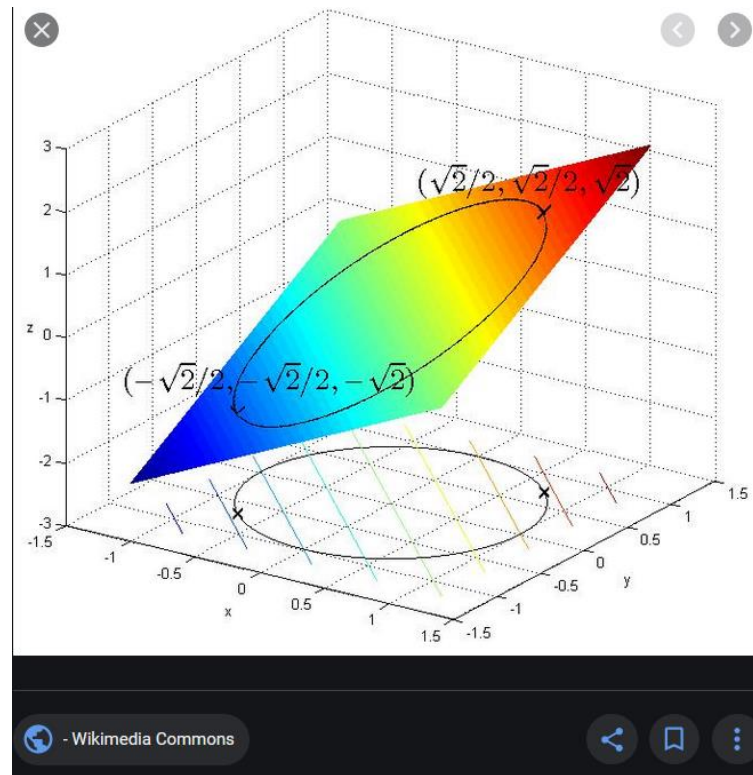


AM2 wykład 3

Ekstrema warunkowe, ekstrema absolutne

Celem jest znalezienie **ekstremum funkcji** $f(x_1, \dots, x_n)$ **przy warunku** $w(x_1, \dots, x_n) = 0$.



$$f(x, y) = x + y$$
$$w(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Metoda mnożników Lagrange'a polega na badaniu ekstremów funkcji

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot w(x_1, \dots, x_n).$$

Def. **Hesjan obcięzony**

$$\tilde{H}(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial w}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial w}{\partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial w}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial w}{\partial x_2}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(P_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(P_0) \end{bmatrix}$$

oraz niech $\tilde{H}_i(P_0)$ będzie i -tym **minorem głównym** $\tilde{H}(P_0)$.

Twierdzenie. Niech będą dane funkcje $f(x_1, \dots, x_n)$ i $w(x_1, \dots, x_n)$. Jeśli

$$a) \frac{\partial F}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$b) \frac{\partial F}{\partial \lambda}(P_0) = 0 \quad (\text{lub inaczej } w(P_0) = 0)$$

$$c) \widetilde{H}_i(P_0) < 0 \quad ((-1)^i \widetilde{H}_i(P_0) < 0) \quad i = 2, \dots, n + 1,$$

to f osiąga w punkcie P_0 **minimum** (**maksimum**) **warunkowe**.

Ekstrema absolutne – aby je znaleźć należy zbadać **ekstrema lokalne** i porównać z wartościami na brzegu (**ekstrema warunkowe**).

1. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami

- a) $f(x, y) = xy^2$, przy warunku $x + y = 1$.
- b) $f(x, y, z) = x + y + 2z$, jeżeli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
- c) $f(x, y, z) = xy^3z^3$, jeżeli $x + 2y + 3z = a$, $a > 0$,
- d) $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, przy warunku $x - y = \pi / 4$,
- e) $f(x, y) = x + y$, przy warunku $x^3 - 6xy + y^3 = 0$.

2. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji

- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na kole $x^2 + y^2 \leq 4$,
- b) $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ na trójkącie, którego boki leżą na prostych $x = 0, y = 0, x + y = 6$,
- c) $u(x, y, z) = x + y + z$ na obszarze $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$,
- d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

3. a) Znaleźć odległość punktu $(0, \frac{3}{2})$ od paraboli $y = x^2$.

b) Znaleźć odległość punktu $(0, 0, 0)$ od powierzchni $z(x, y) = \frac{1}{xy}$,

4. Liczbę dodatnią a przedstawić jako sumę takich n składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.

5. W elipsoidzie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wpisać prostopadłościan o największej objętości.