

Wykład 5.

Całkowanie numeryczne

dr hab. inż. Katarzyna Zakrzewska, prof. AGH

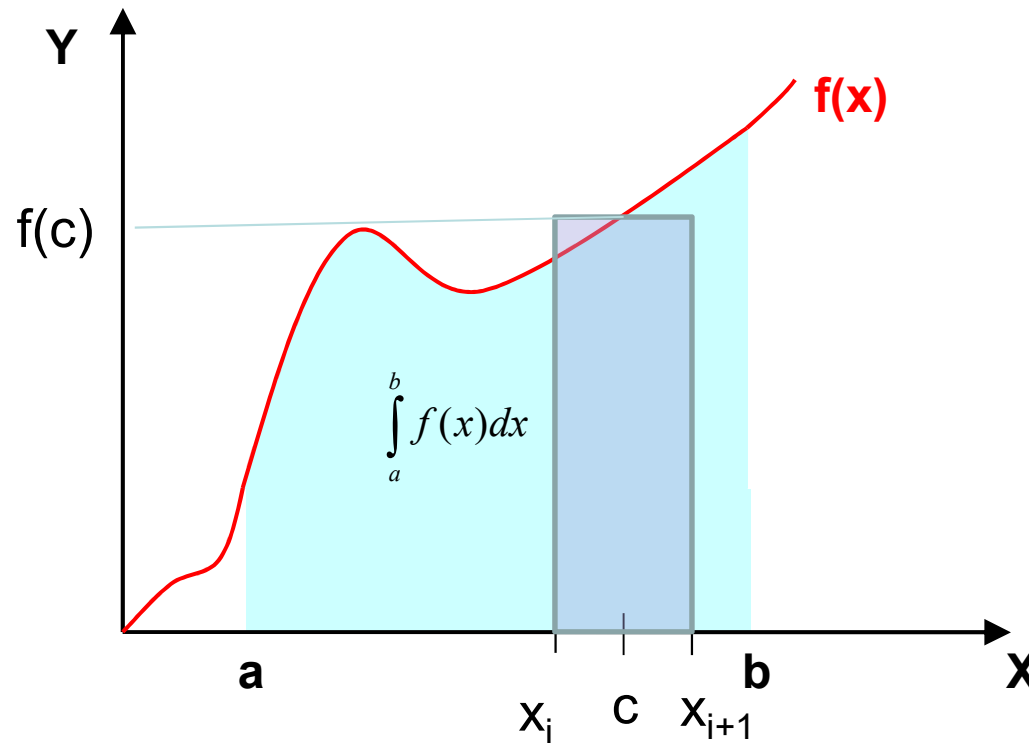
- Wzór trapezów
- Złożony wzór trapezów
- Metoda ekstrapolacji Richardsona
- Metoda Romberga
- Metoda Simpsona – wzór parabol
- Metoda Gaussa

Całkowanie numeryczne - idea

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Całkę można przybliżyć sumą

$$S = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$



$$x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$$

Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratura Newtona – Cotesa należy do metod z ustalonymi węzłami, polega na tym, że funkcja $f(x)$ jest interpolowana wielomianem (np. Lagrange'a)

$$f(x) \approx f_n(x)$$

gdzie:

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Wówczas całka z funkcji $f(x)$ może być przybliżana całką z funkcji interpolującej $f_n(x)$ n -tego stopnia

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx$$

Wzór trapezów

Zakładamy $n = 1$ czyli $f_1(x) = a_0 + a_1x$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) \approx \int_a^b f_1(x) = \int_a^b (a_0 + a_1x) dx \\ &= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

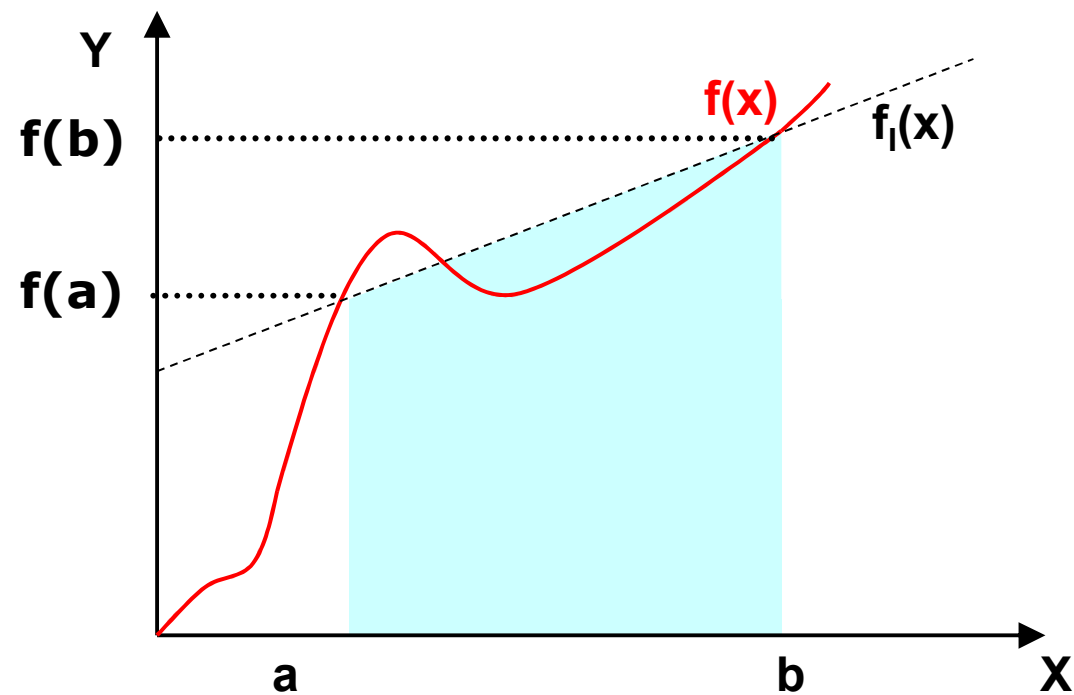
Szukamy współczynników a_0 i a_1

Zakładamy, że prosta, która przybliża funkcję $f(x)$ przechodzi przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Czyli:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a) = f_1(a) = a_0 + a_1a \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \\ f(b) = f_1(b) = a_0 + a_1b \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \end{array} \right.$$

Wzór trapezów

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] \quad \int_a^b f(x) dx \approx \text{pole trapezu}$$



Wzór trapezów

Przykład 1:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

- Przy pomocy metody trapezów znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$
- Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (ang. true relative error)

Wzór trapezów

$$\text{a)} \quad I \approx (b - a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] \quad a = 8 \text{ s} \quad b = 30 \text{ s}$$

$$f(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

$$f(8) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100(8)} \right] - 9.8(8) = 177.27 \text{ m/s}$$

$$f(30) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100(30)} \right] - 9.8(30) = 901.67 \text{ m/s}$$

$$I = (30 - 8) \left[\frac{177.27 + 901.67}{2} \right] = 11868 \text{ m}$$

Wzór trapezów

b) Wartość dokładna

$$\Delta x = \int_8^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt = 11061 \text{ m}$$

Błąd względny:

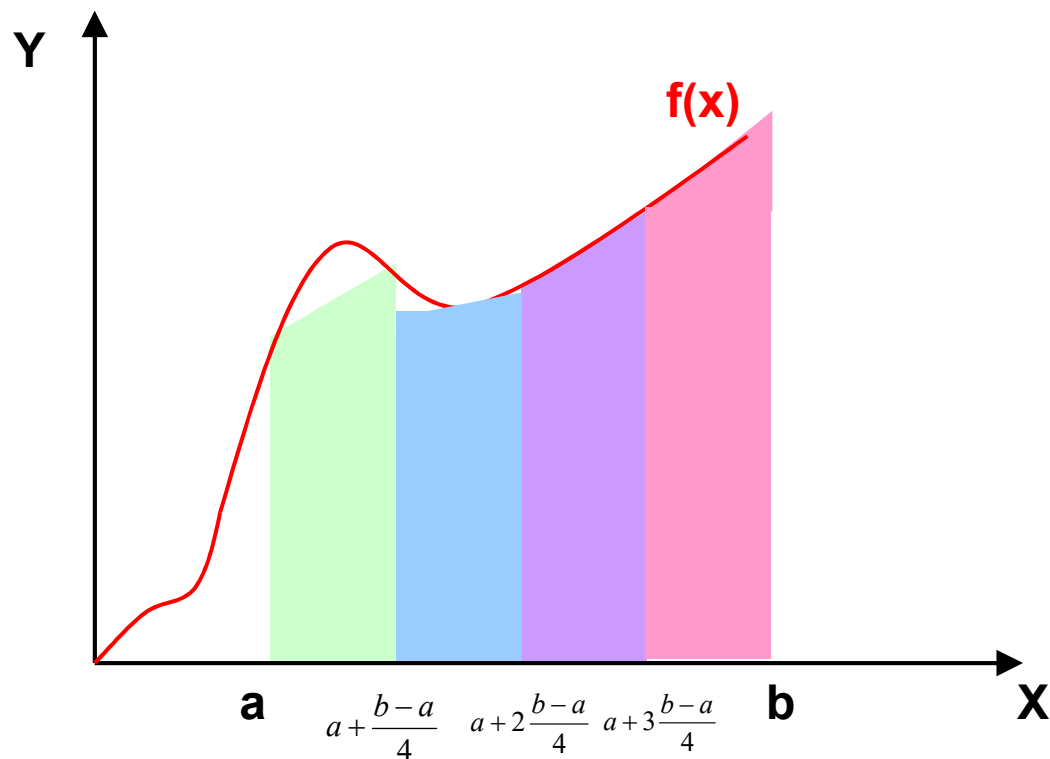
$$|\epsilon_t| = \left| \frac{11061 - 11868}{11061} \right| \times 100 = 7.2959 \%$$

Złożony wzór trapezów

Błąd, jak pokazuje poprzedni przykład, jest zbyt duży. Można zaproponować podział przedziału całkowania na n segmentów, każdy o długości h .

$$h = \frac{b-a}{n}$$

dla $n=4$



$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+3h} f(x)dx + \int_{a+3h}^{a+4h} f(x)dx$$

Złożony wzór trapezów

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{a+h} f(x) dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx + \dots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x) dx + \int_{a+(n-1)h}^b f(x) dx \\
 &= h \left[\frac{f(a) + f(a+h)}{2} \right] + h \left[\frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2} \right] + \dots \\
 &\quad \dots + [b - (a + (n-1)h)] \left[\frac{f(a + (n-1)h) + f(b)}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right\} + f(b) \right]$$

Przykład 2:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

- Przy pomocy metody trapezów znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ przyjmując $n=2$
- Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Złożony wzór trapezów

$$a) \quad I = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right\} + f(b) \right]$$

$$n = 2 \quad a = 8 \text{ s} \quad b = 30 \text{ s} \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{30-8}{2} = 11 \text{ s}$$

$$I = \frac{30-8}{2(2)} \left[f(8) + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{2-1} f(a+ih) \right\} + f(30) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{4} [f(8) + 2f(19) + f(30)] = \frac{22}{4} [177.27 + 2(484.75) + 901.67] \\ &= 11266 \text{ m} \end{aligned}$$

Złożony wzór trapezów

b) wartość dokładna wynosi:

$$x = \int_8^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt = 11061 \text{ m}$$

Błąd względny to:

$$|\epsilon_t| = \left| \frac{11061 - 11266}{11061} \right| \times 100 = 1.8534\%$$

Złożony wzór trapezów

| n | Δx | E_t | $\epsilon_t /\%$ | $\epsilon_a /\%$ |
|----------|------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 11868 | -807 | 7.296 | --- |
| 2 | 11266 | -205 | 1.853 | 5.343 |
| 3 | 11153 | -91.4 | 0.8265 | 1.019 |
| 4 | 11113 | -51.5 | 0.4655 | 0.3594 |
| 5 | 11094 | -33.0 | 0.2981 | 0.1669 |
| 6 | 11084 | -22.9 | 0.2070 | 0.09082 |
| 7 | 11078 | -16.8 | 0.1521 | 0.05482 |
| 8 | 11074 | -12.9 | 0.1165 | 0.03560 |

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Błąd bezwzględny metody z pojedynczym segmentem

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta), \quad a < \zeta < b$$

gdzie ζ jest punktem w $[a, b]$

Błąd w metodzie złożonej (wielosegmentowej) jest sumą błędów dla każdego segmentu. Błąd pojedynczego segmentu wynosi:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{[(a+h) - a]^3}{12} f''(\zeta_1), \quad a < \zeta_1 < a+h \\ &= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_1) \end{aligned}$$

Analiza błędów dla wzoru trapezów

Podobnie:

$$E_i = \frac{[(a+ih) - (a+(i-1)h)]^3}{12} f''(\zeta_i), \quad a+(i-1)h < \zeta_i < a+ih$$
$$= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_i)$$

dla n:

$$E_n = \frac{[b - \{a + (n-1)h\}]^3}{12} f''(\zeta_n), \quad a + (n-1)h < \zeta_n < b$$
$$= \frac{h^3}{12} f''(\zeta_n)$$

Analiza błędów dla wzoru trapezów

Całkowity błąd w metodzie złożonej jest sumą błędów pojedynczych segmentów:

$$E_t = \sum_{i=1}^n E_i = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\zeta_i) = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \frac{\sum_{i=1}^n f''(\zeta_i)}{n}$$

Wyrażenie $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n f''(\zeta_i)}{n}$

jest przybliżoną średnią wartością drugiej pochodnej w przedziale $a < x < b$

$$E_t \propto \alpha \frac{1}{n^2}$$

Analiza błędu dla wzoru trapezów

Poniższa tablica dla całki $\int_8^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt$

przedstawia wyniki w funkcji liczby segmentów n . Widać, że gdy liczba segmentów jest podwajana, błąd E_t zmniejsza się w przybliżeniu czterokrotnie.

| n | Value | E_t | $ \epsilon_t \%$ | $ \epsilon_a \%$ |
|----------|--------------|-------|-------------------|-------------------|
| 2 | 11266 | -205 | 1.854 | 5.343 |
| 4 | 11113 | -51.5 | 0.4655 | 0.3594 |
| 8 | 11074 | -12.9 | 0.1165 | 0.03560 |
| 16 | 11065 | -3.22 | 0.02913 | 0.00401 |

Całkowanie metodą Romberga

Metoda Romberga jest rozszerzeniem metody trapezów i daje lepsze przybliżenie całki poprzez zasadniczą redukcję błędu (true error)

Ekstrapolacja Richardsona

Błąd (E_t true error) w n-segmentowym wzorze trapezów wynosi

$$E_t \cong \frac{C}{n^2}$$

gdzie C jest współczynnikiem proporcjonalności

Stąd:

$$E_t = TV - I_n$$

wartość dokładna (true value)

wartość przybliżona np.
wyliczona ze wzoru trapezów
(approximate value)

Ekstrapolacja Richardsona

Można pokazać, że

$$\frac{C}{(2n)^2} \cong TV - I_{2n}$$

gdy segment zostaje zmniejszony o połowę

Ze wzorów:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{(n)^2} \cong TV - I_n \\ \frac{C}{(2n)^2} \cong TV - I_{2n} \end{array} \right.$$

otrzymujemy:

$$TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3}$$

Przykład 3:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

- Przy pomocy ekstrapolacji Richardsona znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$
- Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Przyjąć $n=2$

Tabela wyników ze złożonego wzoru trapezów do n=8 segmentów

| n | Δx | E_t | $\epsilon_t \%$ | $\epsilon_a \%$ |
|----------|------------------------------|-------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 11868 | -807 | 7.296 | --- |
| 2 | 11266 | -205 | 1.853 | 5.343 |
| 3 | 11153 | -91.4 | 0.8265 | 1.019 |
| 4 | 11113 | -51.5 | 0.4655 | 0.3594 |
| 5 | 11094 | -33.0 | 0.2981 | 0.1669 |
| 6 | 11084 | -22.9 | 0.2070 | 0.09082 |
| 7 | 11078 | -16.8 | 0.1521 | 0.05482 |
| 8 | 11074 | -12.9 | 0.1165 | 0.03560 |

Ekstrapolacja Richardsona

a)

$$I_2 = 11266m \quad I_4 = 11113m$$

$$TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3} \quad \text{dla } n=2$$

$$\begin{aligned} TV &\cong I_4 + \frac{I_4 - I_2}{3} = 11113 + \frac{11113 - 11266}{3} \\ &= 11062m \end{aligned}$$

b)

Wartość dokładna to:

$$x = \int_8^{30} \left(2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt = 11061 \text{ m}$$

Stąd

$$E_t = 11061 - 11062 = -1 \text{ m}$$

Ekstrapolacja Richardsona

c) Błąd względny

$$|\epsilon_t| = \left| \frac{11061 - 11062}{11061} \right| \times 100 = 0.00904\%$$

Porównanie wyników z metodą złożoną trapezów

| n | Δx (m) wzór trapezów | $ \epsilon_t $ % wzór trapezów | Δx (m) ekstrapolacja Richardsona | $ \epsilon_t $ % ekstrapolacja Richardsona |
|---|------------------------------------|-----------------------------------|--|--|
| 1 | 11868 | 7.296 | -- | -- |
| 2 | 11266 | 1.854 | 11065 | 0.03616 |
| 4 | 11113 | 0.4655 | 11062 | 0.009041 |
| 8 | 11074 | 0.1165 | 11061 | 0.0000 |

Całkowanie metodą Romberga stosuje ten sam wzór co ekstrapolacja Richardsona. Jednakże, metoda Romberga jest to algorytm rekurencyjny.

Przypomnijmy:

$$TV \cong I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3}$$

Można zapisać

$$(I_{2n})_R = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{3} = I_{2n} + \frac{I_{2n} - I_n}{4^{2-1} - 1}$$

Wartość dokładna TV jest zastąpiona przez wynik całkowania metodą Richardsona $(I_{2n})_R$

Znak \cong jest zastąpiony przez znak równości.

Metoda Romberga

Estymowana wartość dokładna wynosi: $TV \cong (I_{2n})_R + Ch^4$

gdzie Ch^4 jest wartością błędu przybliżenia

Następna wartość całki (podwajając liczbę segmentów) wynosi:

$$(I_{4n})_R = I_{4n} + \frac{I_{4n} - I_{2n}}{3}$$

$$TV \cong (I_{4n})_R + C\left(\frac{h}{2}\right)^4$$

Estymowana wartość dokładna wynosi teraz:

$$TV \cong (I_{4n})_R + \frac{(I_{4n})_R - (I_{2n})_R}{15} = (I_{4n})_R + \frac{(I_{4n})_R - (I_{2n})_R}{4^{3-1} - 1}$$

Ogólne wyrażenie w metodzie Romberga

$$I_{k,j} = I_{k-1,j+1} + \frac{I_{k-1,j+1} - I_{k-1,j}}{4^{k-1} - 1}, k \geq 2$$

Wskaźnik k reprezentuje rząd ekstrapolacji

$k=1$ odpowiada wartościom uzyskanym ze wzoru trapezów

$k=2$ odpowiada wartościom uzyskanym z błędem $O(h^2)$

Wskaźnik j reprezentuje dokładność; $j+1$ daje całkę wyznaczoną dokładniej niż j

Przykład 4:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

- Przy pomocy wzoru Romberga znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$
- Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Przyjmując $n=1, 2, 4, 8$

Tabela wyników ze złożonego wzoru trapezów do $n=8$ segmentów

| n | Δx | E_t | $\epsilon_t \%$ | $\epsilon_a \%$ |
|----------|------------------------------|-------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 11868 | -807 | 7.296 | --- |
| 2 | 11266 | -205 | 1.853 | 5.343 |
| 3 | 11153 | -91.4 | 0.8265 | 1.019 |
| 4 | 11113 | -51.5 | 0.4655 | 0.3594 |
| 5 | 11094 | -33.0 | 0.2981 | 0.1669 |
| 6 | 11084 | -22.9 | 0.2070 | 0.09082 |
| 7 | 11078 | -16.8 | 0.1521 | 0.05482 |
| 8 | 11074 | -12.9 | 0.1165 | 0.03560 |

Na podstawie tabeli odczytujemy:

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= 11868 & I_{1,2} &= 11266 \\ I_{1,3} &= 11113 & I_{1,4} &= 11074 \end{aligned}$$

W pierwszym przybliżeniu $k=2$:

$$\begin{aligned} I_{k,j} &= I_{k-1,j+1} + \frac{I_{k-1,j+1} - I_{k-1,j}}{4^{k-1} - 1}, k \geq 2 & I_{2,1} &= I_{1,2} + \frac{I_{1,2} - I_{1,1}}{3} \\ & & &= 11266 + \frac{11266 - 11868}{3} \end{aligned}$$

Metoda Romberga

$$I_{k,j} = I_{k-1,j+1} + \frac{I_{k-1,j+1} - I_{k-1,j}}{4^{k-1} - 1}, k \geq 2$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= I_{1,3} + \frac{I_{1,3} - I_{1,2}}{3} \\ &= 11113 + \frac{11113 - 11266}{3} \\ &= 11062 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2,3} &= I_{1,4} + \frac{I_{1,4} - I_{1,3}}{3} \\ &= 11074 + \frac{11074 - 11113}{3} \\ &= 11061 \end{aligned}$$

W drugim przybliżeniu $k=3$,

$$I_{k,j} = I_{k-1,j+1} + \frac{I_{k-1,j+1} - I_{k-1,j}}{4^{k-1} - 1}, k \geq 2$$

$$\begin{aligned} I_{3,1} &= I_{2,2} + \frac{I_{2,2} - I_{2,1}}{15} \\ &= 11062 + \frac{11062 - 11065}{15} \\ &= 11062 \end{aligned}$$

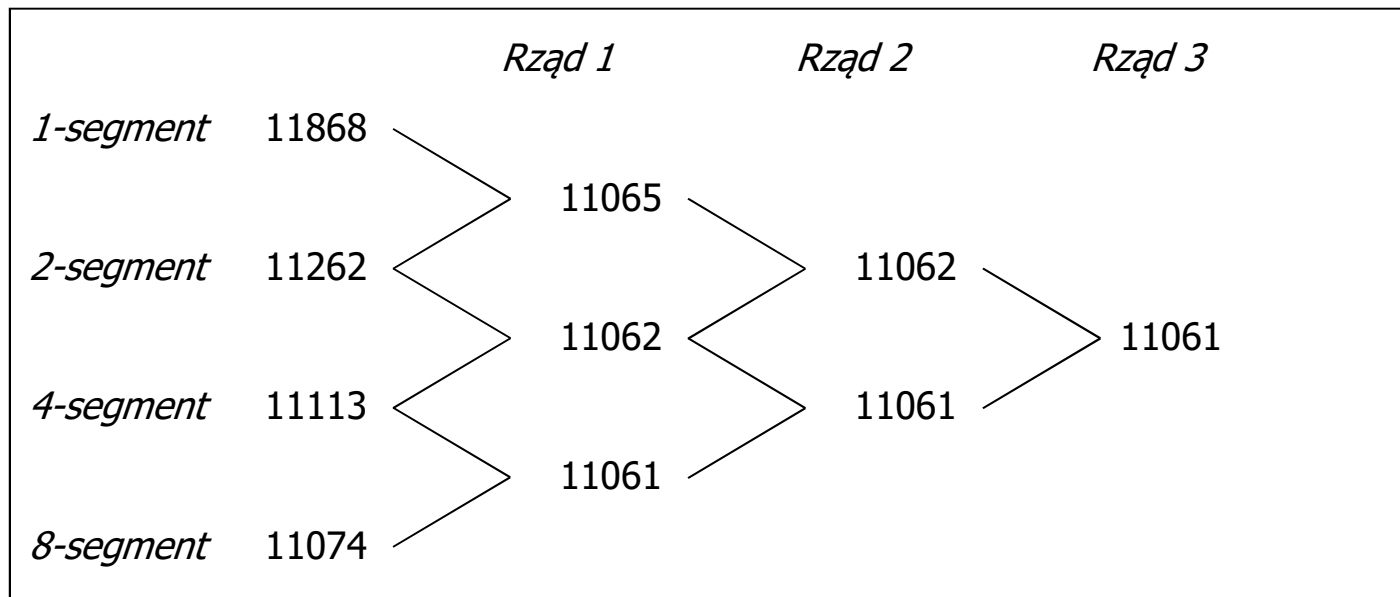
$$\begin{aligned} I_{3,2} &= I_{2,3} + \frac{I_{2,3} - I_{2,2}}{15} \\ &= 11061 + \frac{11061 - 11062}{15} \\ &= 11061 \end{aligned}$$

Metoda Romberga

Dla trzeciego rzędu ($k=4$),

$$\begin{aligned} I_{4,1} &= I_{3,2} + \frac{I_{3,2} - I_{3,1}}{63} \\ &= 11061 + \frac{11061 - 11062}{63} \\ &= 11061m \end{aligned}$$

Metoda Romberga



Poprawione wartości całki metodą Romberga

Metoda Simpsona

Metoda trapezów była oparta na przybliżeniu funkcji podcałkowej $f(x)$ wielomianem stopnia pierwszego. W metodzie Simpsona wykorzystuje się wielomiany stopnia drugiego, jest to tzw. metoda parabol.

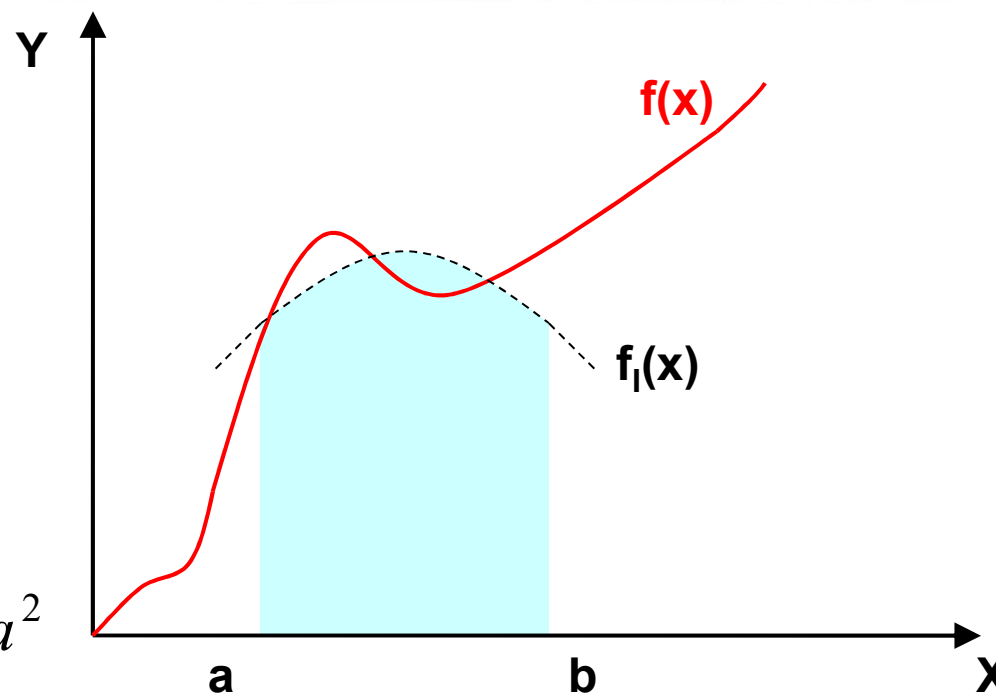
$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx$$

gdzie:

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Równanie paraboli dla 3 punktów:

$$\begin{aligned} &(a, f(a)), \\ &\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \\ &(b, f(b)) \end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{aligned} f(a) &= f_2(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = a_0 + a_1 \left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ f(b) &= f_2(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 \end{aligned} \right.$$

Metoda Simpsona

Wyznaczone współczynniki funkcji $f_2(x)$ to:

$$a_0 = \frac{a^2 f(b) + abf(b) - 4abf\left(\frac{a+b}{2}\right) + abf(a) + b^2 f(a)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_1 = -\frac{af(a) - 4af\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3af(b) + 3bf(a) - 4bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + bf(b)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_2 = \frac{2\left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b f_2(x) dx \\ &= \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) dx \\ &= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + a_2 \frac{b^3 - a^3}{3} \end{aligned}$$

Metoda Simpsona

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Co daje:

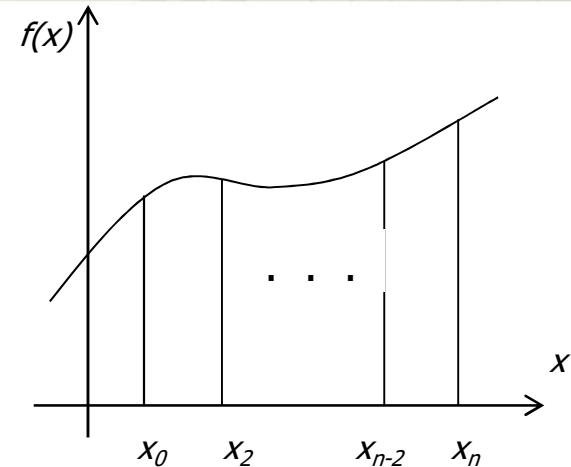
$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

wzór parabol

Metoda Simpsona w wersji złożonej

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots$$

$$\dots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x) dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx = (x_2 - x_0) \left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \right] + \dots$$

$$+ (x_4 - x_2) \left[\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} \right] + \dots$$

$$\dots + (x_{n-2} - x_{n-4}) \left[\frac{f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})}{6} \right] + \dots$$

$$+ (x_n - x_{n-2}) \left[\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6} \right]$$

$$x_i - x_{i-2} = 2h$$

$$i = 2, 4, \dots, n$$

Metoda Simpsona

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= 2h \left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \right] + \dots \\ &+ 2h \left[\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} \right] + \dots \\ &+ 2h \left[\frac{f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})}{6} \right] + \dots \\ &+ 2h \left[\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6} \right] \end{aligned}$$

Metoda Simpsona

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4\{f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\} + \dots] \\
 &\quad \dots + 2\{f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\} + f(x_n)] \\
 &= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{odd}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i=\text{even}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] \\
 &= \frac{b-a}{3n} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{odd}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i=\text{even}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]
 \end{aligned}$$

Metoda Simpsona – analiza błędu

Wartości przybliżone
przykładu stosując regułę 1/3 Simpsona z wieloma segmentami

| n | Wartość przybliżona | E_t | $ E_t $ |
|----|---------------------|-------|---------|
| 2 | 11065.72 | 4.38 | 0.0396% |
| 4 | 11061.64 | 0.30 | 0.0027% |
| 6 | 11061.40 | 0.06 | 0.0005% |
| 8 | 11061.35 | 0.01 | 0.0001% |
| 10 | 11061.34 | 0.00 | 0.0000% |

Metoda Simpsona – analiza błędów

Błąd dla jednego segmentu $E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta)$, $a < \zeta < b$

Błąd w metodzie wielosegmentowej

$$E_1 = -\frac{(x_2 - x_0)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_1) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_1), \quad x_0 < \zeta_1 < x_2$$

$$E_2 = -\frac{(x_4 - x_2)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_2) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_2), \quad x_2 < \zeta_2 < x_4$$

$$E_i = -\frac{(x_{2i} - x_{2(i-1)})^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_i) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_i), \quad x_{2(i-1)} < \zeta_i < x_{2i}$$

Całkowity błąd

$$E_t = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} E_i = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i) = -\frac{(b-a)^5}{90n^5} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)$$


$$= -\frac{(b-a)^5}{90n^4} \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)}{n}$$

$$\overline{f^{(4)}} = \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^{(4)}(\zeta_i)}{n}$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{90n^4} \overline{f^{(4)}}$$

← średnia wartość pochodnej

Całkę metodą kwadratury Gaussa przedstawia wzór:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$


stałe współczynniki

Punkty x_1 i x_2 , w których określamy wartość funkcji podcałkowej nie są ustalone (jak poprzednio na granicach przedziału czyli a i b), ale są a priori dowolnie rozmieszczone w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Niewiadome x_1, x_2, c_1, c_2 znajduje się zakładając, że funkcja podcałkowa spełnia warunek:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx \\ &= \left[a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \right]_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + a_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + a_3 \left(\frac{b^4 - a^4}{4} \right) \end{aligned}$$

Metoda Gaussa

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

z jednej strony

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) + c_2 (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3)$$

$$= a_0 (c_1 + c_2) + a_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + a_2 (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2) + a_3 (c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3)$$

z drugiej strony

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$$= a_0 (b - a) + a_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) + a_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) + a_3 \left(\frac{b^4 - a^4}{4} \right)$$

Metoda Gaussa

$$a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1x_1 + c_2x_2) + a_2(c_1x_1^2 + c_2x_2^2) + a_3(c_1x_1^3 + c_2x_2^3)$$

$$= a_0(b - a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right)$$



$$b - a = c_1 + c_2$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$$

$$\frac{b^4 - a^4}{4} = c_1x_1^3 + c_2x_2^3$$

Metoda Gaussa

Rozwiązując układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} b - a = c_1 + c_2 \\ \frac{b^2 - a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \frac{b^3 - a^3}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \\ \frac{b^4 - a^4}{4} = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \end{array} \right.$$

otrzymujemy dla metody dwupunktowej:

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2} \quad x_2 = \left(\frac{b-a}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{b+a}{2}$$
$$c_1 = \frac{b-a}{2} \quad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Metoda Gaussa

W dwu-punktowej metodzie Gaussa, całka funkcji $f(x)$ wyraża się wzorem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$
$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)$$

Uogólniając dla n punktów:

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

Metoda Gaussa

W n-punktowej metodzie Gaussa, współczynniki c_i oraz argumenty x_i są stabelaryzowane dla całek w granicach od -1 do 1

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \cong \sum_{i=1}^n c_i g(x_i)$$

| n | współczynniki | argumenty funkcji |
|----------|--|--|
| 2 | $c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$ | $x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$ |
| 3 | $c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$ | $x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0.000000000$ $x_3 = 0.774596669$ |
| 4 | $c_1 = 0.347854845$ $c_2 = 0.652145155$ $c_3 = 0.652145155$ $c_4 = 0.347854845$ | $x_1 = -0.861136312$ $x_2 = -0.339981044$ $x_3 = 0.339981044$ $x_4 = 0.861136312$ |

Metoda Gaussa

| n | współczynniki | argumenty funkcji |
|---|--|---|
| 5 | $c_1 = 0.236926885$ $c_2 = 0.478628670$ $c_3 = 0.568888889$ $c_4 = 0.478628670$ $c_5 = 0.236926885$ | $x_1 = -0.906179846$ $x_2 = -0.538469310$ $x_3 = 0.000000000$ $x_4 = 0.538469310$ $x_5 = 0.906179846$ |
| 6 | $c_1 = 0.171324492$ $c_2 = 0.360761573$ $c_3 = 0.467913935$ $c_4 = 0.467913935$ $c_5 = 0.360761573$ $c_6 = 0.171324492$ | $x_1 = -0.932469514$ $x_2 = -0.661209386$ $x_3 = -0.2386191860$ $x_4 = 0.2386191860$ $x_5 = 0.661209386$ $x_6 = 0.932469514$ |

Metoda Gaussa

Jeżeli dane są w tablicach dla $\int_{-1}^1 g(x) dx$ to jak obliczamy

$$\int_a^b f(x) dx \quad ?$$

Granice całkowania $[a, b]$ należy zamienić na $[-1, 1]$

Niech $x = mt + c$

Dla $x = a, \quad t = -1$

Dla $x = b, \quad t = 1$

Wynika stąd, że:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{b-a}{2} \\ c = \frac{b+a}{2} \end{array} \right.$$

Metoda Gaussa

Stąd:
$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Ostatecznie:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

Przykład 5:

Prędkość rakiety w przedziale czasu od $t_1=8$ s do $t_2=30$ s jest opisana wzorem:

$$v(t) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t$$

- Przy pomocy dwu-punktowej metody Gaussa znajdź przemieszczenie rakiety w tym przedziale czasu czyli $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$
- Wyznacz błąd względny odniesiony do wartości dokładnej (true relative error)

Najpierw zmieniamy granice całkowania z $[8,30]$ na $[-1,1]$

$$\begin{aligned}\int_8^{30} f(t) dt &= \frac{30-8}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{30-8}{2}x + \frac{30+8}{2}\right) dx \\ &= 11 \int_{-1}^1 f(11x + 19) dx\end{aligned}$$

Następnie odczytujemy z tablic dla $n=2$ $c_1 = 1.000000000$

$$x_1 = -0.577350269$$

$$c_2 = 1.000000000$$

$$x_2 = 0.577350269$$

Korzystamy ze wzoru kwadratury Gaussa

$$\begin{aligned} 11 \int_{-1}^1 f(11x + 19) dx &\approx 11c_1 f(11x_1 + 19) + 11c_2 f(11x_2 + 19) \\ &= 11f(11(-0.5773503) + 19) + 11f(11(0.5773503) + 19) \\ &= 11f(12.64915) + 11f(25.35085) \\ &= 11(296.8317) + 11(708.4811) \\ &= 11058.44 \text{ m} \end{aligned}$$

Skorzystaliliśmy z tego, że:

$$f(12.64915) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100(12.64915)} \right] - 9.8(12.64915)$$

$$= 296.8317$$

$$f(25.35085) = 2000 \ln \left[\frac{140000}{140000 - 2100(25.35085)} \right] - 9.8(25.35085)$$

$$= 708.4811$$

b) Błąd bezwzględny (true error) E_t

$$\begin{aligned} E_t &= 11061.34 - 11058.44 \\ &= 2.9000 \text{ m} \end{aligned}$$

c) Błąd względny, $|\epsilon_t|$

$$\begin{aligned} |\epsilon_t| &= \left| \frac{11061.34 - 11058.44}{11061.34} \right| \times 100\% \\ &= 0.0262\% \end{aligned}$$