

AM1 wykład 3

Ciągłość funkcji

Def. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 , gdy spełnione są następujące trzy warunki

a) $f(x)$ jest określona w x_0

b) istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie. Niech $f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) \leq \tau \leq f(b)$. Wówczas
$$\exists c \in [a, b]: f(c) = \tau.$$

Twierdzenie. Funkcja ciągła na odcinku domkniętym przyjmuje w punktach tego odcinka wartość największą i najmniejszą.

Twierdzenie. Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ i funkcja h jest ciągła w punkcie g ,
to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h[f(x)] = h\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

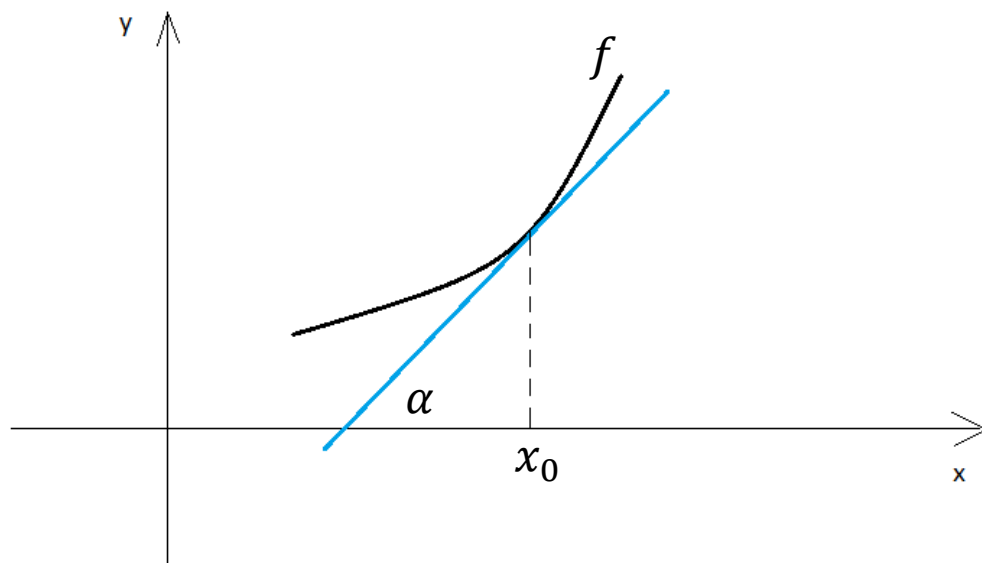
Pochodna funkcji

Def. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy właściwą granicę (o ile istnieje)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Pochodną oznaczamy $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$.

Interpretacja geometryczna



Równanie stycznej do f :
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Interpretacja fizyczna

Prędkość średnia: $v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Prędkość chwilowa: $v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h} = s'(t_0).$

Wzory podstawowe.

$$a) \ y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$b) \ y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1}$$

$$c) \ y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$d) \ y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{\log_a e}{x}$$

$$e) \ y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$f) \ y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$g) \ y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$h) \ y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$i) \ y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$j) \ y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$k) \ y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$l) \ y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)

Jeżeli istnieją pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to

$$a) (af \pm bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

$$b) (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$c) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

przy dodatkowym założeniu $g(x) \neq 0$.

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli f ma pochodną w punkcie x oraz h ma pochodną w punkcie $f(x)$, to $h \circ f$ ma pochodną w punkcie x , przy czym

$$(h \circ f)'(x) = h'[f(x)] \cdot f'(x).$$

Pochodna logarytmiczna.

Jeżeli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to

1. Jeśli $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$, to f jest **funkcją rosnącą** na (a, b) .
2. Jeśli $\forall x \in (a, b) f'(x) \geq 0$, to f jest **funkcją niemalejącą** na (a, b) .
3. Jeśli $\forall x \in (a, b) f'(x) < 0$, to f jest **funkcją malejącą** na (a, b) .
4. Jeśli $\forall x \in (a, b) f'(x) \leq 0$, to f jest **funkcją nierosnącą** na (a, b) .
5. Jeśli $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$, to f jest **funkcją stałą** na (a, b) .

1. Obliczyć pochodne:

a) $y = 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{\sqrt[7]{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

c) $y = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$

d) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $y = \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$

f) $y = \ln\left(\frac{a+b \tan x}{a-b \tan x}\right)$

g) $y = x^x$

h) $y = (\tan x)^{\sin x}$

2. Obliczyć kąt jaki tworzy z osią Ox styczna do linii $y = \sin x$ w początku współrzędnych.

3. W jakim punkcie krzywej logarytmicznej $y = \ln x$ styczna jest równoległa do prostej $y = 2x$?

4. Dla jakich x zachodzi

a) $\arctan x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$, b) $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Udowodnić nierówności (badając pochodną odpowiedniej funkcji)

a) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, b) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ dla $x > 0$.