

AM1 – wykład 13

Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.

Szereg Taylora.

Twierdzenie. Jeżeli ciąg reszt $r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$ w rozwinięciu Taylora funkcji f jest zbieżny do zera dla każdego x z pewnego otoczenia U punktu x_0 , to dla każdego $x \in U$ zachodzi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Przykłady.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad |x| < 1$$

$$\text{gdzie } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$$

oraz (!)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Twierdzenie. Jeżeli x należy do wnętrza przedziału zbieżności, to

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt.$$

1. Rozwinąć funkcję w szereg potęgowy o środku w punkcie x_0

a) $a^x, a > 0, x_0 = 0$

b) $\frac{x}{1-x-2x^2}, x_0 = 0$

c) $\ln(3+x), x_0 = 0$ i $x_0 = -1$

d) $\frac{x}{(x-2)^2}, x_0 = 0$

e) $\arcsin x, x_0 = 0$

f) $\operatorname{arctg} x, x_0 = 0$