

AM2 – wykład 2

Ekstrema lokalne

Def. Mówimy, że $f(P)$ ma w P_0 *maksimum* (minimum) lokalne jeśli
 $\exists S$ -sąsiedztwo $P_0 \forall P \in S: f(P) \leq f(P_0)$ ($f(P) \geq f(P_0)$).

Maksima i minima nazywamy *ekstremami*. Jeśli słabe nierówności w definicji zastąpimy silnymi, to otrzymamy definicje *ekstremów właściwych*.

Twierdzenie (warunek konieczny)

Jeśli $f(x_1, \dots, x_n)$ ma w P_0 pochodne cząstkowe I rzędu i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) = 0.$$

Def. *Hesjanem* funkcji klasy C^2 w punkcie P_0 nazywamy macierz

$$H(P_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}.$$

Def. Niech M będzie macierzą kwadratową, a $M_1, \dots, M_n$ jej minorami głównymi. Wówczas M jest

a) **dodatnio określona** jeśli

$$M_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

b) **ujemnie określona** jeśli

$$(-1)^i M_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Innymi słowy

$$\begin{bmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & + & \\ & & & \ddots \\ - & & & & \\ & + & & & \\ & & - & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

dodatnio określona

ujemnie określona

nieokreślona, jeśli „łamie” każdy z dwóch schematów (0 może być zarówno „+” jak i „-”)

Twierdzenie. (warunek wystarczający istnienia ekstremów).

Jeśli $f(x_1, \dots, x_n)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu P_0 , a ponadto

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) = 0$$

2.

$H(P_0)$ jest dodatnio (ujemnie) określony,

to f ma w P_0 **minimum** (**maksimum**) lokalne właściwe. Jeśli $H(P_0)$ jest **nieokreślony**, to **ekstremum** w P_0 **nie istnieje**.

Znaleźć właściwe ekstrema lokalne funkcji

a) $z(x, y) = (1 + e^x) \cos y - xe^x,$

b) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15 - 15y$

c) $z(x, y) = \ln |x + y| - x^2 - y^2,$

d) $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \frac{y}{x}$

e) $f(x, y) = e^{x/2} (x + y^2)$

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

g) $f(x, y, z) = x^4 - y^3 + 2z^3 - 2x^2 + 6y^2 - 3z^2,$

h) $f(x, y, z) = 16xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

i) $f(x, y, z) = \sin(x + y + z) - \sin x - \sin y - \sin z,$

j) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}.$