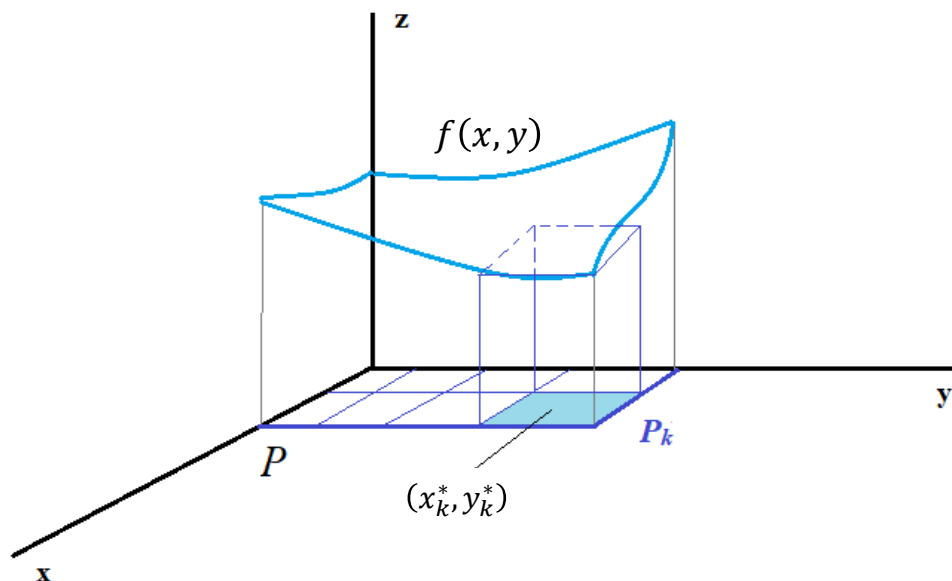


Całka podwójna

Po prostokącie i obszarze normalnym

Całka podwójna po prostokącie – definicja.



Def. Całka podwójna (po prostokącie)

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

$P_1, \dots, P_n$ – podział P na mniejsze prostokąty

δ_n – największa średnica prostokątów $P_k, k = 1, \dots, n$

$\Delta x_k, \Delta y_k$ – wymiary prostokąta P_k

(x_k^*, y_k^*) – dowolny punkt prostokąta P_k

Interpretacja geometryczna: wyraża objętość zawartą pomiędzy płaszczyzną $z = 0$ i powierzchnią $z = f(x, y)$ przy czym $(x, y) \in P$.

Własności.

$$1. \quad \iint_P [f(x, y) + g(x, y)] \, dx \, dy = \iint_P f(x, y) \, dx \, dy + \iint_P g(x, y) \, dx \, dy$$

$$2. \quad \iint_P \alpha f(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_P f(x, y) \, dx \, dy$$

$$3. \quad \text{Jeśli } P = P_1 \cup P_2 \text{ oraz } P_1 \cap P_2 = \emptyset$$

$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{P_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{P_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

Całka podwójna po obszarze normalnym – zamiana na całkę iterowaną.

Def. Obszar normalny D (względem osi OX) jest opisany następująco:

$$a \leq x \leq b$$

$$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$$

przy czym $\alpha(x), \beta(x)$ są ciągłe w $[a, b]$.

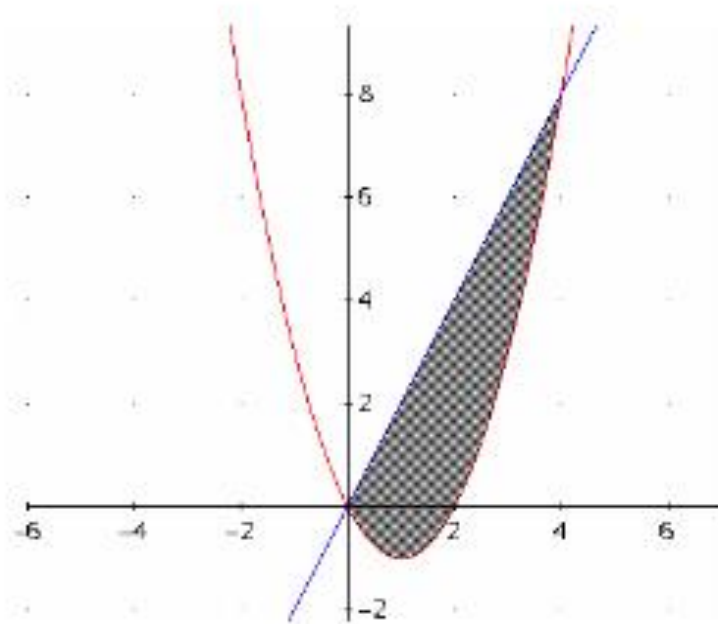
Twierdzenie. Jeśli f jest ciągła i ograniczona w obszarze normalnym D , to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Przykład. Oblicz $\iint_D (2xy - 4y) dx dy$ po obszarze D ograniczonym parabolą $y = x^2 - 2x$ oraz prostą $y = 2x$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania



$$D: 0 \leq x \leq 4, x^2 - 2x \leq y \leq 2x$$

$$\begin{aligned} \iint_D (2xy - 4y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_{x^2 - 2x}^{2x} (2xy - 4y) dy = \\ &= \int_0^4 xy^2 - 2y^2 \Big|_{x^2 - 2x}^{2x} dx = \\ &= \int_0^4 [4x^3 - 8x^2 - x(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x)^2] dx = \dots \end{aligned}$$

W tym momencie otrzymujemy znaną nam całkę pojedynczą, którą już łatwo dokończyć.

Zmiana kolejności całkowania

(w prostokącie)

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

(w przypadku obszarów normalnych – analogicznie).

Zadania:

1. Oblicz $\iint_D x \cos y \, dx dy$ gdzie D jest prostokątem o wierzchołkach w punktach $(1,0)$, $(4,0)$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(4, \frac{\pi}{2})$.
2. Oblicz $\iint_D (x + 2y) \, dx dy$ gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,8)$.
3. Oblicz $\iint_D xy \, dx dy$ gdzie D to obszar ograniczony prostymi $y = x$, $y = 2x$, $y = 4x - 6$.
4. Oblicz $\iint_D \frac{y}{x} \, dx dy$ gdzie D to obszar ograniczony krzywymi $y = \ln x$, $y = 1$, $x + y = 1$.
5. Oblicz $\iint_D \frac{x^2}{y^2} \, dx dy$ gdzie D to obszar ograniczony krzywymi $yx = 1$, $x = 2$, $y = x$.
6. Oblicz $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{3y - y^2}}$, gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y = \frac{9 - x^2}{3}$ i osią OX .