

Analiza mat. Wykład 1

Funkcja

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest określona pewna **funkcja** f (funkcja jednej zmiennej), jeżeli każdej liczbie x ze zbioru X jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba y ze zbioru Y .

Przyporządkowanie to zapisujemy:

$$y = f(x)$$

Natomiast fakt, że f działa ze zbioru X na Y zapisujemy

$$f: X \rightarrow Y$$

Literę x nazywamy **argumentem** (lub **zmienną niezależną**), a y **wartością** (lub zmienną **zależną**) funkcji f .
Zbiór X nazywamy **dziedziną**, a Y **przeciwdziedziną** funkcji f .

Funkcję f nazywamy **iniekcją** (lub **funkcją różnowartościową**), jeśli

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Funkcję f nazywamy **suriekcją** (lub **funkcją „na”**), jeśli

$$\forall y \in Y \exists x \in X: y = f(x)$$

Funkcję f nazywamy **bijekcją**, jeśli jest iniekcją i suriekcją.

Funkcja złożona.

Niech $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Y \rightarrow Z$ będą funkcjami. Ich **złożeniem** (lub **superpozycją**) nazywamy funkcję $h: X \rightarrow Z$ określoną ,

$$h(x) = g(f(x))$$

Funkcję h nazywamy **funkcją złożoną**. Oznaczamy ją $h = g \circ f$. f nazywamy funkcją **wewnętrzną**, a g funkcją **zewnętrzną**.

Funkcja odwrotna.

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy **odwracalną**, jeśli istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$, taka że zachodzą jednocześnie

$$\begin{aligned}\forall x \in X: g(f(x)) &= x \\ \forall y \in Y: f(g(y)) &= y.\end{aligned}$$

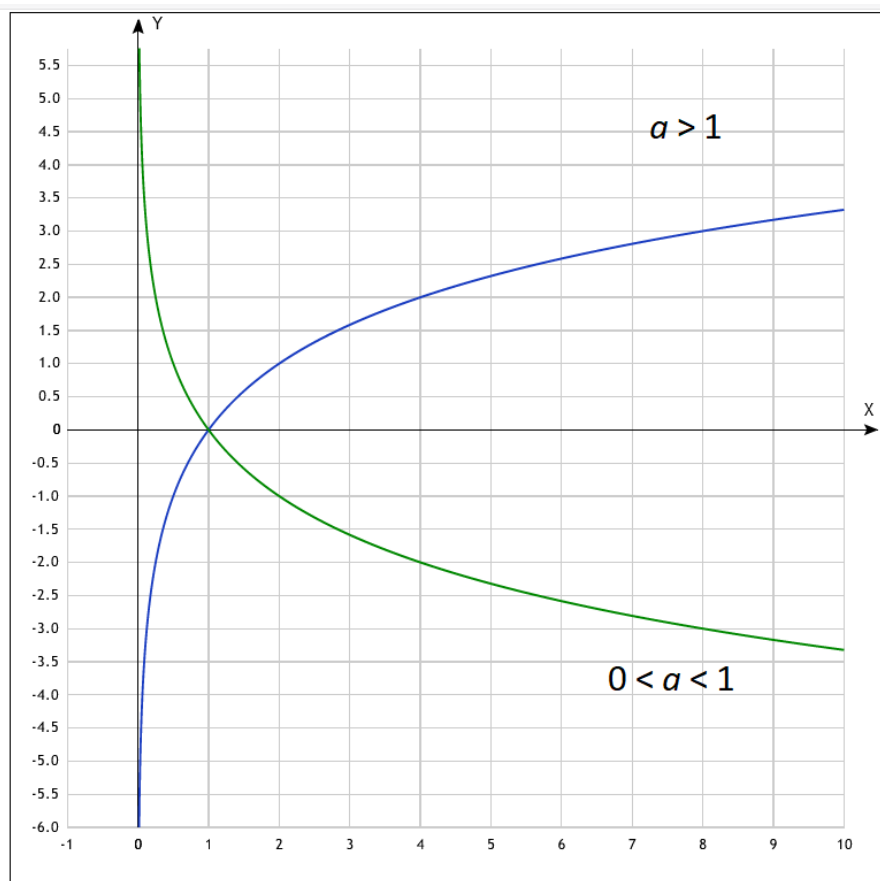
Funkcję g nazywamy **odwrotną** do funkcji f i oznaczamy f^{-1} .

Twierdzenie.

f jest odwracalna $\Leftrightarrow f$ jest bijekcją

Przegląd funkcji elementarnych.

1. Moduł
2. Wielomiany – obliczanie pierwiastków, rysowanie wykresu („wężyk”)
3. Funkcja wykładnicza – definicja, podstawowe wzory, wykres.
4. Funkcja logarytmiczna – definicja, podstawowe wzory, wykres.
5. Funkcje trygonometryczne – definicja, podstawowe wzory, wykres.
6. Funkcje cyklometryczne.



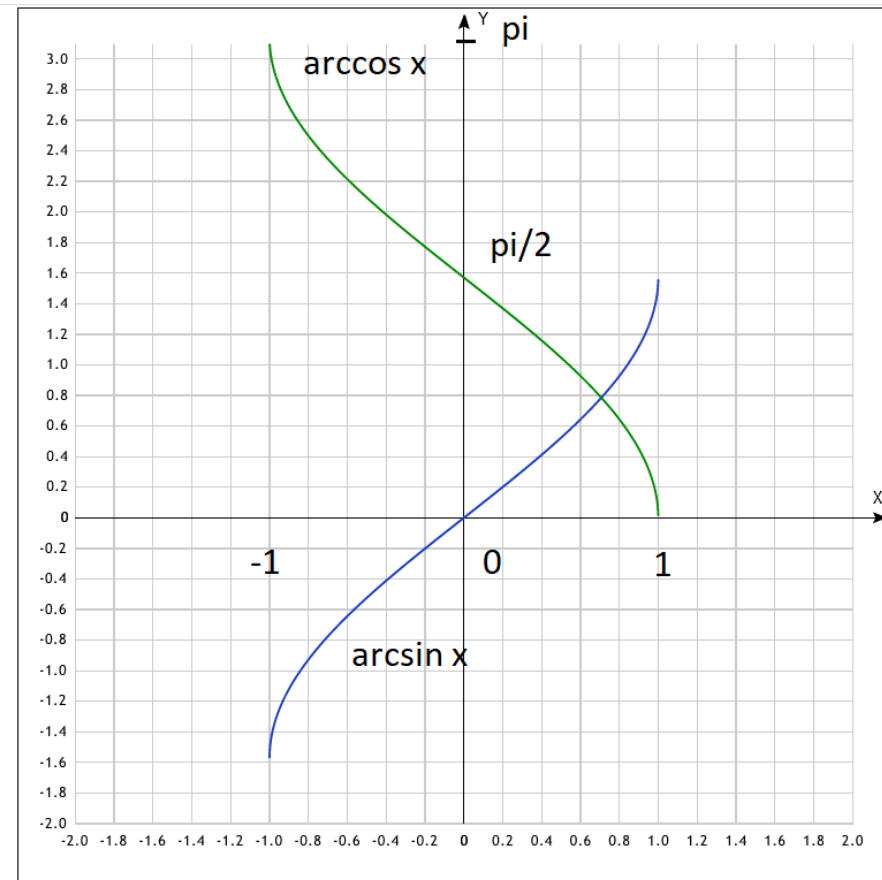
$$y = \log_a x$$

$$\begin{aligned} y = \log_a x &\Leftrightarrow a^y = x \\ \log_a x^c &= c \cdot \log_a x \\ \log_a (x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a 1 &= 0 \\ \log_a a &= 1 \end{aligned}$$

Funkcje cyklometryczne

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x \text{ i } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ i } y \in [0, \pi]$$



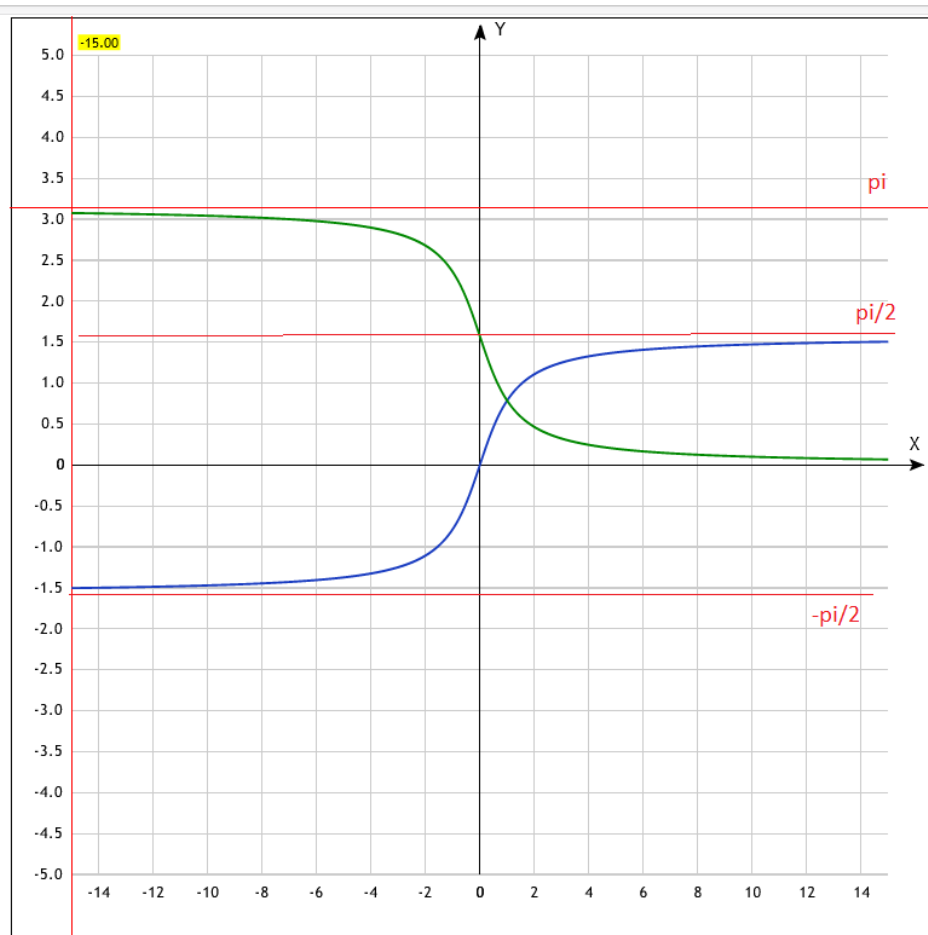
■ $y(x) = \arcsin(x)$

■ $y(x) = \arccos(x)$

Funkcje cyklometryczne

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x \text{ i } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x \text{ i } y \in (0, \pi)$$



■ $y(x) = \arctan(x)$

■ $y(x) = \operatorname{arccotan}(x)$

Funkcje zadane parametrycznie – wykres

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

Funkcje zadane współrzędnymi biegunowymi – wykres

$$r = r(\phi) \quad \phi \in [\phi_1, \phi_2]$$

ZADANIA (nie trzeba mieć rozwiązane, ale trzeba umieć rozwiązać ☺)

Zestaw 1

1. Uprość wyrażenie $\frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.
2. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{3 - \log_3 \frac{2-x}{2+x}}$.
3. Rozwiąż $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} > \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.
4. Rozwiąż nierówność $2 \cos 3x \geq -\sqrt{3}$.
5. Rozwiąż nierówność $4 \cos^2 x - 4 \cos x < 3$.
6. Rozwiąż nierówność $\log_{1/7} 7 + \log_{1/5}(2x+10) - \log_{1/5}(4-x) \geq \log_8 \frac{1}{64}$.
7. Rozwiąż nierówność $\sqrt{3+2x-x^2} > x-1$.
8. Rozwiąż $\log_{3/4}(\sin 2x + \sin^2 2x + \dots + \sin^n 2x + \dots) \geq 0$,
9. Rozwiąż $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$,

1. Obliczyć $f \circ g$ oraz $g \circ f$ dla
 - a) $f(x) = x^3 + x, g(x) = 2^x$.
2. Obliczyć $\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctan\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right) - 3 \arcsin\left(\sin\frac{9}{16}\pi\right)$.
3. Rozwiązać równanie

$$\tan(2 \arctan 3x) = \sqrt{3}.$$
4. Sprawdzić tożsamość
 - a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ na zbiorze $\langle -1 ; +1 \rangle$
 - b) $\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ na zbiorze $\mathbf{R}$.
5. Sprawdzić dla jakich $x \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest równość
 - a) $\arctg x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$
 - b) $2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$
6. Naskicować wykres krzywej zadanej parametrycznie lub biegunowo
 - a) $x(t) = t - \sin t, y(t) = 1 - \cos t, t \in [0 ; 2\pi]$,
 - b) $x(t) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, y(t) = \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}, t \in [0 ; 2\pi]$,
 - c) $r(\phi) = e^\phi, \phi \in (-\infty, \infty)$