$$

$$\left|\ln 100{,}5-W\ (100{,}5)\right|\le\frac{6}{100^4 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5\approx 2{,}344\cdot 10^{-9}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

$$\left|f(x)-W_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|\omega_n(x)\right|$$

Wielkość błędu zależy od wyboru węzłów interpolacji poprzez ω_n.
Na M_{n+1} nie mamy wpływu.

Jak wybrać węzły interpolacji x_i, aby:

$$\sup_{x\in<a,b>} \left|\omega_n(x)\right|$$

miało jak najmniejszą wartość

Zagadnienie zostało sformułowane przez rosyjskiego matematyka P.L. Czebyszewa jako zagadnienie znajdowania wielomianu algebraicznego najlepiej przybliżającego zero na zadanym przedziale.

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa (pierwszego rodzaju): $$T_n(x) = \cos(n \ arc\cos x)$$

Można pokazać, że wielomian $T_n(x)$ jest identyczny z pewnym wielomianem algebraicznym „zawężonym" do przedziału <-1,1>.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(arc\cos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2arc\cos x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3arc\cos x) = 4x^3 - 3x$$

wzór rekurencyjny $$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n(x)}{dx^2}-x\frac{dT_n(x)}{dx}+n^2T_n(x)=0$$

Definiuje się je poprzez wzór Rodriguesa:

$$T_n(x)=(-1)^n\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right]$$

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są ortogonalne w przedziale <-1,1> z wagą:

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

Każdy wielomian Czebyszewa stopnia n ma n różnych pierwiastków w punktach:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right), \quad m = 0,1,2,\ldots,n-1$$

zawartych między -1 i +1

Współczynnik przy najwyższej potędze w $T_n(x)$ jest równy 2^{n-1}.

Szukamy wielomianu, który przy najwyższej potędze ma współczynnik równy jedności

$$T^*_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

gdzie x_m(m=0, 1, 2, …, n) są pierwiastkami wielomianu T_{n+1}

Optymalny dobór węzłów interpolacji

Wyrażenie: $$\sup_{x\in<a,b>} |\omega_n(x)|$$

w przedziale <-1,1> ma najmniejszą wartość dla wielomianu:

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

wówczas: $$\sup_{x\in<-1,1>} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Jeżeli w przedziale <-1,1> za węzły interpolacji przyjmiemy zera wielomianu Czebyszewa, to

$$\boxed{|f(x) - W_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}}$$

Optymalny dobór węzłów interpolacji

W dowolnym przedziale <a,b> oszacowanie błędu wynosi:

$$\left|f(x)-W_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

przy wyborze węzłów

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2m+1}{2n+2}\pi) + (b+a)\right],\ m = 0,1,2,\ldots,n$$

Nowe węzły x_m nie są rozmieszczone w równych odstępach lecz są zagęszczone przy końcach przedziału.

Proste transformacje liniowe sprowadzają x z przedziału <a,b> do z należącego do <-1,1>

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)z + (b+a)\right]$$

$$z = \frac{1}{b-a}(2x-b-a)$$

Podsumowanie interpolacji

Przeczytać i przeanalizować rozdział 1.2.8 Uwagi końcowe, Z.Fortuna, B.Macukow, J.Wąsowski, Metody numeryczne

Wnioski:

1. Przy obliczaniu wartości wielomianu interpolacyjnego w jednym lub kilku punktach problem wyboru postaci wzoru interpolacyjnego nie jest istotny.
2. Rodzaj wybranego wzoru i rozmieszczenie węzłów ma wpływ jedynie na błąd obliczeń.
3. O czasochłonności obliczeń decyduje liczba mnożeń i dzieleń.

dla wielomianu Lagrange'a stanowi to n^2+4n+2

dla wielomianu Newtona $1/2\ n^2+3/2\ n$