

# Całka podwójna

Zamiana zmiennych i zastosowania geometryczne

**Twierdzenie** (o zamianie zmiennych): Jeżeli

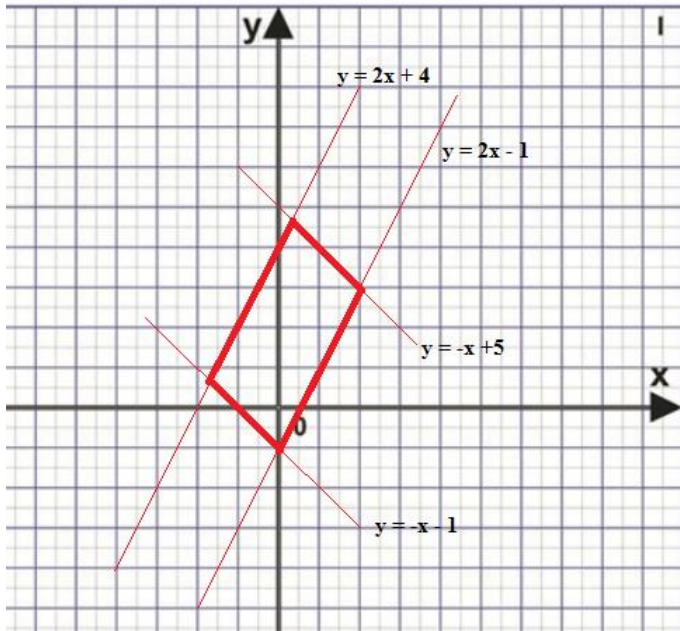
- a) Odwzorowanie  $\Delta \ni (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in D$  przekształca wzajemnie jednoznacznie wnętrze obszaru  $\Delta$  na wnętrze obszaru  $D$
- b) Pochodne cząstkowe  $x_u, x_v, y_u, y_v$  są ciągłe
- c)  $f$  jest ciągła w  $D$
- d)  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$  wewnątrz obszaru  $\Delta$ ,

to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

**Przykład.** Oblicz  $\iint_D (x + y) dx dy$  gdzie D jest zadany nierównościami:  $-4 \leq 2x - y \leq 1$ ,  $-1 \leq x + y \leq 5$ .

**Rozwiązanie.** Zadanie można zrobić bez zamiany zmiennych, ale opisanie obszaru D jest wtedy kłopotliwe.



Podstawiamy

$$u = 2x - y$$

$$v = x + y.$$

Stąd łatwo

$$x = \frac{u + v}{3}$$

$$y = \frac{-u + 2v}{3}$$

a zatem

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = 1/3.$$

Wobec tego, z twierdzenia o zamianie zmiennych,

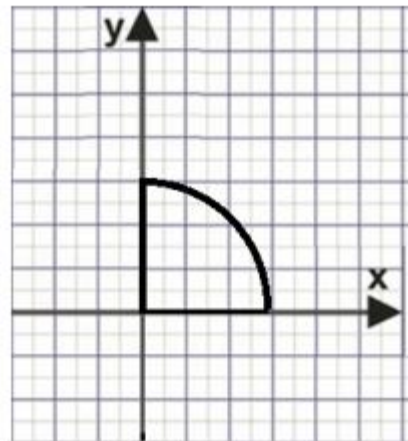
$$\iint_D (x + y) dx dy = \iint_{\Delta} \left( \frac{u + v}{3} + \frac{-u + 2v}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} du dv = \int_{-4}^1 du \int_{-1}^5 \frac{v}{3} dv = \int_{-1}^4 \frac{v^2}{6} \Big|_{-1}^5 du = \int_{-4}^1 4 du = 4u \Big|_{-4}^1 = 20.$$

# Współrzędne biegunowe

$$x(r, \phi) = r \cdot \cos \phi$$

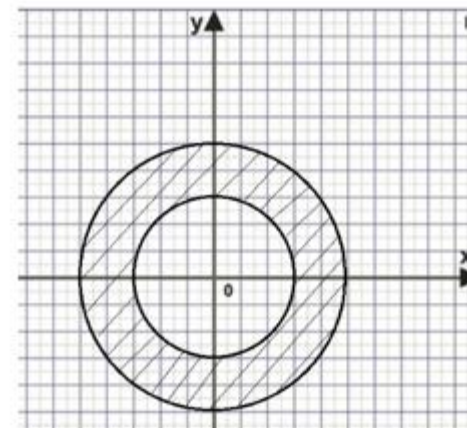
$$y(r, \phi) = r \cdot \sin \phi$$

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \phi)} = r$$



$$D: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$$

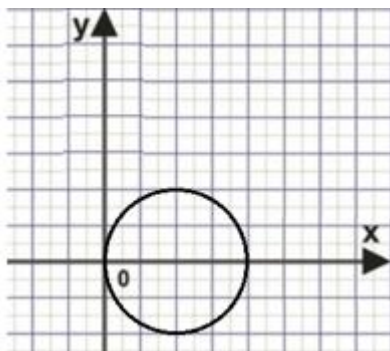
$$\Delta: 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$



$$D: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$$

$$\Delta: 3 \leq r \leq 5, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Nieco trudniej opisać koło typu  $x^2 + y^2 \leq 4x$



Wstawiając współrzędne biegunowe otrzymujemy

$$r^2 \leq 4r \cos \phi \quad \text{czyli} \quad r \leq 4 \cos \phi$$

Ponieważ  $r \geq 0$  (czyli  $\cos \phi \geq 0$ ), otrzymujemy stąd

$$-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$$

$$0 \leq r \leq 4 \cos \phi$$

(wynika to też z rysunku, bo I i IV ćwiartka)

## Zastosowania geometryczne

### *Objętość bryły*

Objętość bryły pomiędzy wykresami funkcji  $z_g(x, y)$  (powierzchnia górna bryły) i  $z_d(x, y)$  (powierzchnia dolna) której rzutem na płaszczyznę  $Oxy$  jest obszar  $D$  wyraża się wzorem:

$$V = \iint_D (z_g(x, y) - z_d(x, y)) dx dy.$$

### *Pole obszaru płaskiego*

Pole obszaru płaskiego  $D$  w płaszczyźnie  $Oxy$  można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

$$|D| = \iint_D dx dy.$$

### *Pole płyta powierzchniowego*

Pole płyta powierzchniowego  $S$ , który jest wycinkiem powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$  otrzymanym dla  $(x, y) \in D$  wyraża się wzorem:

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

## Zadania.

1. Oblicz  $\iint_D (x + 2y) dx dy$  na obszarze  $D$  danym nierównościami:  $1 \leq 2x + y \leq 3, 2 \leq x - 2y \leq 4$ .
2. Oblicz  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$  gdzie  $D$  jest wycinkiem koła  $x^2 + y^2 \leq 4$  leżącym ponad prostymi  $y = -x$  i  $y = x$ .
3. Oblicz  $\iint_D x^3 dx dy$  jeśli  $D$  to obszar leżący w I ćwiartce układu współrzędnych i ograniczony przez krzywe  $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, y = 0, y = x$ .
4. Oblicz  $\iint_D y dx dy$  jeśli  $D$  jest ograniczony krzywą  $x^2 + y^2 + 2y = 0$ .
5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej
  - a) powierzchniami  $x + y + z = 10, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ .
  - b) paraboloidą  $z = x^2 + y^2$  (od dołu) oraz sferą  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  (od góry).
  - c) powierzchniami:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  oraz  $x^2 + y^2 = Rx$ .
  - d) powierzchniami  $z = 3 \arctan \frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \arctan \frac{y}{x}, y \geq 0$ .
6. Obliczyć pole powierzchni
  - a) tej części walca  $x^2 + z^2 = a^2$ , którą z niego wycina walec  $x^2 + y^2 = a^2$ .
  - b) jaką ze sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  wycina walec  $x^2 + y^2 = Rx$ .
  - c) bryły  $az = xy$  leżącej wewnątrz walca  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ .
  - d) tej części sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , której punkty  $(x, y, z)$  mają współrzędną  $z \geq a$ , gdzie  $a \geq 0$ .