Równania różniczkowe 1

Równania o zmiennych rozdzielonych

Def. **Równanie różniczkowe I rzędu** to równanie postaci

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \tag{1}$$

Przykład 1.

$$y' = 2xy \tag{2}$$

Rozwiązaniem może być

$$y = e^{x^2} \tag{3}$$

bo spełnia równanie (2). Sprawdźmy, czy lewa strona (2) jest równa prawej:

$$L = y' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xy = P$$

Zgadza się, a więc (3) jest rozwiązaniem (2). Jest to rozwiązanie szczególne, bo

$$y = Ce^{x^2} \tag{4}$$

też jest rozwiązaniem (2), co można łatwo sprawdzić tak samo jak wcześniej. Rozwiązanie (4) nazywamy rozwiązaniem ogólnym – każde rozwiązanie równania (2) można przedstawić za pomocą (4) poprzez wybór wartości parametru *C*.

Def. **Problem Cauchy'ego** to równanie różniczkowe wraz z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Przykład 2. Rozwiązaniem

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

jest funkcja $y = 2e^{x^2}$, która spełnia (2) i dodatkowo spełnia warunek początkowy, bo $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

------------------------------ RÓWNANIA O ZMIENNYCH ROZDZIELONYCH --

Def. Równanie **różniczkowe o rozdzielonych zmiennych** to równanie postaci

$$y'(x) = p\big(y(x)\big) \cdot q(x)$$

Da się je łatwo rozwiązać poprzez rozdzielanie zmiennych.

Przykład 3. Rozwiąż (2). Przekształcimy nieco (2) podstawiając $\frac{dy}{dx}$ za y'.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Teraz rozdzielimy zmienne przenosząc y-ki na lewą stronę, a x na prawą

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

Dopisujemy całki

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

Rozwiązujemy całki pamiętając o wyrazie wolnym (wystarczy po jednej stronie – dlaczego?)

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

Stąd

$$|y| = e^{x^2+C_1} = e^{x^2} \cdot e^{C_1} = C_2 e^{x^2}$$

Ostatecznie (w zależności od znaku y)

$$y = Ce^{x^2},$$

gdzie $C = \pm C_2$.

-- ZADANIA --

1. Rozwiąż

   a) $y' = xy - x$

   b) $yy' = 4x\sqrt{y^2 + 1}$, $y(0) = 1$

   c) $y' = \frac{2xy+y^2}{x^2}$ (Wskazówka. Podstaw $u = \frac{y}{x}$)