

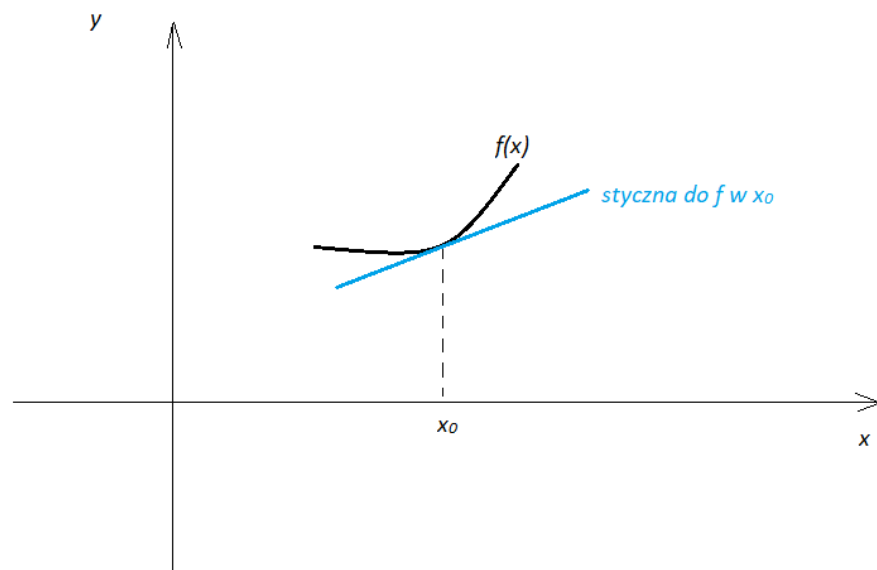
AM1 wykład 5

Pochodne wyższych rzędów

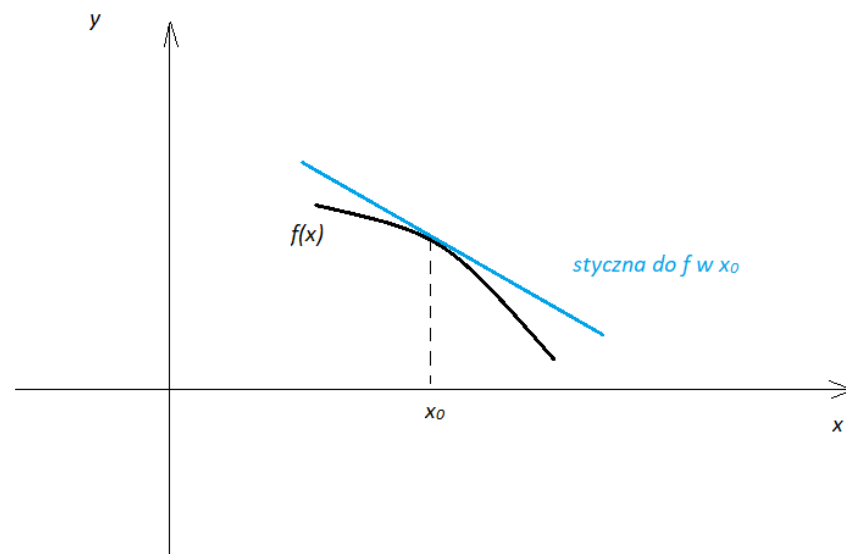
Def. Dla $n \geq 2$, n -ta pochodna funkcji w punkcie x_0 jest definiowana

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0).$$

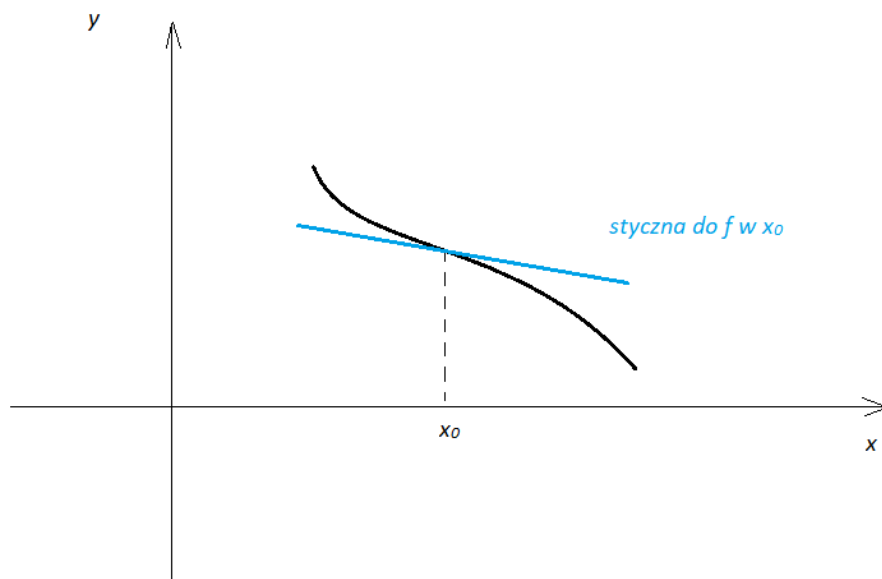
Interpretacja geometryczna



f jest **wypukła** w x_0



f jest **wklęśła** w x_0



f ma w x_0 **punkt przegięcia**

Twierdzenie. Jeżeli funkcja f ma pierwszą pochodną w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz istnieje $f''(x_0)$, to

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ jest wypukła w x_0 ,

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ jest wklęsła w x_0 .

Interpretacja fizyczna

- przyspieszenie: $a(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t_0+h) - v(t_0)}{h} = v'(t_0) = [s'(t_0)]' = s''(t_0)$
- zryw: $s'''(t_0)$

Twierdzenie (drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną, która jest ciągła w punkcie x_0 , a ponadto $f'(x_0) = 0$, to

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ma maksimum lokalne w x_0 ,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ma minimum lokalne w x_0 .

Przebieg zmienności funkcji.

1. Dziedzina, punkty przecięcia z osiami.
2. Asymptoty lub granice na końcach przedziałów określoności.
3. Monotoniczność i ekstrema.
4. Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia.
5. Wykres.

Różniczka funkcji.

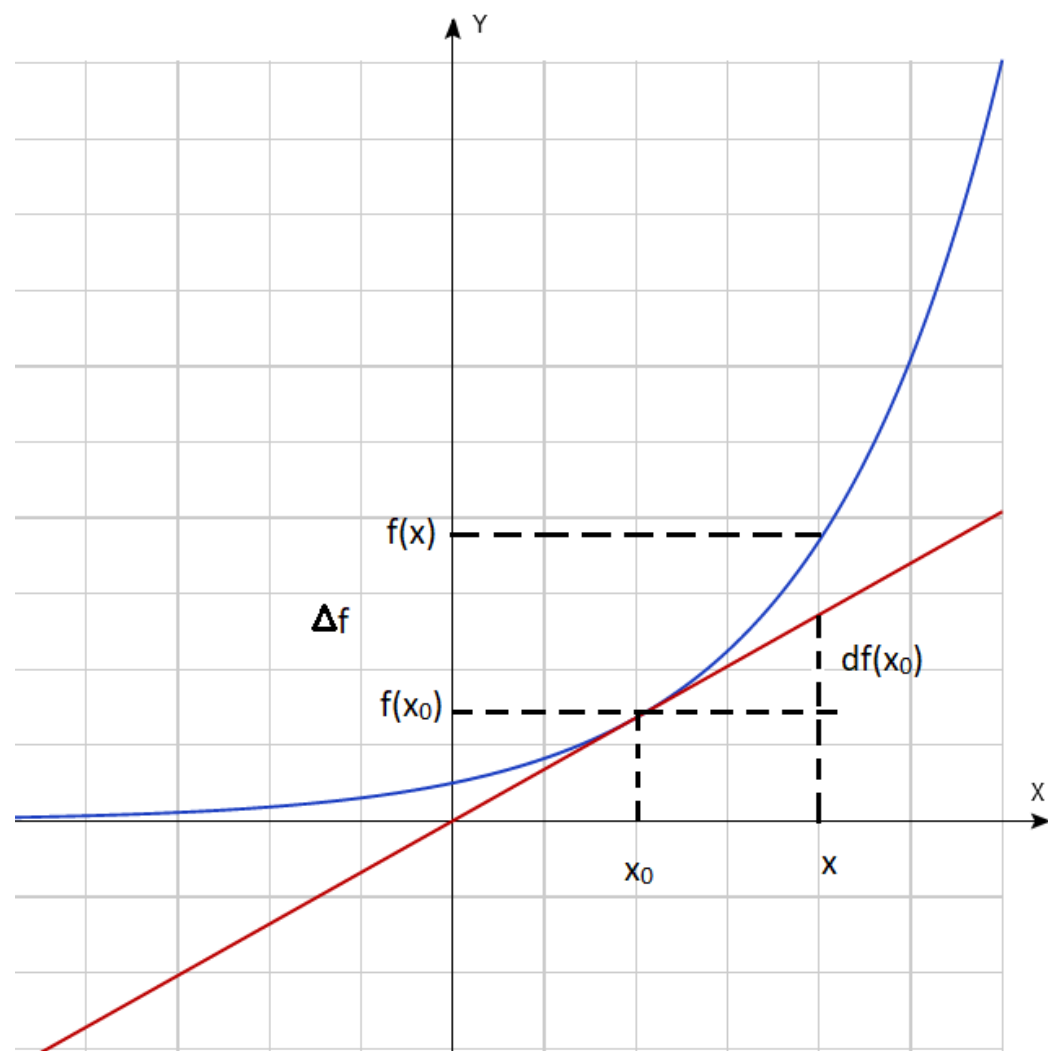
Def. **Różniczką funkcji** f w punkcie x_0 i dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x nazywamy iloczyn

$$f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Różniczkę oznaczamy $df(x_0)$ lub krótko df, dy .

Ponieważ $dx(x_0) \equiv \Delta x$, spełniona jest równość

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$



Wzór Taylora.

Twierdzenie (wzór Taylora z resztą Lagrange'a).

Jeżeli funkcja f ma ciągłe pochodne do rzędu n włącznie na przedziale domkniętym o końcach x_0 i x (na końcach przedziału pochodne jednostronne) oraz ma pochodną rzędu $(n + 1)$ wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c , leżący pomiędzy x i x_0 , że

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x, x_0)$$

przy czym

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\textcolor{red}{c})}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

W przypadku $x_0 = 0$, wzór Taylora nazywamy wzorem MacLaurina.

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, c) $y = \sqrt{\sin x^2}$, d) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$,

e) $y = x \cdot \ln^2 x$

2. Wzór Taylora

a) Oblicz w przybliżeniu $\sqrt[3]{25}$ wykorzystując dwa pierwsze wyrazy wzoru Taylora. Oszacuj popełniany błąd.

b) Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ dla $|x| \leq 0,25$.

c) Oblicz $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0,01.