

AM1 wykład 9

- Całkowanie wyrażeń z funkcjami trygonometrycznymi

Całkowanie wyrażeń typu $R\left(\sqrt{ax^2 + bx + c}, x\right)$ - dokończenie.

Inne sposoby:

a) korzystamy ze wzorów

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + k} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C$$

Przykład.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}} = \dots$$

(i dalej odpowiednie podstawienia)

b) Inne podstawienia:

Przykład.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{10x-x^2}} = \left| t = \frac{1}{x} \right|_{\dots} = \dots$$

Całkowanie wyrażeń typu $R(\sin x, \cos x)$

a)

$$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = - \int (1 - t^2)^k \cdot t^n \, dt$$

b)

$$\int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2k} x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{array} \right| = \dots$$

c) Podstawienie uniwersalne

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

lub dla wyrażeń $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x)$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie $t = h(x)$ dla całki oznaczonej)

Jeżeli

a) h ma pochodną ciągłą na przedziale domkniętym T o końcach a i b

b) g jest ciągła na zbiorze $h(T)$

c) $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$, to

$$\int_a^b g[h(x)]h'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt.$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie $x = \phi(t)$ dla całki oznaczonej)

Jeżeli

a) ϕ ma pochodną ciągłą na przedziale domkniętym T o końcach α i β

b) f jest ciągła na zbiorze $\phi(T)$

c) $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej).

Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne u' i v' na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

3. Obliczyć

a) $\int \frac{dx}{\cos x}$

b) $\int \frac{1}{2 \sin x + 3 \cos x - 5} dx$

c) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

d) $\int \sin^4 x dx$

e) $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx$

f) $\int \frac{1}{1 - \sin^4 x} dx$

4. Obliczyć

a) $\int \frac{\arcsin x}{x^4} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$

c) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$