

Wykład 6.

Rozwiązywanie układów równań liniowych

dr hab. inż. Katarzyna Zakrzewska, prof. AGH

- Metody dokładne
- Metoda eliminacji Gaussa
- Metoda Gaussa-Seidla
- Rozkład LU
- Metoda Kryłowa
- Metoda LR i QR
- Zdefiniowanie problemu własnego

Układ równań liniowych

Układ równań liniowych:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

gdzie:

- **A** – macierz o m wierszach i n kolumnach
- **x** – wektor o n niewiadomych
- **b** – wektor m danych liczb

możliwe rozwiązania:

- nieskończenie wiele rozwiązań
- dokładnie jedno rozwiązanie
- brak rozwiązania (układ sprzeczny)

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Rozpatrujemy układ m równań liniowych z n niewiadomymi w postaci

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

o współczynnikach a_{ik} oraz b_i należących do ciała liczbowego K ($K = R$ lub $K = C$)

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Macierzą układu równań nazywamy macierz A jego współczynników przy zmiennych

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Macierzą rozszerzoną nazywamy macierz C , oznaczaną także jako A/B , powstałą z macierzy A przez dołączenie do niej kolumny wyrazów wolnych

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi ma rozwiązania, jeśli rząd r macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej:

$$rz A = rz C = r$$

Dla dowolnej macierzy jej rząd jest równy r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy minor rzędu k tej macierzy i każdy minor rzędu większego od k jest zerowy.

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli ten wspólny rząd r obu macierzy równa się liczbie niewiadomych, to istnieje jedno rozwiązanie, czyli jeden zbiór liczb spełniający równania; jest to ***układ oznaczony***

$$\text{rz } A = \text{rz } C = n$$

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli wspólny rząd r obu macierzy jest mniejszy od liczby niewiadomych n , to $(n - r)$ niewiadomych można przyjąć dowolnie, a pozostałe r niewiadomych wyznacza się z równań; jest to **układ nieoznaczony**, bo jego rozwiązania zależą od $(n - r)$ parametrów

$$rz A = rz C < n$$

Twierdzenie Kroneckera – Capelliego

jeżeli rząd r macierzy głównej jest mniejszy od rzędu macierzy rozszerzonej, to układ równań liniowych nie ma rozwiązań; jest to ***układ sprzeczny***

$$rz A \neq rz C$$

W przestrzeni \mathbf{R}^n , której elementami są wektory: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, obowiązują nierówności:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Metody dokładne - definicja

Jeśli rozwiązanie układu równań $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ polega na takim przekształceniu danych \mathbf{A} i \mathbf{b} , że przy założeniu dokładnie wykonywanych działań arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie, to taką metodę rozwiązania nazywamy metodą dokładną.

Metody dokładne - cechy

- Mała liczba obliczeń potrzebnych do wyznaczenia rozwiązania
- Jeśli zadanie jest źle uwarunkowane numerycznie, to wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem.
- Mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń
- Przekształcenie macierzy **A** obciąża w dużym stopniu pamięć maszyny, zwłaszcza jeśli początkowe dane **A** i **b** należy przechować celem ostatecznego sprawdzenia

Metody dokładne - przykład

Przykład – wzory Cramera

Sposób 1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Zakładamy dokładność do 2 cyfr dziesiętnych , każdy wynik przed dalszymi obliczeniami jest zaokrąglany

$$\begin{cases} 0,99x_1 + 0,70x_2 = 0,54 \\ 0,70x_1 + 0,50x_2 = 0,38 \end{cases}$$

$$a_{11}a_{22} = 0,99 \cdot 0,50 = 0,4950 = 0,50$$

$$a_{21}a_{12} = 0,70 \cdot 0,70 = 0,4900 = 0,49$$

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,50 - 0,49 = 0,01$$

Metody dokładne - przykład

$$\begin{aligned}a_{22}b_1 - a_{12}b_2 &= 0,50 \cdot 0,54 - 0,70 \cdot 0,38 \\ &= 0,2700 - 0,2660 = 0,27 - 0,27 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11}b_2 - a_{21}b_1 &= 0,99 \cdot 0,38 - 0,70 \cdot 0,54 \\ &= 0,3762 - 0,3780 = 0,38 - 0,38 = 0\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{0}{0,01} = 0$$

$$x_2 = \frac{0}{0,01} = 0$$

Dokładne rozwiązanie tego układu równań daje wynik:

$$x_1 = 0,80 \qquad x_2 = -0,36$$

Metody dokładne – przykład cd.

Sposób 2: metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{aligned}0,99x_1 + 0,70x_2 &= 0,54 \\0,70x_1 + 0,50x_2 &= 0,38\end{aligned}$$

Eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego równania układu równań.
W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,70}{0,99} = 0,7070 \cong 0,71$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}0,70x_1 + 0,4949x_2 &= 0,3818 \\0,70x_1 + 0,50x_2 &= 0,38\end{aligned}$$

Odejmując równania stronami po wcześniejszym zaokrągleniu do 2 cyfr:

$$0,00x_2 = 0,00$$

czyli układ nieoznaczony, posiadający nieskończenie wiele rozwiązań.

Układy równań z macierzą trójkątną

Macierz trójkątna – definicja

Macierz trójkątną nazywamy macierzą trójkątną dolną (górną), jeżeli wszystkie elementy nad (pod) diagonalą są równe zero.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna dolna

Macierz trójkątna górna

Układy równań z macierzą trójkątną

Obliczenie wyznacznika macierzy trójkątnej sprowadza się do wymnożenia elementów leżących na głównej przekątnej:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n l_{i,i} = l_{1,1} \cdot l_{2,2} \cdot \dots \cdot l_{n,n}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{i,i} = u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdot \dots \cdot u_{n,n}$$

Układy równań z macierzą trójkątną

Jeżeli macierz \mathbf{A} układu n równań z n niewiadomymi $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ jest macierzą trójkątną (dolną lub górną), to rozwiązanie \mathbf{x} takiego układu równań można uzyskać wykonując małą liczbę działań arytmetycznych i przy małych błędach zaokrąglenia

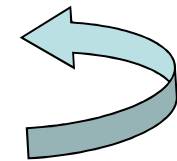
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{nn}x_n = b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$



Ogólnie

$$x_i = \frac{b_i - a_{in}x_n - \dots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}}$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Koszt obliczeniowy:

Dla wyznaczenia wektora \mathbf{x} należy wykonać M mnożeń i dzieleni oraz D dodawań:

$$M = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$D = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Metoda eliminacji Gaussa

Etap pierwszy (zwany etapem eliminacji „do przodu” zmiennych)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Wymaganych jest n-1 kroków eliminacji

Metoda eliminacji Gaussa

Krok 1. Od drugiego wiersza odejmujemy pierwszy podzielony przez a_{11} i pomnożony przez a_{21}

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{array} \right.$$

Otrzymujemy:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \right) x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

Metoda eliminacji Gaussa

Podobnie postępujemy z pozostałymi wierszami:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots\dots\dots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{array} \right.$$

gdzie:

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$$

$$\vdots$$

$$a'_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Krok 2. Powtarzamy procedurę kroku 1 dla trzeciego wiersza

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad \left| \begin{array}{l} a'_{32} \\ a'_{22} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{32}x_2 + a'_{23} \frac{a'_{32}}{a'_{22}} x_3 + \dots + a'_{2n} \frac{a'_{32}}{a'_{22}} x_n = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \end{array} \right.$$

Otrzymujemy:

$$\left(a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23} \right) x_3 + \dots + \left(a'_{3n} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{2n} \right) x_n = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2$$

Metoda eliminacji Gaussa

Po kroku 2 otrzymujemy

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

.....

$$a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Metoda eliminacji Gaussa

Pod koniec kroku $n-1$ układ równań przybiera postać:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

.....

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Po przeprowadzeniu $n-1$ kroków eliminacji zmiennych otrzymane równania możemy zapisać w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^{(n-1)}_n \end{bmatrix}$$

Otrzymana macierz jest macierzą trójkątną!

Metoda eliminacji Gaussa

Etap drugi zwany postępowaniem odwrotnym (podstawieniem wstecznym)

Ponieważ otrzymana macierz jest macierzą trójkątną korzystamy ze wzorów:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} - a_{i,i+2}^{(i-1)}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}^{(i-1)}x_n}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad \text{dla } i = n-1, \dots, 1$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)}x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad \text{dla } i = n-1, \dots, 1$$

Metoda eliminacji Gaussa – koszt obliczeniowy

Łączna ilość mnożeń i dzielení:

$$M = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$$

Łączna ilość dodawań:

$$D = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

Przykład:

Czas t (s)	Prędkość (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Prędkość rakiety została przybliżona wielomianem:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \quad 5 \leq t \leq 12.$$

Znaleźć współczynniki a_1 , a_2 , a_3 metodą eliminacji Gaussa i prędkość w chwili $t = 6$ s

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \quad 5 \leq t \leq 12.$$

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$t_1 = 5 \text{ s}, v(5) = 106,8 \text{ m / s}$$

$$t_2 = 8 \text{ s}, v(8) = 177,2 \text{ m / s}$$

$$t_3 = 12 \text{ s}, v(12) = 279,2 \text{ m / s}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1
przez 25 i pomnożyć
przez 64

$$\frac{64}{25} = 2.56$$

$$[25 \ 5 \ 1 \ \vdots \ 106.8] \times 2.56 = [64 \ 12.8 \ 2.56 \ \vdots \ 273.408]$$

Odjąć wynik od równania nr 2

$$\begin{array}{r} [64 \quad 8 \quad 1 \quad \vdots \quad 177.2] \\ - [64 \quad 12.8 \quad 2.56 \quad \vdots \quad 273.408] \\ \hline [0 \quad -4.8 \quad -1.56 \quad \vdots \quad -96.208] \end{array}$$

Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1
przez 25 i pomnożyć
przez 144 $\frac{144}{25} = 5.76$

$$[25 \ 5 \ 1 \ \vdots \ 106.8] \times 5.76 = [144 \ 28.8 \ 5.76 \ \vdots \ 615.168]$$

Odjąć wynik od równania
nr 3

$$\begin{array}{r} [144 \quad 12 \quad 1 \quad \vdots \quad 279.2] \\ - [144 \quad 28.8 \quad 5.76 \quad \vdots \quad 615.168] \\ \hline [0 \quad -16.8 \quad -4.76 \quad \vdots \quad -335.968] \end{array}$$

Po pierwszym kroku eliminacji

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & \vdots & -335.968 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Podzielić równanie 2} \\ \text{przez } -4.8 \text{ i} \\ \text{pomnożyć przez } - \\ 16.8 \end{array} \quad \frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

$$[0 \quad -4.8 \quad -1.56 \quad \vdots \quad -96.208] \times 3.5 = [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad \vdots \quad -336.728]$$

Odjąć wynik od równania
nr 3

$$\begin{array}{r} [0 \quad -16.8 \quad -4.76 \quad \vdots \quad 335.968] \\ - [0 \quad -16.8 \quad -5.46 \quad \vdots \quad -336.728] \\ \hline [0 \quad 0 \quad 0.7 \quad \vdots \quad 0.76] \end{array}$$

Po drugim kroku eliminacji

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.76 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & \vdots & -96.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & \vdots & 0.7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Eliminacja wsteczna

Obliczanie a_3

$$0.7a_3 = 0.76$$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$

$$a_3 = 1.08571$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_2

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8} \quad a_3 = 1.08571$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$

$$a_2 = 19.6905$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.2 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = 1.08571 \quad a_2 = 19.6905$$

Obliczanie a_1 $25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25}$$

$$= 0.290472$$

Metoda eliminacji Gaussa - przykład

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0.290472 t^2 + 19.6905 t + 1.08571, \quad 5 \leq t \leq 12$$

$$v(6) = 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 = 129.686 \text{ m/s.}$$

Wady metody:

- Może nastąpić zatrzymanie procesu obliczeń w powodu dzielenia przez zero.
- Jest szczególnie podatna na narastanie błędu zaokrąglenia.

Zalety metody:

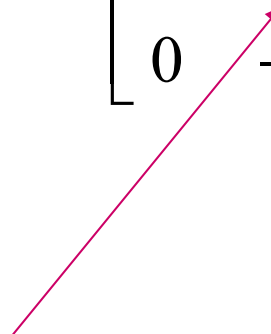
- Liczba wykonywanych działań w metodzie eliminacji Gaussa jest bez porównania mniejsza niż przy pomocy wzorów Cramera

W przypadku 15 równań:

$M=1345$ mnożeń w metodzie eliminacji Gaussa i $M=5 \cdot 10^{12}$ dla wzorów Cramera

Maszyna cyfrowa wykonująca 10^6 mnożeń na sekundę:
0,01 s w metodzie eliminacji Gaussa i ponad rok dla wzorów Cramera

Dzielenie przez zero może wystąpić podczas każdego kroku eliminacji zmiennych

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 6 & 5 & 3 \\ 24 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 6.5 \\ 0 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$


w następnym kroku, dzielenie przez zero

Metoda eliminacji Gaussa

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie
dokładne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z
dokładnością
6 cyfr dziesiętnych
w każdym kroku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.999995 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z
dokładnością
5 cyfr dziesiętnych
w każdym kroku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.5 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa-Crouta (ang. partial pivoting)

- z częściowym wyborem elementu podstawowego
 - Zapobiega dzieleniu przez zero.
 - Zmniejsza błąd numeryczny.

Elementem podstawowym nazywamy ten element macierzy A , za pomocą którego eliminujemy zmienną z dalszych równań. Dotychczas jako elementy podstawowe wybieraliśmy element leżący na diagonalu

$$a_{kk}$$

Stosując częściowy wybór elementu podstawowego wybieramy ten z elementów k -tej kolumny w k -tej macierzy, który ma największy moduł. Przez zmianę kolejności wierszy w macierzy można uzyskać element podstawowy leżący na diagonalu

Przykład :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości w pierwszej kolumnie to: $|25|, |64|, |144|$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Zamiana wiersza trzeciego z pierwszym

Przykład :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości w pierwszej kolumnie to: $|25|, |64|, |144|$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Zamiana wiersza trzeciego z pierwszym

Metoda Gaussa – Crouta w obliczaniu wyznaczników

Obliczyć wyznacznik macierzy [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Po eliminacji Gaussa

$$[B] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Użyteczne twierdzenie: Jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez dodanie lub odjęcie od jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę to nie zmienia to wyznacznika

$$\det(A) = \det(B) = 25 \cdot (-4,8) \cdot (0,7) = -84,00$$

Metoda Gaussa – Crouta w obliczaniu wyznaczników

Po zastosowaniu metody częściowego
wyboru elementu podstawowego
otrzymaliśmy macierz [C]

$$[C] = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Użyteczne twierdzenie: Jeżeli macierz B powstaje z
macierzy A przez przestawienie jednego wiersza z
drugim to zmienia się tylko znak wyznacznika

$$\det(C) = (-)(-)\det(B) = 144 (2.917) (-0.2) = -84,00$$

 tu wystąpiło dwukrotne
przestawienie wierszy

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Podzielić równanie 1
przez 144 i pomnożyć
przez 64

$$\frac{64}{144} = 0.4444$$

$$[144 \ 12 \ 1 \ \vdots \ 279.2] \times 0.4444 = [63.99 \ 5.333 \ 0.4444 \ \vdots \ 124.1]$$

Odjąć rezultat od
równania nr 2

$$\begin{array}{r} [64 \quad 8 \quad 1 \ \vdots \ 177.2] \\ - [63.99 \ 5.333 \ 0.4444 \ \vdots \ 124.1] \\ \hline [0 \quad 2.667 \ 0.5556 \ \vdots \ 53.10] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Podzielić równanie 1} \\ \text{przez 144 i pomnożyć} \\ \text{przez 25} \end{array} \quad \frac{25}{144} = 0.1736$$

$$[144 \ 12 \ 1 \ \vdots \ 279.2] \times 0.1736 = [25.00 \ 2.083 \ 0.1736 \ \vdots \ 48.47]$$

Odjąć rezultat od
równania nr 3

$$\begin{array}{r} [25 \quad 5 \quad 1 \quad \vdots \quad 106.8] \\ - [25 \quad 2.083 \quad 0.1736 \quad \vdots \quad 48.47] \\ \hline [0 \quad 2.917 \quad 0.8264 \quad \vdots \quad 58.33] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix}$$

Wartości w drugiej kolumnie drugiego i trzeciego wiersza to:

$$|2.667|, |2.917|$$

Maksimum to 2.917 w trzecim wierszu

Zamiana wiersza trzeciego z drugim

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 144 & 12 & 1 & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & 58.33 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & 53.10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Podzielić równanie 2} \\ \text{przez 2.917 i pomnożyć} \\ \text{przez 2.667} \end{array} \frac{2.667}{2.917} = 0.9143.$$

$$\left[0 \quad 2.917 \quad 0.8264 \quad : \quad 58.33 \right] \times 0.9143 = \left[0 \quad 2.667 \quad 0.7556 \quad : \quad 53.33 \right]$$

Odjąć rezultat od
równania nr 3

$$\begin{array}{r} \left[0 \quad 2.667 \quad 0.5556 \quad : \quad 53.10 \right] \\ - \left[0 \quad 2.667 \quad 0.7556 \quad : \quad 53.33 \right] \\ \hline \left[0 \quad 0 \quad -0.2 \quad : \quad -0.23 \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 144 & 12 & 1 & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & 58.33 \\ 0 & 0 & -0.2 & -0.23 \end{array} \right]$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279.2 \\ 58.33 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_2

$$2.917a_2 + 0.8264a_3 = 58.33$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{58.33 - 0.8264a_3}{2.917} \\ &= \frac{58.33 - 0.8264 \times 1.15}{2.917} \\ &= 19.67 \end{aligned}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279.2 \\ 58.33 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

Obliczanie a_1

$$144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279.2$$

$$a_1 = \frac{279.2 - 12a_2 - a_3}{144}$$

$$= \frac{279.2 - 12 \times 19.67 - 1.15}{144}$$

$$= 0.2917$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie to:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2917 \\ 19.67 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

Układ n równań z n niewiadomymi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Metoda Gaussa – Seidla

Przekształcenie równań do postaci:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \quad \longleftarrow \quad \text{z równania 1}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \quad \longleftarrow \quad \text{z równania 2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \swarrow \quad \text{z n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \quad \longleftarrow \quad \text{z równania n}$$

Postać ogólna dla i - tego równania

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Jest to metoda iteracyjna

Metoda Gaussa – Seidla

Zakładamy początkowe wartości od x_1 do x_n i podstawiamy je do wcześniej przekształconych równań

Obliczamy błąd względny uzyskanych nowych wartości:

$$|\epsilon_a|_i = \left| \frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}} \right| \times 100$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Procedurę powtarzamy iteracyjnie aż do uzyskania odpowiedniego wartości o zadawalającym błędzie.

Metoda Gaussa - Seidla

Przykład:

Czas t (s)	Prędkość (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

Prędkość rakiety została przybliżona wielomianem:

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3, \quad 5 \leq t \leq 12.$$

Znaleźć współczynniki a_1 , a_2 , a_3 metodą Gaussa-Seidla i prędkość w chwili $t = 6$ s

Metoda Gaussa – Seidla

Postać równania:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Po wstawieniu
danych:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Wartości przyjęte do
pierwszej iteracji:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Przekształcenie równań:

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64a_1 - a_3}{8}$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144a_1 - 12a_2}{1}$$

Pierwsza iteracja:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(2) - (5)}{25} = 3.6720$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(3.6720) - (5)}{8} = -7.8510$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(3.6720) - 12(-7.8510)}{1} = -155.36$$

Znajdowanie błędu względnego pierwszej iteracji:

$$|\epsilon_a|_i = \left| \frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}} \right| \times 100$$

$$|\epsilon_a|_1 = \left| \frac{3.6720 - 1.0000}{3.6720} \right| \times 100 = 72.76\%$$

$$|\epsilon_a|_2 = \left| \frac{-7.8510 - 2.0000}{-7.8510} \right| \times 100 = 125.47\%$$

$$|\epsilon_a|_3 = \left| \frac{-155.36 - 5.0000}{-155.36} \right| \times 100 = 103.22\%$$

Wyniki pierwszej iteracji:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

Maksymalny
błąd względny
to 125.47%

Druga iteracja:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

Wyniki pierwszej iteracji:

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(-7.8510) - 155.36}{25} = 12.056$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(12.056) - 155.36}{8} = -54.882$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(12.056) - 12(-54.882)}{1} = -798.34$$

Znajdowanie błędu względnego drugiej iteracji:

$$|\epsilon_a|_1 = \left| \frac{12.056 - 3.6720}{12.056} \right| \times 100 = 69.543\%$$

$$|\epsilon_a|_2 = \left| \frac{-54.882 - (-7.8510)}{-54.882} \right| \times 100 = 85.695\%$$

$$|\epsilon_a|_3 = \left| \frac{-798.34 - (-155.36)}{-798.34} \right| \times 100 = 80.540\%$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.056 \\ -54.882 \\ -798.54 \end{bmatrix}$$

Maksymalny
błąd względny
to 85.70%



AGH

Metoda Gaussa – Seidla

Iteracja	a_1	$ \epsilon_a _1 \%$	a_2	$ \epsilon_a _2 \%$	a_3	$ \epsilon_a _3 \%$
1	3.6720	72.767	-7.8510	125.47	-155.36	103.22
2	12.056	69.543	-54.882	85.695	-798.34	80.540
3	47.182	74.447	-255.51	78.521	-3448.9	76.852
4	193.33	75.595	-1093.4	76.632	-14440	76.116
5	800.53	75.850	-4577.2	76.112	-60072	75.963
6	3322.6	75.906	-19049	75.972	-24958	75.931

Wyniki kolejnych iteracji różnią się znacznie od prawidłowych:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29048 \\ 19.690 \\ 1.0857 \end{bmatrix}$$

Kiedy zatem ta metoda jest zbieżna?

Metoda Gaussa – Seidla

Jeżeli macierz jest silnie diagonalnie dominująca to metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \quad \text{dla wszystkich } i$$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \quad \text{przynajmniej dla jednego } i$$

Przykład macierzy diagonalnie dominującej

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| = 8$$

$$|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| = 4$$

$$|a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| = 10$$

Rozkład LU to kolejny sposób na rozwiązanie układu n równań z n niewiadomymi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Macierz A można przedstawić jako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

gdzie:

L – dolna macierz trójkątna

U – górna macierz trójkątna

Rozkład LU

Zapisując układ równań: $[A][X] = [C]$

$$[L][U][X] = [C]$$

Zakładając że:

$$[A] = [L][U]$$


Mnożąc przez: $[L]^{-1}$ $[L]^{-1}[L][U][X] = [L]^{-1}[C]$

$$[L]^{-1}[C] = [Z]$$

ale: $[L]^{-1}[L] = [I]$

$$[I][U][X] = [L]^{-1}[C]$$

$$[L][Z] = [C]$$

macierz
jednostkowa



ale: $[I][U] = [U]$

$$[U][X] = [Z]$$

zatem: $[U][X] = [L]^{-1}[C]$

Rozkład LU

$$\underbrace{[U][X]} = \underbrace{[L]^{-1}[C]}$$

Można zapisać

$$\boxed{[U][X] = [Z]} \quad [L]^{-1}[C] = [Z]$$



$$\boxed{[L][Z] = [C]}$$

Jeśli dany jest układ równań:

$$[A][X] = [C]$$

Należy dokonać dekompozycji macierzy **A** na macierze **L** oraz **U**

Rozwiązać układ równań w poszukiwaniu macierzy **Z**:

$$[L][Z] = [C]$$

Rozwiązać układ równań w poszukiwaniu macierzy **X**:

$$[U][X] = [Z]$$

Dekompozycja macierzy **A** na **L** oraz **U**:

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

U – jest macierzą wyznaczaną podczas pierwszego etapu eliminacji Gaussa

L – jest macierzą współczynników użytych podczas pierwszego etapu eliminacji Gaussa

Rozkład LU - przykład

Aby odnaleźć kształt obiektu z obrazów powierzchni w trzech kierunkach, trzeba rozwiązać np. następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ -0,2357 & -0,2357 & -0,9428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 239 \end{bmatrix}$$

Po prawej stronie znajdują się natężenia światła od środka obrazu. Macierz współczynników zależy od kierunku źródła światła w stosunku do aparatu. Niewiadomymi są **intensywności obrazu**, które będą określać kształt obiektu. Odnajdziemy wartości x_1 , x_2 , x_3 za pomocą dekompozycji LU

Rozwiązanie:

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Poszukujemy macierzy $[L]$ i $[U]$.

Macierz $[U]$ wyznaczymy metodą eliminacji Gaussa.

Krok pierwszy:

$$\text{wiersz2} - \left[\frac{\text{wiersz1}}{0,2425} \right] \times (0) = \begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ -0,2357 & -0,2357 & -0,9428 \end{bmatrix}$$

$$\text{wiersz3} - \left[\frac{\text{wiersz1}}{0,2425} \right] \times (-0,2357) = \begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ 0 & -0,2357 & -1,8857 \end{bmatrix}$$

Krok drugi:

$$\text{wiersz3} - \left[\frac{\text{wiersz2}}{0,2425} \right] \times (-0,2357) = \begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ 0 & 0 & -2,8286 \end{bmatrix}$$

Macierz współczynników
[U] wynosi:

$$[U] = \begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ 0 & 0 & -2,8286 \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy
macierz [L]:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdowanie macierzy **L**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

z pierwszego
kroku znajdowania
macierzy **U**

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0}{0,2425} = 0$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-0,2357}{0,2425} = -0,97196$$

z drugiego kroku
znajdowania
macierzy **U**

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-0,2357}{0,2425} = -0,97196$$

Kiedy macierze $[L]$ i $[U]$ są znane, spróbujemy rozwiązać układ **$[L][Z]=[C]$** :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,97196 & -0,97196 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 239 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 247$$

$$z_2 = 248$$

$$z_3 = 239 - (-0,97196)z_1 - (-0,97196)z_2$$

$$z_3 = 720,12$$

Rozkład LU - przykład

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 720,12 \end{bmatrix}$$

Znając już $[Z]$ rozwiązujemy układ $[U][X]=[Z]$

$$\begin{bmatrix} 0,2425 & 0 & -0,9701 \\ 0 & 0,2425 & -0,9701 \\ 0 & 0 & -2,8286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247 \\ 248 \\ 720,12 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując układ równań:

$$0,2425x_1 + (-0,9701)x_3 = 247$$

$$0,2425x_2 + (-0,9701)x_3 = 248$$

$$-2,8286x_3 = 720,12$$

otrzymamy szukany wektor x :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10905 \\ 4,2328 \\ -254,59 \end{bmatrix}$$

Rozkład LU - przykład

Zadanie domowe:

Rozwiązać układ opisujący 3-fazowy obwód AC:

$$\begin{bmatrix} 0.7460 & -0.4516 & 0.0100 & -0.0080 & 0.0100 & -0.0080 \\ 0.4516 & 0.7460 & 0.0080 & 0.0100 & 0.0080 & 0.0100 \\ 0.0100 & -0.0080 & 0.7787 & -0.5205 & 0.0100 & -0.0080 \\ 0.0080 & 0.0100 & 0.5205 & 0.7787 & 0.0080 & 0.0100 \\ 0.0100 & -0.0080 & 0.0100 & -0.0080 & 0.8080 & -0.6040 \\ 0.0080 & 0.0100 & 0.0080 & 0.0100 & 0.6040 & 0.8080 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ar} \\ I_{ai} \\ I_{br} \\ I_{bi} \\ I_{cr} \\ I_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0.000 \\ -60.00 \\ -103.9 \\ -60.00 \\ 103.9 \end{bmatrix}$$

Find the values of I_{ar} , I_{ai} , I_{br} , I_{bi} , I_{cr} , and I_{ci} using LU decomposition.

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Jeśli macierz A układu równań jest macierzą symetryczną dodatnio określoną to jej dekompozycja LU ma prostszą postać nazywaną

dekompozycją Choleskiego

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Macierz trójkątna górna U ma taką samą zawartość elementową jak macierz trójkątna dolna L.

Wyznaczyć trzeba dwukrotnie mniej elementów macierzy.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \dots & \dots & a_{N,N} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{N,1} & \dots & \dots & l_{N,N} \end{bmatrix}$$

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Poszczególne elementy macierzy L są wyznaczone wg zależności:

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} \quad l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}, \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k}}{l_{j,j}}, \quad j = 2, 3, \dots, i-1$$

Szczególny przypadek dekompozycji LU - dekompozycja Choleskiego

Aby przeprowadzić rozkład LL^T należy wykonać:

$$M = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$$

**Operacji
mnożenia i dzielenia**

$$D = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

**Operacji
dodawania i odejmowania**

n – obliczeń pierwiastka kwadratowego

Często przy tworzeniu modeli matematycznych wykorzystywanych do symulacji zjawisk fizycznych czy zachowania się układu, zachodzi potrzeba rozwiązania tzw. **problemu własnego**:

$$Ax_k = \lambda_k x_k \quad A = [a_{ii}]$$

- A jest macierzą kwadratową o wymiarach $n \times n$
- x_k jest wektorem własnym macierzy odpowiadającej wartości własnej λ_k

Ciąg wszystkich wartości własnych nazywamy widmem macierzy \mathbf{A} i oznaczamy $\mathbf{Sp}(\mathbf{A})$. Z definicji wartości i wektora własnego wynika:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = 0$$

Macierz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ jest osobliwa, więc:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Wyznacznik ten jest wielomianem stopnia n zmiennej λ :

$$w(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)$$

Dla dowolnej macierzy A istnieje macierz nieosobliwa P (która może mieć elementy zespolone) i zachodzi pomiędzy nimi związek:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz definiuje postać **kanoniczną Jordana**:

$$k = 1, 2, \dots, K \leq n$$

λ_i - jest wartością własną macierzy A i może wystąpić w wielu macierzach J_k

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Jeśli:

$$w(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

jest równaniem charakterystycznym macierzy A to:

$$w(A) = 0$$

Metoda Kryłowa poszukiwania zer równania charakterystycznego

$$w(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i = 0$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia:

$$w(A) = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i = 0$$

Co dla dowolnego wektora y daje:

$$A^n y + \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i y = 0$$

Do jego utworzenia
potrzeba jednak
 n^3 obliczeń
oraz $1/3 \cdot n^3$
aby go rozwiązać

Układ n równań na n niewiadomych: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$

Wyznaczanie wartości własnych metodą LR

W metodzie tej iteracyjnie przekształcamy macierz A uzyskując ciąg:

$$A = A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_m$$

w którym ostatni element stanowi macierz trójkątną górną.

Elementy diagonalne macierzy A_m stanowią natomiast ciąg wartości własnych macierzy A czyli

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{jj}^{(i)} = \lambda_j$$

Wyznaczanie wartości własnych metodą LR

W każdej iteracji wyznaczamy rozkład \mathbf{A}_i na iloczyn macierzy trójkątnej dolnej \mathbf{L} z jedynkami na diagonalu oraz macierzy trójkątnej górnej \mathbf{R} :

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{R}_i$$

Przekształcamy macierz w następujący sposób:

$$\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{L}_i$$

Macierze \mathbf{A}_i oraz \mathbf{A}_{i+1} są podobne

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \mathbf{L}_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{L}_i \\ \mathbf{A}_{i+1} &= \mathbf{R}_i \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{A}_i \mathbf{R}_i^{-1} \end{aligned}$$

Rozkład LR może nie istnieć i/lub jego znalezienie jest źle uwarunkowane

Wyznaczanie wartości własnych metodą QR

Metoda wywodzi się z metody LR, przy czym macierz L zastąpiono **macierzą ortogonalną Q** przez co metoda jest **stabilna numerycznie**.

$$\begin{aligned}A_1 &= A \\A_i &= Q_i R_i \quad Q^H Q = I \\A_{i+1} &= R_i Q_i\end{aligned}$$

gdzie: R jest macierzą trójkątną górną, a Q jest macierzą ortogonalną.

Wyznaczanie wartości własnych metodą QR

W metodzie QR otrzymujemy ciąg macierzy:

$$A = A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_m$$

Macierze te są do siebie podobne więc mają te same wartości własne. Jeśli m jest **duże** wówczas spodziewamy się że na diagonalu A_m będą znajdować się wartości własne A .

**Wadą metody QR jest wolna zbieżność dla macierzy pełnych.
Metoda jest szybkozbieżna dla macierzy rzadkich
(macierzy trójdzielnych i macierzy Hessenberga)**

Macierzą rzadką nazywamy macierz, w której większość elementów ma taką samą wartość, najczęściej zerową.

Rzadkie macierze występują w procesie rozwiązywania wielu równań z dziedziny teorii sieci elektrycznych i systemów energetycznych, genetyki, socjologii, teorii grafów itd.

Rzadkie macierze przechowuje się w pamięci w postaci upakowanej (tzn. nie przechowuje się w pamięci elementów zerowych). Taka forma pozwala na przetwarzanie większych macierzy, niż byłby to możliwe w tradycyjny sposób.

W niektórych przypadkach czas przetwarzania macierzy zmniejsza się dodatkowo z tego powodu, że pakowanie eliminuje obliczenia trywialne, na przykład mnożenie przez zero.

Redukcja macierzy

Jeśli λ_1 jest wartością własną macierzy A i x_1 odpowiadającym jej wektorem własnym oraz dla dowolnego wektora v o własności:

$$v^T x_1 = 1$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 v^T$$

Ma te same wartości co macierz A oprócz λ_1 , która jest zerem.



Redukcja macierzy – metoda Hotellinga

Metoda jest skuteczna tylko w przypadku macierzy symetrycznych:

$$v = x_1$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$$

Wektor \mathbf{v} definiujemy następująco:

$$\mathbf{v}^T = \frac{A_{j0}}{\lambda_1 x_1^{(j)}}$$

Macierz zredukowana:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 \mathbf{v}^T = A - \frac{x_1 A_{j0}}{x_1^{(j)}}$$

**j-ty wiersz
macierzy W_1
jest równy zero**

$$(W_1)_{j0} = A_{j0} - \frac{x_1 A_{j0}}{x_1^{(j)}} = 0$$

Uogólniony problem własny

Uogólniony problem własny definiujemy następująco:

$$Ax = \lambda Bx$$

A i B są macierzami kwadratowymi

SPROWADZAMY RÓWNANIE DO ZWYKŁEGO PROBLEMU WŁASNEGO

$$B^{-1}Ax = Cx = \lambda x$$

JAK ZNALEŹĆ B^{-1} ?

Uogólniony problem własny

W przypadku, gdy B oraz A są macierzami symetrycznymi możemy posłużyć się rozkładem Choleskyego

$$B = LL^T$$

$$BB^{-1} = I = LL^T (L^T)^{-1} L^{-1}$$

$$B^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1}$$

Wykorzystując rozkład LL^T można znaleźć macierz podobną do $B^{-1}A$

$$\begin{aligned} L^T (B^{-1} A) (L^T)^{-1} &= L^T (L^T)^{-1} L^{-1} A (L^{-1})^T \\ &= L^{-1} A (L^{-1})^T \\ &= G \end{aligned}$$

Uogólniony problem własny

Dzięki temu przekształceniu, macierz \mathbf{G} jest symetryczna jak \mathbf{A} i posiada identyczne widmo wartości własnych. **Jak znaleźć \mathbf{G} ?**

Najpierw należy znaleźć macierz \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{L}^{-1})^T$$

Rozwiązując układ równań:

$$\mathbf{F}\mathbf{L}^T = \mathbf{A}$$

A następnie wyznaczamy \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}$$

Rozwiązując układ równań:

$$\mathbf{L}\mathbf{G} = \mathbf{F}$$

Rozkład $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ wymaga wykonania **$1/6*n^3$ mnożeń** a wyznaczenie macierzy \mathbf{G} **$2/3*n^3$ mnożeń.**

Macierz \mathbf{G} jest symetryczna więc w celu wyznaczenia jej wartości i wektorów własnych korzystamy z metod przeznaczonych dla tej klasy macierzy.