

AM1 wykład 2

Def. Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych (czyli 1, 2, 3, ...)
 $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$

Kolejne wyrazy ciągu to

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

zaś sam ciąg oznaczamy

$$(a_n).$$

Def. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych ma granicę $g \in \mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbf{N}: \forall n > n_\epsilon \quad |a_n - g| < \epsilon$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Def. Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych ma granicę $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbf{N}: \forall n > n_\epsilon \quad a_n > M$$

(analogicznie definiujemy granicę $-\infty$). Piszemy wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Def. Ciąg, który ma granicę skończoną nazywamy **zbieżnym**. Ciąg, który ma granicę $\pm\infty$ nazywamy **rozbieżnym do $\pm\infty$** . Ciąg, który nie ma granicy nazywamy **rozbieżnym**.

Symbole nieoznaczone:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Przykłady.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

3. ...

Twierdzenie (o arytmetycznych działaniach na granicach ciągów).

Niech ciągi (a_n) i (b_n) będą zbieżne. Wówczas

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n . \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .\end{aligned}$$

Ponadto, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ oraz $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in N$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech (a_n) , (b_n) i (c_n) będą trzema ciągami liczb rzeczywistych. Niech ponadto

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$. Jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$\forall n > n_0: a_n \leq b_n \leq c_n,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Def. (Heinego)

Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 i o wyrazach różnych od x_0 zachodzi równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Granice jednostronne.

Dwie ważne granice.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2. Jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, to $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$

Zestaw 3

1. Obliczyć granice ciągów przy $n \rightarrow \infty$

$$\text{a) } a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2},$$

$$\text{b) } a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}},$$

$$\text{c) } a_n = n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}),$$

$$\text{d) } a_n = \frac{2^n}{n!},$$

$$\text{e) } a_n = \frac{\ln(2^n + e^n)}{n},$$

$$\text{f) } a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{4n},$$

$$\text{g) } a_n = n \ln\left(\frac{3+n}{n}\right).$$

2. Obliczyć granice funkcji

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}},$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1}),$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{5x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\tan 5x}{8x} + \frac{\sin x^2}{x} \right),$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\tan^2 \pi x},$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8-x}{\sin \frac{\pi x}{8}},$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \sin x},$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x}{2x+1}, \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{|x|},$$