

AM2 wykład 4

Różniczkowalność, macierze Jacobiego

Def. (różniczkowalność)

Niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)$. Funkcję $f(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy **różniczkowalną** w P_0 wtedy i tylko wtedy gdy

$$\Delta f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \cdot \Delta x_n + o(\rho)$$

gdzie

$$\Delta f(P_0) = f(P_0 + (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)) - f(P_0) \text{ oraz } \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}.$$

Twierdzenie.

Jeżeli funkcja $f(x_1, \dots, x_n)$ ma w pewnym otoczeniu Q punktu P_0 **pochodne cząstkowe** $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, które są **ciągłe w P_0** , to **f jest różniczkowalna w P_0** .

Def. Różniczka zupełna

$$df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \cdot dx_n.$$

Interpretacja geometryczna.

Różniczkowalność funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (nie pionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Równanie tej płaszczyzny to

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

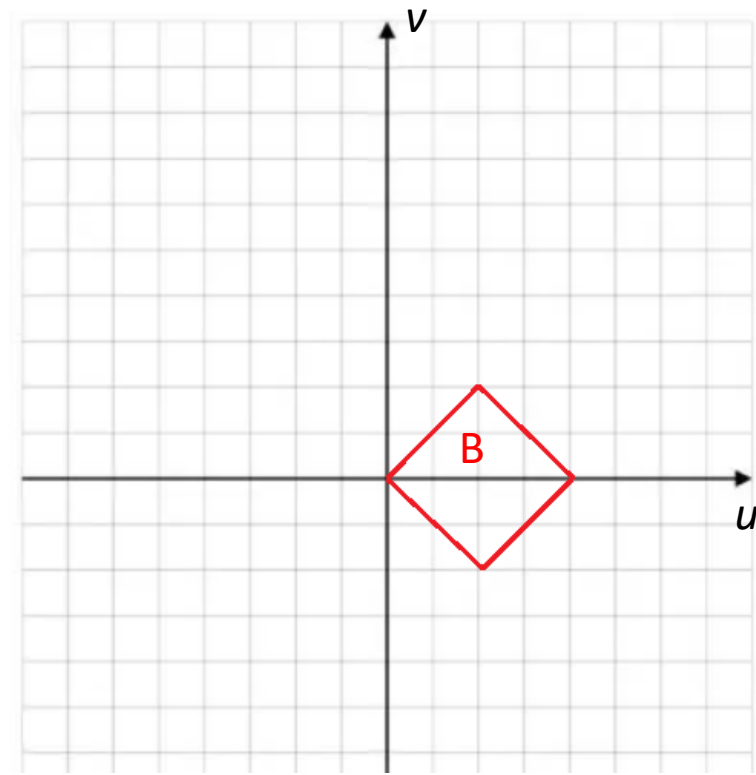
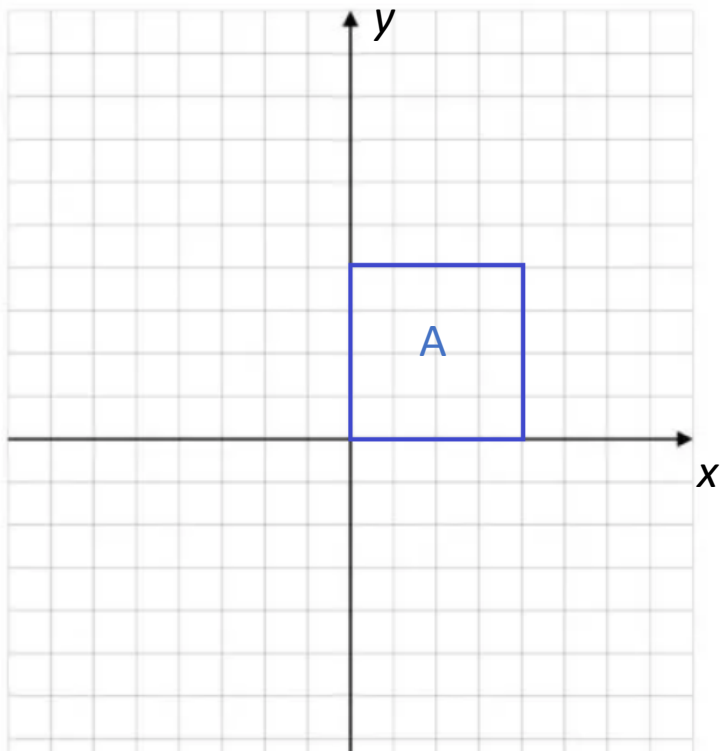
Def. (macierz Jacobiego)

Niech $f: R^n \supset U \rightarrow R^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. **Macierzą Jacobiego** funkcji f nazywamy macierz

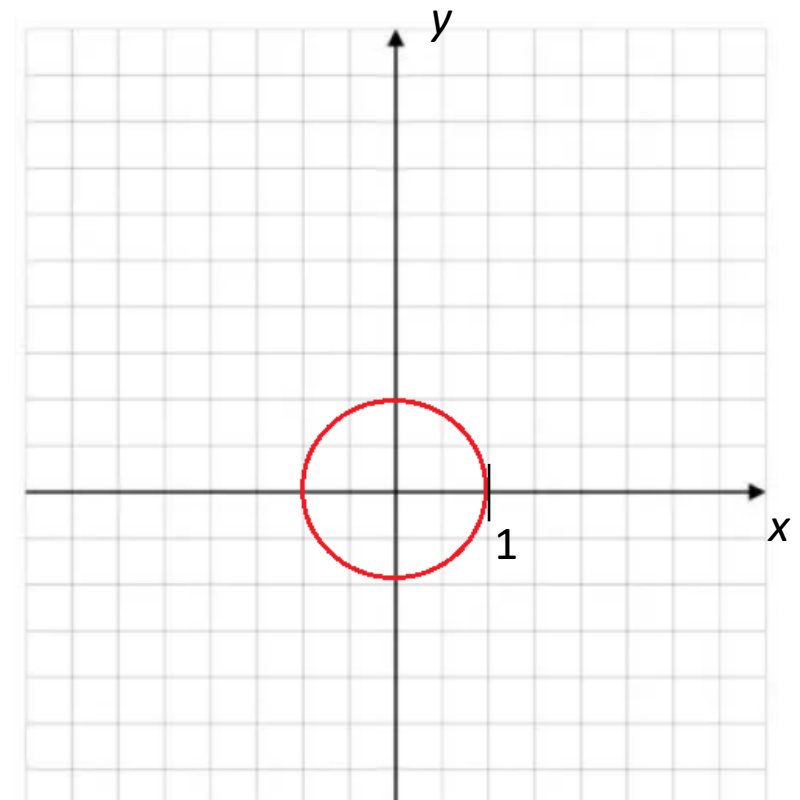
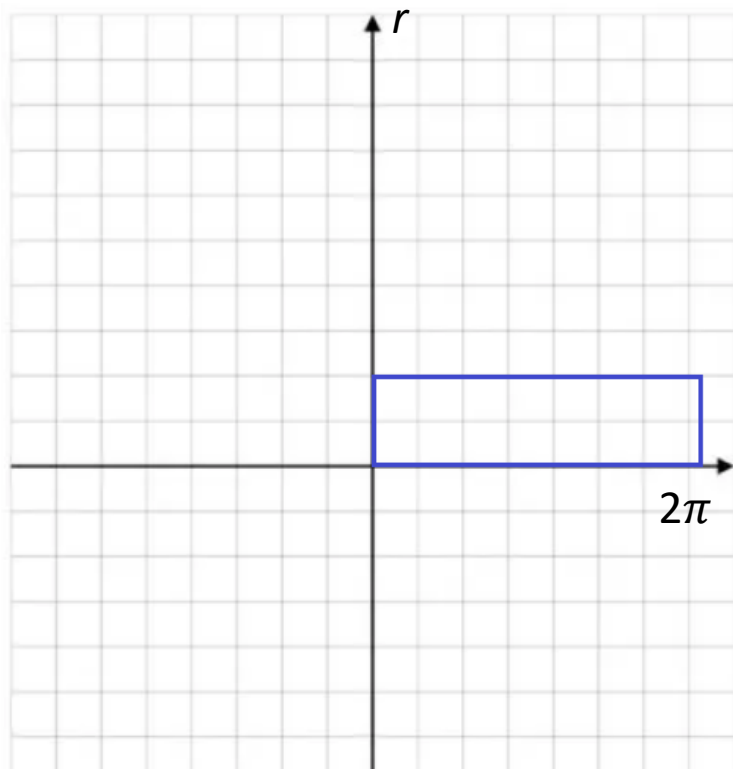
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Jeśli $m = n$, to wyznacznik macierzy Jacobiego nazywamy **jakobianem** funkcji f i oznaczamy

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$



$$(u, v) = \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y) \right)$$



$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

Znaleźć jacobian przekształcenia oraz obraz zbioru D

a) $x = u, y = v\sqrt{u}, D = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \sqrt{u}\}$

b) $x = 2u + 3v, y = u - v, D = \{(u, v): u^2 + v^2 \leq 1\}$

c) $x = (u + v)/2, y = (u - v)/2, D = \{(u, v): 1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4 - u\}$

Obliczyć jacobian przekształcenia

a) $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = z$

b) $x = r \cos \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \sin \theta.$