Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

Równania różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

-- RÓWNANIE JEDNORODNE --

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

Tworzymy tak zwane równanie charakterystyczne

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$$

Układ fundamentalny rozwiązań

Każdemu pierwiastkowi r powyższego równania przyporządkowujemy zbiór funkcji w następujący sposób:

a) Jeśli r jest rzeczywisty krotności k, to zostaje mu przyporządkowany zbiór

$$\{e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}\}$$

b) Jeśli $r = \alpha \pm i\beta$ (pierwiastki zespolone zawsze występują parami ze swoim sprzężeniem, lecz tutaj będziemy brać tylko jeden z każdej pary) jest krotności k, to zostaje mu przyporządkowany zbiór

$$\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x\}$$

Twierdzenie. RORJ jest kombinacją liniową wszystkich funkcji z fundamentalnego układu rozwiązań.

Przykład 1. Rozwiąż

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne, to

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0,$$

$$(r+1)^2(r-1) = 0.$$

Ma pierwiastki

$$r = -1: \qquad krotność\ 2$$

któremu odpowiada zbiór

$$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$$

oraz

$$r = 1: \qquad krotność\ 1$$

któremu odpowiada jedna funkcja

$$\{e^x\}$$

Zatem

$$RORJ: \qquad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x.$$

Przykład 2. Rozwiąż

$$y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne, to

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = (r^2+1)(r-2) = 0.$$

Ma pierwiastki

$$r = \pm i: \qquad krotność\ 1$$

któremu odpowiada zbiór

$$\{e^{0x} \cos 1x, e^{0x} \sin 1x\} = \{\cos x, \sin x\}$$

oraz

$$r = 2: \qquad krotność\ 1$$

któremu odpowiada jedna funkcja

$$\{e^{2x}\}$$

Zatem RORJ:

$$RORJ: \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{2x}.$$

-- RÓWNANIE NIEJEDNORODNE --

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Najpierw (etap I) znajdujemy RORJ.

Etap II – znajdujemy RSRN stosując metodę przewidywań

Twierdzenie.

$$RORN = RORJ + RSRN.$$

Przykład 3. Rozwiąż

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = x^2 + 1$$

Rozwiązanie. Przewidujemy RSRN postaci:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Teraz

$$y' = 2ax + b, y'' = 2a, y^{(3)} = 0$$

i wstawiamy do równania, otrzymując

$$0 + 2a - 2ax - b - ax^2 - bx - c = x^2 + 1.$$

Stąd

$$-ax^2 - (2a + b)x + 2a - b - c = x^2 + 1.$$

Zatem

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -2a - b = 0 \\ 2a - b - c = 1 \end{cases}$$

czyli $a = -1, b = 2, c = -5$, a więc

$$RSRN: \quad y = -x^2 + 2x - 5$$

Ostatecznie

$$RORN: \quad y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x} - x^2 + 2x - 5.$$

Przykład 4. Rozwiąż

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 3e^{2x}$$

Rozwiązanie. Przewidujemy RSRN postaci

$$RSRN: \qquad y = ae^{2x}$$

Zatem

$$y' = 2ae^{2x}, \qquad y'' = 4ae^{2x}, \qquad y^{(3)} = 8ae^{2x}.$$

Po wstawieniu do równania

$$8ae^{2x} + 4ae^{2x} - 2ae^{2x} - ae^{2x} = 3e^{2x}$$

Stąd $a = \frac{1}{3}$ czyli

$$RSRN: \qquad y = \frac{1}{3}e^{2x}$$

Ostatecznie

$$RORN: y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Przykład 5. Rozwiąż

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = sin\,2x$$

Rozwiązanie. Przewidujemy RSRN postaci:

$$RSRN: \qquad y = a\,sin\,2x + b\,cos\,2x$$

....

-- UKŁADY RÓWNAŃ --

Metoda eliminacji: (na przykładzie) Znajdź funkcje $x(t), y(t)$ spełniające

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y + \sin t \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$y = x' - x \Rightarrow y' = x'' - x'$$

Wstawiamy do drugiego równania

$$x'' - x' = x + x' - x + \sin t$$

i otrzymujemy równanie zwyczajne II stopnia, do którego stosujemy wcześniej poznane metody.

-- ZADANIA --

1. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe metodą przewidywań:

   a) $y''' - 3y' - 2y = x^2$,

   b) $y'' - 3y' + 5y = 2\cos x + \sin x$,

   c) $y''' + y'' = x + \sin 2x$,

   d) $y'' + y' = 2xe^x, \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{1}{2}$.

2. Rozwiąż układy równań

   a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - x - y = t \\ \frac{dy}{dt} + 4x + 3y = 2t \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - y + z = 0 \\ y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ -2z' = x + e^{2t} \end{cases}$