

AM1 – wykład 12

Szeregi potęgowe

Szeregi liczbowe o wyrazach dodatnich c.d.

Twierdzenie. (kryterium całkowe)

Jeżeli funkcja f jest ciągła, dodatnia i malejąca w przedziale $[n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$, to całka niewłaściwa $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ i szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnych.

Definicja. (bezwzględna/warunkowa zbieżność szeregu)

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **bezwzględnie zbieżny**, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **warunkowo zbieżny**, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

Twierdzenie.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.

Twierdzenie. (kryterium Leibniza)

Jeżeli ciąg (a_n) jest malejący, nieujemny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny.

Szeregi potęgowe.

Definicja.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazywamy szeregiem potęgowym o środku w x_0 .

Twierdzenie. (o promieniu zbieżności)

Niech $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ oraz

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{jeśli } \lambda \in (0, \infty) \\ 0, & \text{jeśli } \lambda = \infty \\ \infty, & \text{jeśli } \lambda = 0. \end{cases}$$

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest zbieżny dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ oraz rozbieżny dla $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

1 . Znaleźć przedział zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n \cdot 8^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (x-3)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot x^{2n}}{n^2 + 5}$$

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$