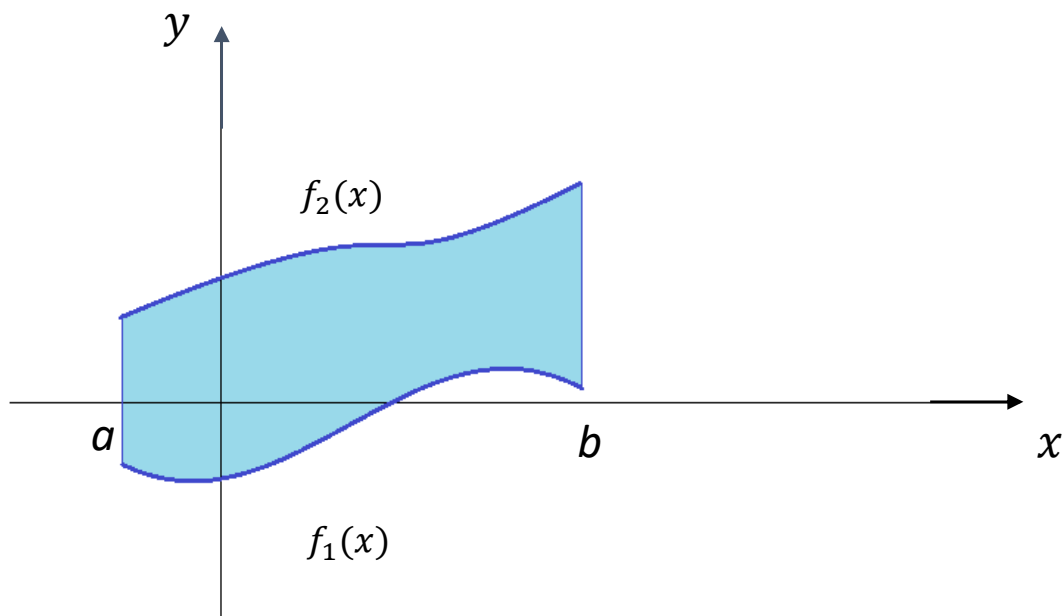


AM1 wykład 10

Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

1. Pola figur płaskich

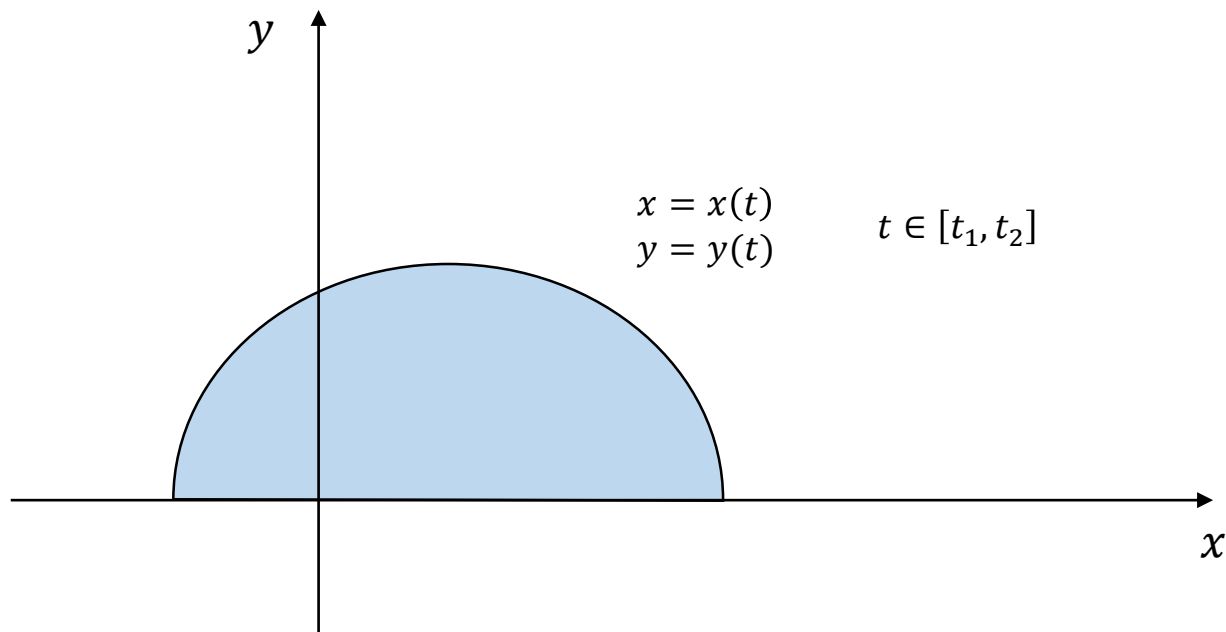
a) Pole trapezu krzywoliniowego



$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

1. Pola figur płaskich

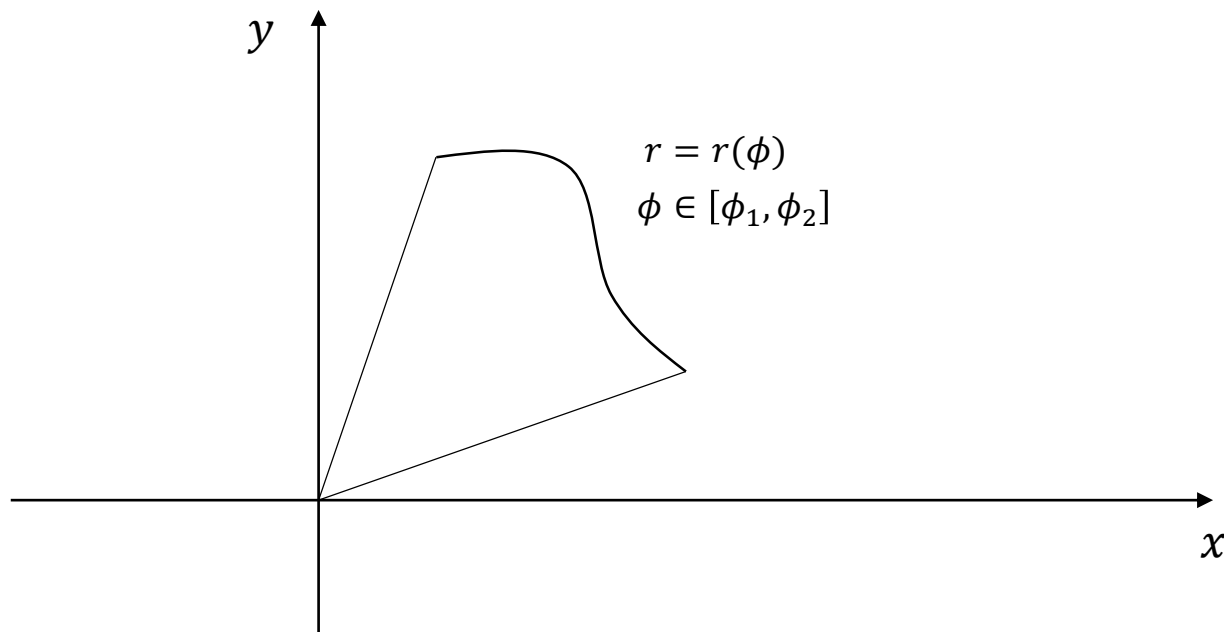
b) Pole pod wykresem krzywej zadanej parametrycznie



$$P = \pm \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

1. Pola figur płaskich

c) Pole wycinka krzywoliniowego



$$P = \frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2(\phi) d\phi$$

Uwaga! Często przydatne przejście na współrzędne biegunowe: $\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$

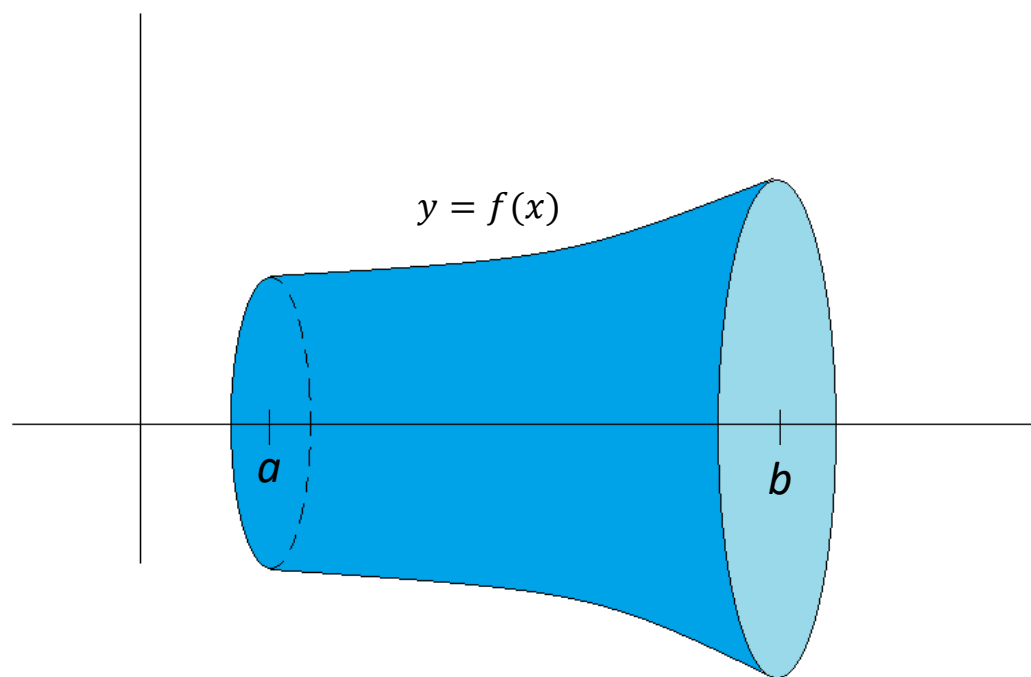
2. Długość krzywej

$$l = \int_a^b \sqrt{[y'(t)]^2 + 1} dx$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{[r(\phi)]^2 + [r'(\phi)]^2} d\phi$$

3. Objętość i pole figury obrotowej



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

1. Wykonaj rysunek i obliczyć pole

- a. wspólnego obszaru ograniczonego parabolami $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ i prostą $y = 3x$.
- b. ograniczone łukiem cycloidy $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$, oraz osią Ox .
- c. asteroidy $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.
- d. ograniczone krzywą $r = a \sin \phi$, gdzie $0 \leq \phi \leq \pi$.
- e. ograniczone przez jeden zwój spirali Archimedesesa $r = a\phi$.
- f. ograniczone krzywą $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

2. Obliczyć długość krzywej

- a) $x(t) = \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y(t) = \sin t$ od punktu $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 3, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ do punktu $(0,1)$.
- b) $y = 1 - \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \pi/4$.
- c) $r = a(1 + \cos \varphi)$, gdzie $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3. Obliczyć objętość i pole powierzchni

- a) stożka o wysokości h i promieniu podstawy r ,
- b) bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox krzywej $y = \sqrt{2rx - x^2}$, $x \in [0, r]$.