

AM1 wykład 7

Całka nieoznaczona.

Funkcję pierwotną F funkcji f nazywamy również całką nieoznaczoną i oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$.

Wzory podstawowe.

$$1. \int 0 dx = C,$$

$$2. \int 1 dx = x + C,$$

$$3. \int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{dla } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \text{dla } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

Całkowanie przez części.

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Całkowanie przez podstawienie.

$$\int g(h(x)) \cdot h'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = h(x) \\ dt = h'(x) dx \end{array} \right| = \int g(t) dt$$

Przypadek szczególny

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \ln|h(x)| + C$$

Ułamki proste.

Funkcję

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

gdzie $k \geq 1$ jest całkowite, nazywamy ***ułamkiem prostym I rodzaju***.

Funkcję

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$$

gdzie $l \geq 1$ jest całkowite oraz wielomian $x^2 + bx + c$ jest nierozkładalny, nazywamy ***ułamkiem prostym II rodzaju***.

Twierdzenie (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)

Jeśli stopień wielomianu $P(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $Q(x)$, to funkcję wymierną

$$W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.

1. Jeśli w rozkładzie na czynniki wielomianu $Q(x)$ z mianownika ułamka wymiernego $\frac{P(x)}{Q(x)}$ występuje czynnik liniowy $(x - a)^k$ o krotności k , gdzie $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to temu czynnikowi o krotności k w rozkładzie ułamka wymiernego na ułamki proste odpowiada suma k ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad (1)$$

gdzie $A_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ są nieznanymi liczbami, które trzeba wyliczyć.

2. Jeśli w rozkładzie na czynniki wielomianu $Q(x)$ z mianownika ułamka wymiernego $\frac{P(x)}{Q(x)}$ występuje czynnik $(x^2 + bx + c)^l$ o krotności l , gdzie $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to temu czynnikowi o krotności l w rozkładzie ułamka wymiernego na ułamki proste odpowiada suma ułamków prostych drugiego rodzaju

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+bx+c)^3} \cdots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+bx+c)^l}, \quad (2)$$

przy czym $B_j, C_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 1, 2, \dots, l$, i są to nieznanne liczby, które trzeba wyliczyć.

1. Policzyc całki metodą przez części:

a) $\int (x^2 + 1) \cdot \ln 2x \, dx,$

b) $\int \operatorname{arctg} x \, dx,$

c) $\int x^2 \arcsin x \, dx,$

d) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx,$

e) $\int \sin(\ln x) dx$

2. Policzyc całki metodą przez podstawianie:

a) $\int x \cdot e^{x^2} \, dx$

b) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

c) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}},$

d) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}},$

e) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} \, dx,$

f) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{(x^2 + 1)(1 + \operatorname{arctg}^8 x)} \, dx$

g) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \, dx,$

3. Obliczyc całki nieoznaczone

a) $\int \sin \sqrt{x} \, dx,$

b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx,$

c) $\int \frac{\operatorname{ctgx}}{\ln(\sin x)} \, dx,$

d) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx,$

e) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$

f) $\int x \ln(1 + x^2) dx$