

Szereg Fouriera c.d

Twierdzenie Dirichleta, postać zespolona, widma

Uwaga! (cenna bo zmniejsza ilość obliczeń o połowę)

- a) Dla funkcji parzystej $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$
- b) Dla funkcji nieparzystej, $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

----- Równość funkcji i jej szeregu Fouriera -----

Def. Funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[a, b]$, jeśli

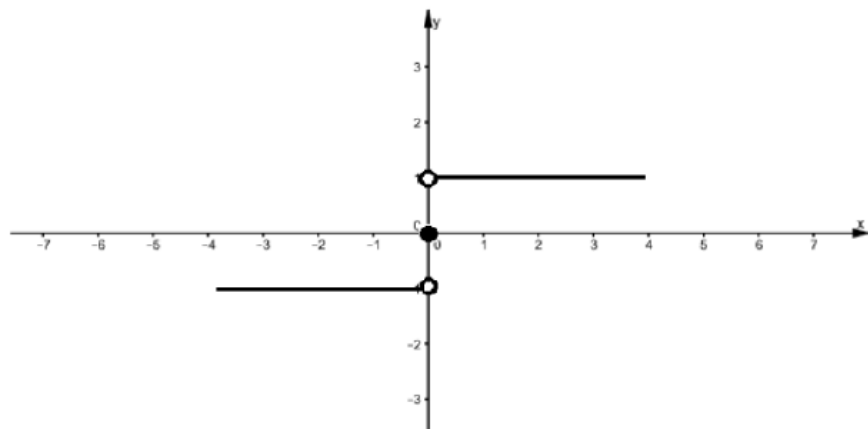
a) jest przedziałami monotoniczna

b) w punktach skokowej nieciągłości x_0 : $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$

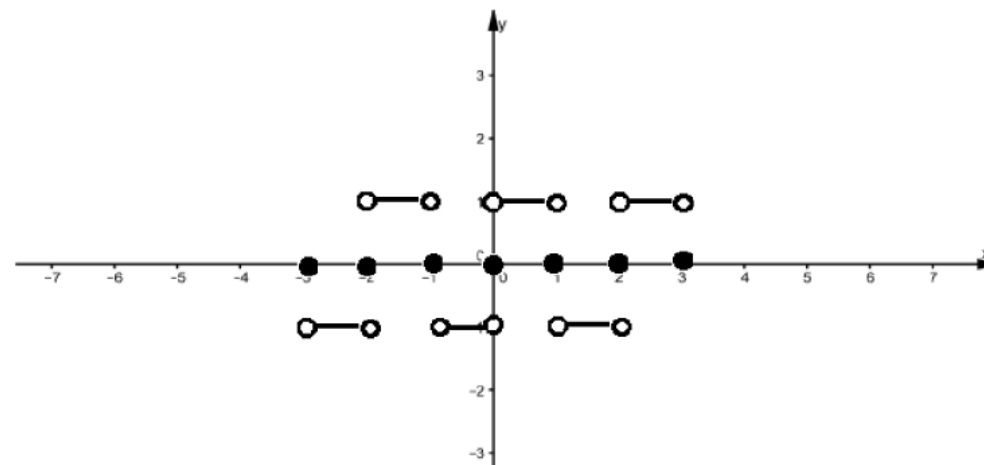
c) $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}(f(a^+) + f(b^-))$

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[a, b]$ to w każdym punkcie tego przedziału wartości funkcji i jej szeregu Fouriera **są sobie równe**.

----- Wykres szeregu -----



wykres funkcji $y = \operatorname{sgn}(x)$



wykres szeregu (dla rozwinięcia w $[-1, 1]$)

W porównaniu z wykresem funkcji, szereg jest oczywiście **okresowy**, oraz może różnić się od funkcji tam gdzie nie jest ciągły (zauważmy, że wartości w punktach nieciągłości leżą dokładnie w **pośrodku** granicy lewostronnej i prawostronnej)

SZEREGI FOURIERA – postać zespolona

WZORY

Postać zespolona szeregu Fouriera dla funkcji $f(x), x \in [a, b]$ to szereg postaci

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

gdzie $2l = b - a$, a współczynniki c_n należy obliczyć ze wzoru

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_a^b f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx, \quad n = \dots, -1, -2, 0, 1, 2, \dots$$

(przy czym obliczając całkę, jednostkę urojoną „i” traktujemy jak zwykłą liczbę)

Przykład. Rozwinąć funkcję $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ w zespolony szereg Fouriera w przedziale $[-1,1]$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1}^0 -e^{-in\pi x} dx + \int_0^1 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{in\pi} (e^0 - e^{in\pi} - (e^{-in\pi} - e^0)) = \end{aligned}$$

Właściwie jest policzone, ale nie możemy tego zostawić w takiej postaci! Kontynuujemy korzystając z własności liczb zespolonych

$$= \frac{-i}{n\pi} (1 - (\cos(n\pi) + i \sin(n\pi)) - (\cos(-n\pi) + i \sin(-n\pi)) + 1) =$$

Teraz ponieważ $\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$, a cosinus jest funkcją parzystą, otrzymujemy

$$= \frac{-i}{n\pi} (2 - 2 \cos(n\pi)) = \frac{-2i}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) =$$

Wreszcie, co warto zapamiętać, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, a więc

$$= \frac{-2i}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \frac{-4i}{n\pi} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases} \quad (1)$$

....

Zostało c_0

$$c_0 = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 1 dx = 0 \quad (2)$$

Po wyliczeniu współczynników wstawiamy do wzoru na rozwinięcie

$$\operatorname{sgn}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{n\pi} (1 - (-1)^n) e^{in\pi x}$$

Z tym, że dużo lepiej będzie to wyglądać jeśli użyjemy faktu, że dla n parzystych współczynniki się zerują. Zatem przyjmując $n = 2k - 1$ (czyli tylko n nieparzyste) mamy

$$\operatorname{sgn}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-4i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\pi x} \quad (3)$$

----- WIDMA AMPLITUDOWE I FAZOWE -----

Widmo amplitudowe to

$$A_n = |c_n|$$

(moduł z liczby zespolonej).

Widmo fazowe

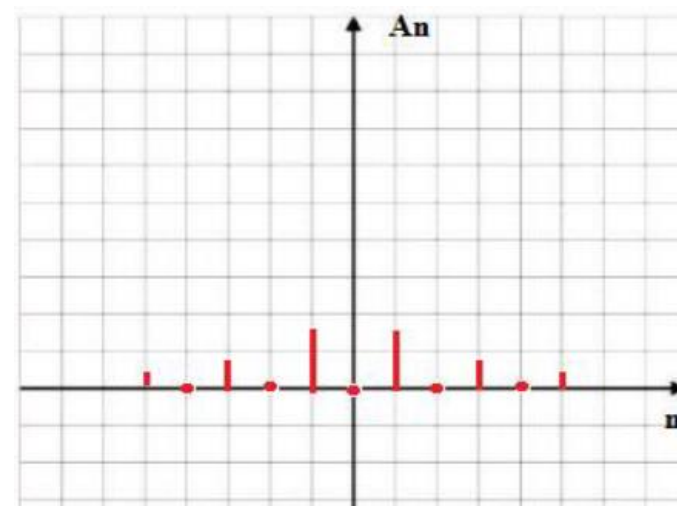
$$\phi_n = \begin{cases} \arg(c_n) & \text{Im}(c_n) \neq 0 \\ 0 & c_n \geq 0 \\ \pi \operatorname{sgn}(n) & c_n < 0. \end{cases}$$

Przykład c.d. Przypominam, że w rozważanym przykładzie było

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \frac{-4i}{n\pi} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Zatem

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \left| \frac{-4i}{n\pi} \right| = \frac{4}{n\pi} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$



Co do widma fazowego, zauważmy, że dla n nieparzystych c_n jest „czysto” urojony. Leży więc na osi OY. Zatem

- albo $\arg(c_n) = -\pi/2$, jeśli część urojona < 0 (czyli $n > 0$)
- albo $\arg(c_n) = \pi/2$, jeśli część urojona > 0 (czyli $n < 0$).

Ostatecznie

$$\phi_n = \begin{cases} -\pi/2 & \text{gdy } n > 0 \text{ i nieparzyste} \\ \pi/2 & \text{gdy } n < 0 \text{ i nieparzyste} \\ 0 & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}$$



----- CIEKAWOSTKA -----

Na poprzednim wykładzie otrzymaliśmy rozwinięcie (w przedziale $[-1,1]$):

$$\operatorname{sgn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin(n\pi x)$$

Podstawiając do powyższego wzoru $x = \frac{1}{2}$ i zauważając, że dla n parzystych wyrazy się zerują, oraz, że $\sin(\frac{n\pi}{2}) = \pm 1$, otrzymujemy:

$$1 = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \dots$$

Czyli

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Podobnie można obliczyć wiele innych nieskończonych sum, np. słynny wynik Eulera z 1735 roku (w tym wypadku dla funkcji $y = x^2$)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(problem ten pozostawał wcześniej nierozwiązany przez blisko 100 lat, z tym, że Euler użył w sprytny sposób szeregu Taylora – wtedy szeregów Fouriera jeszcze nie wynaleziono).

ZADANIA

1. Rozwiń w zespolony szereg Fouriera funkcję

a) $f(x) = \begin{cases} 2-x & x \in (0,2) \\ 1 & x \in \{0,2\} \end{cases}$

oraz spełniającą $f(x) = f(x+2)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi],$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ w przedziale $[-2,2]$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-2,1) \\ 0 & x \in (1,2) \\ 1/2 & x \in \{-2,1,2\} \end{cases}$

Podaj i narysuj widmo amplitudowe i fazowe.