

AM1 wykład 8

Całkowanie ułamków prostych I rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} & \text{gdy } k \neq 1 \\ A \cdot \ln|x-a| & \text{gdy } k = 1 \end{cases}$$

Całkowanie ułamków prostych II rodzaju

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^l} dx = \alpha \cdot \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^l} dx + \beta \cdot \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{b}{2} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \right)^l} = \alpha I_1 + \beta I_2$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + bx + c \\ dt = 2x + b \end{array} \right| = \dots$$

$$I_2 = \left| \begin{array}{l} x + \frac{b}{2} = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \cdot t \\ dx = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} dt \end{array} \right| = \dots$$

Dodatkowy wzór rekurencyjny

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^l} = \frac{1}{2(l-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{l-1}} + \frac{2l-3}{2l-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{l-1}}$$

Algorytm obliczania całki nieoznaczonej z funkcji wymiernej.

1. Wykonaj dzielenie wielomianów:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{D(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} dx = \int D(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

gdzie

$$\text{stopień}(R(x)) < \text{stopień}(Q(x)).$$

2. Rozłóż $\frac{R(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste.
3. Oblicz całkę nieoznaczoną dla każdego ułamka prostego i dodaj je do siebie.

Całkowanie wyrażeń typu $R\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}, x\right)$

I podstawienie Eulera ($a \geq 0$): $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \cdot x$

II podstawienie Eulera ($c \geq 0$): $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

inne sposoby (za tydzień)

1. Obliczyć całki nieoznaczone

a) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2} dx,$

b) $\int \frac{x+2}{x^3+9x^2} dx,$

c) $\int \frac{x}{x^2+4x+8} dx,$

d) $\int \frac{x+2}{x^2-3x+5} dx,$

e) $\int \frac{x^4-2x^2}{x^3-1} dx,$

f) $\int \frac{1}{x^6-x^2} dx.$

2. Obliczyć,

a) $\int x\sqrt{3x+2} dx$

b) $\int \sqrt{x^2-2x+5} dx$

a) $\int \frac{2x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx,$

b) $\int \sqrt{2x+x^2} dx,$

|
c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+10x-x^2}} dx,$

d) $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{10x-x^2}} dx$