Wykład 8

- Całka krzywoliniowa skierowana c.d.
- Szeregi Fouriera

Def. Wyrażenie

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

nazywamy **różniczką zupełną,** jeżeli istnieje funkcja $U(x,y)$, taka że $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ oraz $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Uwaga. Na to aby wyrażenie $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ było różniczką zupełną potrzeba i wystarcza, aby

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y). \qquad (*)$$

Twierdzenie. (niezależność od drogi całkowania)
Niech D będzie obszarem jednospójnym płaskim, a funkcje $P(x,y), Q(x,y)$ klasy C^1 w obszarze D.
Jeżeli łuk $\widehat{AB}$ zawiera się w D oraz zależność (*) zachodzi w każdym punkcie D, to

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A).$$

Przykład. 1. Oblicz $\int_{(1,1)}^{(2,4)} (y+2x)dx + (x+2y)dy.$

Rozwiązanie.

Podano tylko początek i koniec łuku - sprawdźmy zatem, że całka rzeczywiście nie zależy od drogi.

$$Q = (x+2y), \quad P = (y+2x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

zatem (*) zachodzi. Trzeba więc znaleźć funkcję $U(x,y)$ taką jak w definicji.

Ponieważ $\frac{\partial U}{\partial x} = y + 2x$, to

$$U = U(x,y) = \int (y+2x)dx = xy + x^2 + c(y). \qquad (1)$$

Wykorzystamy teraz drugi warunek $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, ale nieco inaczej, gdyż już wiemy trochę więcej jak może wyglądać U, patrz (1). Zatem

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(xy + x^2 + c(y)\big) = x + c'(y) = x + 2y.$$

Stąd

$$c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = \int 2y\,dy = y^2 + c.$$

Zatem

$$U = xy + x^2 + y^2 + c.$$

Podstawiając punkty (1,1) i (2,4) otrzymujemy ostatecznie

$$\int_{(1,1)}^{(2,4)} (y+2x)dx + (x+2y)dy = U(2,4) - U(1,1) = 2\cdot 4 + 2^2 + 4^2 - (1\cdot 1 + 1^2 + 1^2) = 25.$$

W interpretacji fizycznej, gdy siła $\overrightarrow{F} = [P(x,y), Q(x,y)]$ spełnia warunek $(*)$, to funkcję $U(x,y)$ nazywamy potencjałem.

Zatem jeśli siła ma potencjał, to praca nie zależy od drogi całkowania. Fizycy mówią też o polu sił w obszarze D, i że praca w polu potencjalnym nie zależy od drogi.

SZEREGI FOURIERA

Def. Szereg Fouriera dla funkcji $f(x), x \in [a, b]$ to szereg postaci

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

gdzie $2l = b - a$, a współczynniki należy obliczyć ze wzorów

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \qquad n = 0,1,2, \dots$$

$$\mathrm{b}_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \qquad n = 1,2, \dots$$

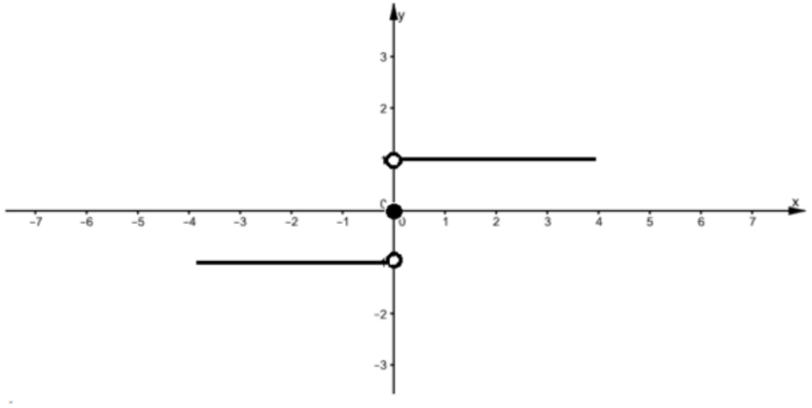
Przykład. Rozwinąć funkcję $f(x) = sgn(x)$ w zespolony szereg Fouriera w przedziale $[-1,1]$.

Rozwiązanie. (przedziały symetryczne występują najczęściej). Łatwo widać, że $l = 1$. A więc

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = -\int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx = \ldots$$

(musimy rozbić na dwie całki bo $f(x) = -1,\ \text{dla}\ x \in [-1,0)$ oraz $f(x) = 1, \text{dla}\ x \in (0,1]$ – punktem 0 się nie przejmujemy)

$$\ldots = -\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1} = 0 \qquad (1)$$



$y = sgn(x)$

Ponieważ dzielimy przez n, a_0 (n = 0) musimy obliczyć osobno

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{1} 1dx = 0 \qquad (2)$$

Na koniec

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx = -\int_{-1}^{0}\sin(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1}\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n - ((-1)^n - 1)) = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Zadanie 1. Sprawdź, że funkcje podcałkowe stanowią różniczkę zupełną, a następnie oblicz całki

a) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ wzdłuż drogi nie przechodzącej przez początek układu współrzędnych,

b) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

Zadanie 2. Rozwiń w szereg trygonometryczny Fouriera funkcje. Narysuj wykres szeregu.

a) $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$,

b) $f(x) = x, x \in [0,1]$,

c) $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ w przedziale [-2,2]