

AM1 wykład 4

Ekstrema

Def. Funkcja f ma w punkcie x_0 ***maksimum (minimum) lokalne*** jeśli

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)).$$

Maksima i minima lokalne nazywamy ***ekstremami lokalnymi***.

Jeśli słabe nierówności zastąpimy silnymi, to otrzymamy definicje ekstremów lokalnych ***właściwych***.

Twierdzenie (warunek konieczny (Fermat 1601-1665))

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i **ma w tym punkcie pochodną**, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Twierdzenie (warunek wystarczający)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 oraz istnieje $\delta > 0$ takie że

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

oraz

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

to f ma w x_0 maksimum lokalne właściwe (warunek dla minimum lokalnego jest analogiczny).

Twierdzenie (Reguła de l'Hospitala – Jan Bernoulli 1696)

Jeżeli

1. Dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ zawierają pewne otoczenie punktu x_0
2. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ lub
b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$
3. Istnieje granica (skończona lub nie) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga. Reguła de l'Hospitala zachodzi również dla granic jednostronnych, jak i dla $x_0 = \pm\infty$.

Def. Prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną krzywej

$y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \quad (\text{as. ukośna lewostronna})$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \quad (\text{as. ukośna prawostronna})$$

Twierdzenie.

Jeśli $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną dla $y = f(x)$, to

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax].$$

1. Oblicz granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$

f) $\lim_{x \rightarrow \alpha} (\alpha - x) \tan \left(\frac{\pi x}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Wyznacz ekstrema funkcji

a) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,$

b) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1},$

c) $y = 4x^2 - 10x + 5 \operatorname{arctg} 2x,$

d) $y = (x - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2},$

e) $y = x^3 e^{-x},$

f) $y = \left(\frac{2}{x} \right)^x, x > 0,$

g) $f(x) = x \cdot \ln^2 2x,$

h) $y = \frac{x}{\ln x},$

i) $f(x) = 3 \cos 2x + 2 \cos^2 x + 4x$

3. Znaleźć asymptoty krzywych

a) $y = x e^{\frac{1}{x}},$

b) $y = x \operatorname{arctg} x - x,$

c) $y = x \cdot \operatorname{arcctg} x,$

d) $y = x \ln \left(\frac{1}{x} + e \right).$