

AM1 wykład 11

Całki niewłaściwe, szeregi liczbowe

Definicja 1: Całka niewłaściwa Riemanna I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$ lub $(-\infty, b]$

Niech $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną w sensie Riemmana na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, gdzie $a < \beta$. **Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f nazywamy granicę

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

.

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest **rozbieżna**.

Definicja 2: Całka niewłaściwa Riemanna I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowaną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ zawartym w $\mathbb{R}$.

Całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju funkcji f w $\mathbb{R}$ definiujemy jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

gdzie a jest dowolnie wybranym punktem z $\mathbb{R}$. Jeżeli obie całki w powyższej sumie są zbieżne, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

Definicja 3: Całka niewłaściwa Riemanna II rodzaju w przedziale $[a, b)$ lub $(a, b]$

Niech $(f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R})$ będzie funkcją całkowaną w sensie Riemmana na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, przy czym $(a < \beta < b)$. Załóżmy, że funkcja (f) jest nieograniczona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu (b) . **Całką niewłaściwą Riemanna II rodzaju** funkcji (f) nazywamy granicę

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest **rozbieżna**.

Definicja 4: Całka niewłaściwa Riemanna II rodzaju w przedziale (a, b)

Niech $(f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R})$ będzie funkcją całkowaną w sensie Riemmana na każdym z przedziałów domkniętych $[\alpha, \beta]$, przy czym $(a < \alpha < \beta < b)$. Załóżmy, że funkcja (f) jest nieograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu (a) oraz w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu (b) . **Całkę niewłaściwą Riemanna II rodzaju** funkcji (f) w (a, b) definiujemy jako

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

gdzie (c) jest dowolnie wybranym punktem z $((a, b))$. Jeżeli obie całki po prawej stronie powyższej równości są zbieżne, to mówimy, że całka $(\int_a^b f(x)dx)$ jest **zbieżna**. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka niewłaściwa $(\int_a^b f(x)dx)$ jest **rozbieżna**.

Definicja.

Założmy, że (a_n) jest ciągiem liczbowym nieskończonym. **Szeregiem nieskończonym** o wyrazie ogólnym a_n nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Sumę $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nazywamy **sumą częściową** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Mówimy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny** jeśli istnieje skończona granica $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Liczbę S nazywamy **sumą szeregu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Twierdzenie (o działaniach arytmetycznych dla szeregów zbieżnych)

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy a oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do sumy b , to

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

Twierdzenie (warunek konieczny zbieżności szeregu).

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Twierdzenie 1: Kryterium porównawcze

Jeżeli istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla wszystkich wyrazów ciągów (a_n) i (b_n) o indeksach większych od n_0 zachodzą nierówności $0 \leq a_n \leq b_n$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Twierdzenie 1: Kryterium d'Alemberta

Jeżeli dla indeksów n większych od pewnej liczby $n_0 \in \mathbb{N}_+$ wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są dodatnie oraz istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to dla $g \in [0, 1)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a dla $g \in (1, \infty)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

1. Obliczyć całki:

a) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$, b) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$, c) $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx$

2. Oblicz pole figury zawartej między krzywymi $r = \frac{1}{\phi}$ oraz $r = \frac{1}{\sin \phi}$, gdzie $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Zbadać zbieżność szeregów

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n\sqrt{n}} \tan \frac{1}{n!}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{5}\right)^n$,