

AM1 wykład 6

Def. Niech $D_f \supset [a, b]$ oraz niech będzie dany podział odcinka $[a, b]$ na n podprzedziałów

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Całkę oznaczoną Riemanna na przedziale $[a, b]$ nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (*)$$

gdzie

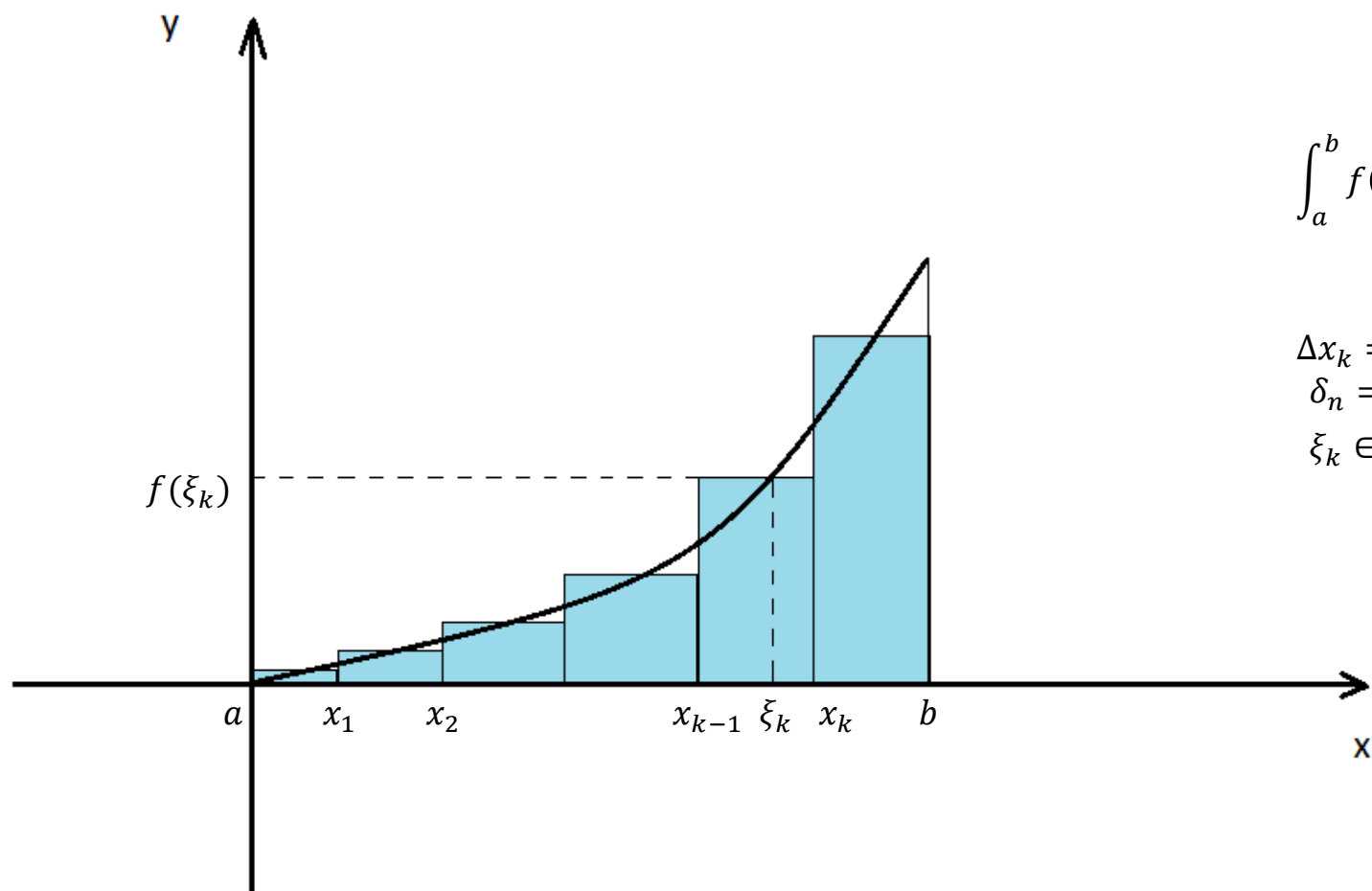
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Jeśli istnieje całka (*), to mówimy, że f jest **R-całkowalna** (lub krótko całkowalna) na przedziale $[a, b]$.

Interpretacja geometryczna: pole pod wykresem funkcji nieujemnej.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k - x_{k-1} \\ \delta_n &= \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \\ \xi_k &\in [x_{k-1}, x_k]. \end{aligned}$$

Twierdzenie. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest całkowalna na tym przedziale.

Twierdzenie (własności całki)

$$1. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2. \int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx \quad \text{gdzie } m \in (a, b)$$

$$4. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Def. Funkcję F nazywamy ***funkcją pierwotną*** funkcji f na przedziale X jeżeli

$$\forall x \in X: F'(x) = f(x).$$

Uwaga. Funkcja pierwotna jest wyznaczona z dokładnością do stałej.

Twierdzenie (I twierdzenie główne rachunku całkowego)

Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ i $\alpha \in [a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

spełnia

$$F'(x) = f(x).$$

Czyli

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x f(t)dt = f(x).$$

Twierdzenie (II twierdzenie główne rachunku całkowego)

Jeżeli f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, a F jest jakąkolwiek pierwotną dla f na tym przedziale, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$