

Równanie różniczkowe liniowe

Równania liniowe zwyczajne rzędu I, równanie Bernoulliego

----- RÓWNANIA LINIOWE -----

Def. Równanie **różniczkowe liniowe I rzędu** to równanie postaci

$$y'(x) = p(x)y + q(x)$$

Jeśli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywamy **jednorodnym**, w przeciwnym razie **niejednorodnym**.

Twierdzenie.

$$\text{RORN} = \text{RORJ} + \text{RSRN}$$

Przykład 4. Rozwiąż równanie

$$y' = 2y + x.$$

I etap. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (skrót **RORJ**) – jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Czyli

$$y' = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{2y} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|2y| = x + C_1$$

$$\ln|2y| = 2x + 2C_1 = 2x + C_2$$

$$|2y| = e^{2x+C_2} = e^{2x} \cdot e^{C_2} = C_3 e^{2x}$$

$$2y = C_4 e^{2x}$$

RORJ:

$$y = C e^{2x}$$

Chcąc otrzymać rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego zastosujemy

II etap: metodę uzmienniania stałej, czyli $C = C(x)$. Wstawiając do początkowego równania otrzymamy

$$C'e^{2x} + C \cdot 2e^{2x} = 2 \cdot Ce^{2x} + x$$

Teraz dużo musi się skrócić (zawsze – inaczej błędy rachunkowe)

$$C' = xe^{-2x}$$

Zatem

$$C = \int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Ponieważ $y = Ce^{2x}$ otrzymujemy stąd rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

RSRN:

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

RORN:

$$y = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Równanie Bernoulliego

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^{\alpha}$$

sprowadzamy do równania liniowego stosując podstawienie $z = y^{1-\alpha}$.

1. Rozwiązać równania różniczkowe

a) $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = 2 \cos^2 x$, b) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$, $y(0) = 0$, c) $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y$,

d) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

e) $x \frac{dy}{dx} + y = xy^2 \ln x$