

Wykład

Całka krzywoliniowa

----- CAŁKA KRZYWOLINIOWA NIESKIEROWANA -----

Niech L będzie krzywą regularną w przestrzeni 3-wymiarowej $\mathbf{R}^3$. Całka krzywoliniowa nieskierowana (I rodzaju) z funkcji $f(x, y, z)$, to wyrażenie

$$\int_L f(x, y, z) dl$$

Twierdzenie. Niech

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1)$$

będzie parametryzacją krzywej L . Wówczas

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (2)$$

Przykład.1. Oblicz $\int_L x \, dl$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $(1,1)$ do punktu $(2,4)$.

Rozwiązanie. Nie mamy parametryzacji krzywej L , ale to nie problem:

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [1,2].$$

Teraz $x' = 1, y' = 2t$ i wstawiamy do (2) (akurat mamy przypadek krzywej płaskiej, więc pomijamy „ z'' ”)

$$\int_L x \, dl = \int_1^2 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \dots$$

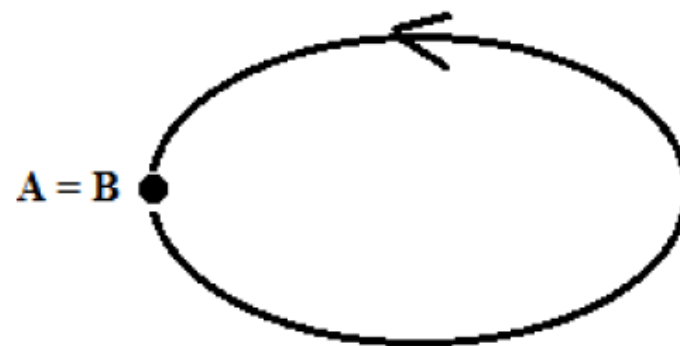
W tym momencie mamy „zwykłą” całkę pojedynczą, którą jednakże trzeba będzie doliczyć.

----- CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA -----

Krzywej L można nadać kierunek



Łuk skierowany



Krzywa zamknięta skierowana

Niech $\widehat{AB}$ będzie łukiem (krzywą) regularnym skierowanym w przestrzeni 3-wymiarowej $\mathbf{R}^3$. Całka krzywoliniowa skierowana (II rodzaju) po łuku $\widehat{AB}$, to wyrażenie

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Lub, w przypadku krzywej zamkniętej,

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Uwaga. $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy + Rdz$

Twierdzenie. Niech

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

będzie parametryzacją krzywej L zgodną z kierunkiem łuku $\widehat{AB}$. Wówczas

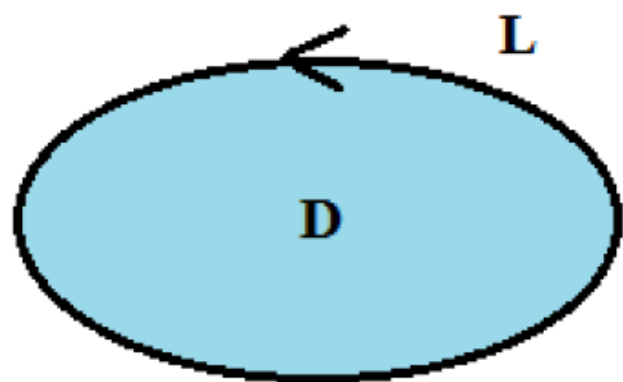
$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt \end{aligned} \quad (3)$$

Przykład. Niech AB będzie łukiem zadany przez $x = \cos t, y = \sin t, z = t, \quad t \in [0, 2\pi]$ skierowanym od $A = (1, 0, 0)$ do $B = (1, 0, 2\pi)$. Oblicz

$$\oint_{AB} xdx + ydy + zdz.$$

Rozwiązanie.

$$\oint_{AB} xdx + ydy + zdz = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t + t \cdot 1) dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$



Twierdzenie (Greena – dotyczy **krzywej płaskiej zamkniętej**)

Niech krzywa L , **zamknięta**, regularna oraz zorientowana **przeciwnie** do ruchu wskazówek zegara, będzie brzegiem obszaru $D \subset \mathbb{R}^2$, oraz niech funkcje P i Q będą klasy $C^1(D)$. Wówczas

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Przykład 1. Obliczyć $\int_L y^3 dx - x^3 dy$ gdzie L jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ zorientowanym zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Rozwiązanie. Można jak najbardziej parametryzować okrąg i obliczać całkę metodą poznaną na poprzednim wykładzie, ale lepiej będzie wykorzystać wzór Greena

$$\int_L y^3 dx - x^3 dy = - \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy = \dots$$

W tym momencie mamy do rozwiązania całkę podwójną, dla której możemy stosować wszystkie poznane do tej pory metody.

ZADANIA

1. Oblicz całkę krzywoliniową nieskierowaną:

- a) $\int_L \sqrt{2y} dl$ jeśli L jest krzywą zadaną parametrycznie $x = t, y = t^2/2, z = t^3/3$ dla $0 \leq t \leq 1$.
- b) $\int_L x^2 dl$ gdzie L jest łukiem okręgu $x^2 + y^2 = 4$ leżącym w I ćwiartce układu współrzędnych.
- c) $\int_L \frac{x}{y^2+z^2} dl$ gdzie L jest odcinkiem łączącym $A(-1,1,2)$ i $B(1,1,5)$.

2. Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną:

- a) $\int_L ydx + zdy + xdz$ jeśli L jest krzywą zadaną parametrycznie $x = t, y = t^2, z = t^3$ dla $0 \leq t \leq 1$ skierowaną od punktu $(1,1,1)$ do punktu $(0,0,0)$.
- b) $\int_L -ydx + xdy$ gdzie L jest łukiem elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ skierowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (czyli $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$).
- c) $\int_L \frac{-ydx + xdy}{x+y}$ gdzie L jest brzegiem kwadratu ABCD, $A(1,0), B(2,1), C(1,2), D(0,1)$ skierowanym zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

3. Stosując wzór Greena oblicz całkę krzywoliniową skierowaną:

a) $\oint_L -ydx + xdy$ gdzie L jest łukiem elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ skierowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

b) $\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x+y}$ gdzie L jest brzegiem kwadratu ABCD, A(1,0), B(2,1), C(1,2), D(0,1) skierowanym zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

c)  Egzamin II, zad. 4 (11:21-11:43)

Obliczyć

$$\oint_L -2y^2 dx + \frac{x^2}{2} dy$$

gdzie L jest brzegiem równoległoboku $\begin{cases} -1 \leq 3x - 2y \leq 2 \\ 1 \leq 2x + y \leq 3 \end{cases}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.