Metoda podziału i ograniczeń (Branch and Bound)

Rozważmy problem

$$z = \max\{c^T x : x \in X\}$$

Niech $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_K$ będzie podziałem X oraz

$$z_k = \max\{c^T x : x \in X_k\}.$$

Obserwacja.

Niech $\underline{z}_k \leq z_k \leq \bar{z}_k, k = 1, \ldots, K,$ oraz

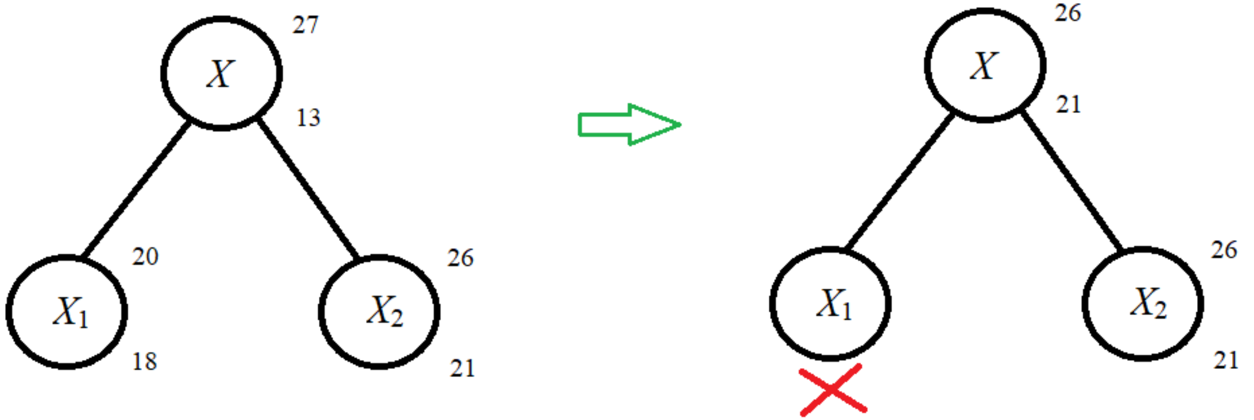
$$\bar{z} \coloneqq \max_k \bar{z}_k,$$

$$\underline{z} \coloneqq \max_k \underline{z}_k.$$

Wówczas

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z}.$$

Poniżej mamy $18 \leq z_1 \leq 20$, $21 \leq z_2 \leq 26$, a więc $21 \leq z \leq 26$. W gałęzi X_1 nie znajdziemy zatem rozwiązania optymalnego. Wystarczy więc rozwiązać problem dla X_2.



(!) Zaślepiamy wierzchołek X_k jeśli $\bar{z}_k \leq \underline{z}$ lub w X_k nie ma rozwiązania dopuszczalnego (zaślepione wierzchołki nazwiemy „martwymi", a pozostałe „żywymi").

Algorytm Dakina.

1. Ograniczenie górne $\bar{z}_k$ otrzymujemy rozwiązując relaksację liniową – niech x^* wektor realizujący rozwiązanie.
2. Rozgałęzienia na podproblemy realizujemy następująco:

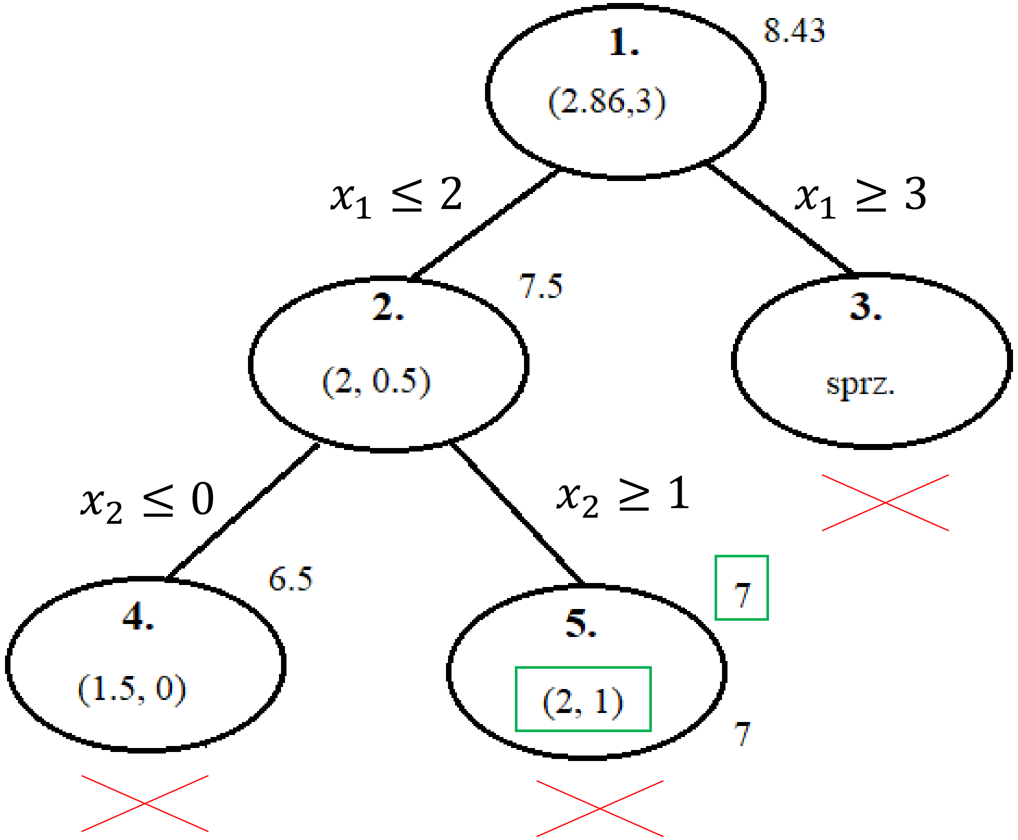
$$X_k^{(1)} = \{x \in X_k : x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor\}$$
$$X_k^{(2)} = \{x \in X_k : x_j \geq \lceil x_j^* \rceil\}$$

gdzie $x_j^* \notin \boldsymbol{Z}$.

3. Zaślepiamy wierzchołki według reguły (!).

Przykład.

$$\begin{aligned} \max: \quad z = 4x_1 - x_2 & \\ 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 \\ x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \boldsymbol{Z} \end{aligned}$$



$$\boldsymbol{z = 7, x_1 = 2, x_2 = 1.}$$

Algorytm Balasa.

1. Założenia wstępne

a) Strategia „w głąb”
b) Zmienne uporządkowane według rosnących współczynników funkcji celu
c) postać problemu

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

$d)$ $c \geq 0$ (jeśli $\exists j: c_j < 0,$ to podstawiamy $x_j = 1 - y_j$)

e) Notacja

$$(** \mid ****)$$

przed „kreską” zmienne ustalone, za „kreską” zmienne wolne.

Inicjacja. Przyjmij $x = (0, \dots, 0), z^* = \infty$

Iteracja.

KROK 1. Przejdź do kolejnego „żywego” wierzchołka $x = (x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$ według strategii „w głąb”.

KROK 2. Jeśli $c^T x \geq z^*$, to **zaślep** wierzchołek (zauważ, że ze względu na uporządkowanie zmiennych w całej gałęzi „poniżej” x nie będzie już lepszego rozwiązania niż x^*). Przejdź do KROK 1.

KROK 3. Jeśli x jest dopuszczalne to, podstaw $z^* \coloneqq c^T x$ i $x^* \coloneqq x$. **Zaślep** wierzchołek i przejdź do KROK 1.

KROK 4. Wykonaj TEST NIEDOPUSZCZALNOŚCI (TN), tzn. sprawdź czy istnieje i takie, że

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + \max \left\{ \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j : x_j \in \{0,1\} \right\} < b_i$$

Jeśli istnieje (co oznacza, że nie ma rozwiązania dopuszczalnego w całej gałęzi „poniżej” x), **zaślep** wierzchołek i przejdź do KROK 1.

KROK 5. W wierzchołku x wykonaj **rozgałęzienie**

a) $(x_1, \dots, x_k, 1 | 0,0, \dots, 0)$ oraz

b) $(x_1, \dots, x_k, 0 | 1,0, \dots, 0)$.

Przykład.

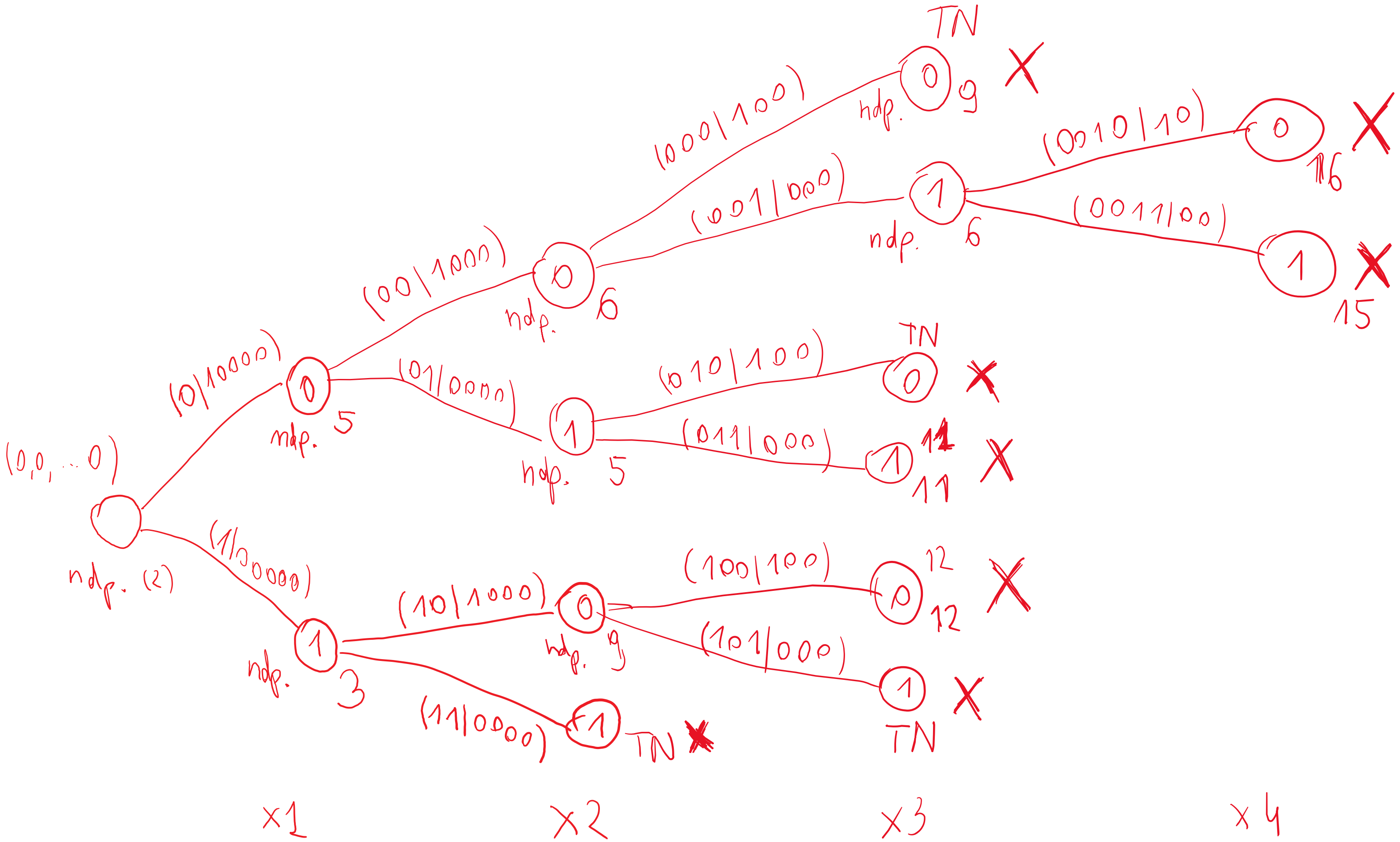
$$\min: \; z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6$$
$$-2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2$$
$$-5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2$$
$$5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3$$
$$x_1, \dots, x_6 \in \{0,1\}$$

(2)

*

~~z=12 x=(100100)~~

z=11 x=(011000)



Metoda

BRANCH AND CUT = BRANCH AND BOUND + CUTTING PLANES