

AM2 wykład 1

Funkcje wielu zmiennych, granica, pochodne cząstkowe

Def. (zbieżność ciągu w R^n)

Mówimy, że ciąg punktów (P_k) w przestrzeni R^n jest **zbieżny** do punktu P_0 i piszemy $P_k \rightarrow P_0$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(P_k, P_0) = 0$$

($d(P_k, P_0)$ oznacza odległość P_k od P_0).

Def. (granica)

Liczbę g nazywamy **granicą** funkcji $f(P)$ w punkcie P_0 jeśli dla każdego ciągu punktów (P_k) , $P_k \neq P_0$,
 $P_k \rightarrow P_0 \Rightarrow f(P_k) \rightarrow g$.

Piszemy

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = g.$$

Def. (ciągłość)

Funkcja $f(P)$ jest **ciągła** w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Def. (pochodne cząstkowe)

Granice właściwą

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(przypadek funkcji 2 zmiennych)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

(przypadek funkcji 3 zmiennych)

nazywamy **pochodną cząstkową** funkcji f względem zmiennej x w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ lub $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0).$$

(Inne oznaczenie $f_x(P_0)$).

Analogicznie definiujemy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dla funkcji wielu zmiennych $f(x_1, \dots, x_n)$.

Def. (pochodne cząstkowe II rzędu)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Def. (klasa C^n)

Mówimy, że funkcja f jest klasy C^n w pewnym obszarze $D \subseteq \mathbf{R}^n$, jeśli ma ciągłe pochodne do rzędu n włącznie w każdym punkcie tego obszaru. Piszemy

$$f \in C^n(D).$$

Twierdzenie (Schwarza – o równości pochodnych mieszanych)

Jeśli funkcja $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$, to w każdym punkcie D zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Def. Niech $f(x_1, \dots, x_n)$ będzie klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $P_0 \in \mathbf{R}^n$. Gradientem f w P_0 nazywamy wektor

$$\text{grad}f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right].$$

Def. (pochodna kierunkowa)

Niech będzie dana półprosta l :

$$P = P_0 + t \cdot \vec{v}, \quad t \geq 0, \quad |\vec{v}| = 1.$$

Pochodną kierunkową f względem $\vec{v}$ w P_0 nazywamy iloczyn skalarny

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \text{grad}f(P_0) \circ \vec{v}.$$

1. Obliczyć granice

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{2x^2 + y^4}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

2. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu

a) $z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+y},$

b) $u = 3x^2 y + y^2 e^{xz}$

c) $u = \frac{x + \sqrt{y}}{z^2}.$

3. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ w punkcie $P_0 = (1, 1)$ w kierunku półprostej wyznaczonej przez wektor $v = [-3, 4]$.